数理解析研究所講究録
978 巻 1997 年 173-178

On ε-core of a Fuzzy Game with Side-Payments

新潟大自然科学 沢崎 陽一 (Yoichi Sawasaki)
新潟大自然科学 木村 寛 (Yutaka Kimura)
新潟大理学部 田中 謙輔 (Kensuke Tanaka)

私たちは fuzzy coalition を用いて, side-payments を持つゲームのコアについて考察する. 特性関数に凸を仮定するとそのコアは劣微分と一致することから, コアの性質を調べるために劣微分の性質を応用することが出来る. しかし, 特性関数に凸が仮定されていないときにはコアは劣微分と一致するとは限らない. そこで $\varepsilon > 0$ に対してε-コアの定義を与え, 劣微分とエークランドの定理を用いてコアの近似解を与える.

1 Fuzzy coalitions

n 人の player の集合を Nとし, $\mathcal{A}$ を Nの部分集合 A の族とする. A は player 間の coalition とみなす. このとき A に対して, 写像 $\tau^A \in \{0,1\}^n$ を次のように対応させる:

$$\tau_i^A = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A. \end{cases} \tag{1.1}$$

すなわち, player i が coalition A に属するときは完全に協力をし, 属さないときは全く協力をしないということである.

これに対して, 次のように定義された coalition $\tau \in [0,1]^n$を "fuzzy coalition" という.

$$\tau = \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A)\tau^A, \quad \text{where } m(A) \geq 0, \ \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) = 1 \tag{1.2}$$

i 番目の要素$\tau_i \in [0,1]$ は

$$^\forall i \in N, \quad \tau_i = \sum_{A \ni i} m(A) \tag{1.3}$$

と書くことができ, coalition のなかで player i が協力する程度を表す. また, $\mathcal{T} \subset [0,1]^n$を fuzzy coalition の族とする.

2 Core of a fuzzy game with side-payments

Side-payments を持つ fuzzy game を考える. このとき特性関数が convex かつ positively homogeneous のとき, fuzzy game の core $\mathcal{C}(\mathcal{T}, v)$ が τ^N での v の subdifferential $\partial v(\tau^N)$ に一致することを示す.

Definition 2.1 $v : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ をゲーム $(\mathcal{T}, J(\tau))$ の特性関数とする．その時，*(2.1)* で定義された *fuzzy game* $(\mathcal{T}, v)$ は *side-payment* を持つゲームであるという．

$$^{\forall}\tau \in \mathcal{T},\ J(\tau) = \left\{ c \in \mathbb{R}^{A_\tau} \mid \sum_{i \in A_\tau} c_i = v(\tau) \text{ and } c_j = 0,\ ^{\forall}j \notin A_\tau \right\} \quad (2.1)$$

ただし，A_τ は τ の *support* である．

次に，fuzzy colition の族 $\mathcal{T}$ 上で定義された positively homogeneous な特性関数 v の 族を考える．その時，次のように定義することにより v の族は $\mathbb{R}^n_+$ に拡張される．

$$\begin{cases} v(\tau) = \left(\sum\limits_{i \in N} \tau_i\right) v \left(\dfrac{\tau}{\sum\limits_{i \in N} \tau_i}\right) & \text{if } \tau \neq \theta, \\ v(\theta) = v(\tau^{\emptyset}) = 0 & \text{if } \tau = \theta. \end{cases} \quad (2.2)$$

Definition 2.2 *Side-payment* を持つ *fuzzy game* の *core* $\mathcal{C}(\mathcal{T}, v)$ とは次の (2.3) を満たす *multiloss* $c \in J(\tau)$ の集合である．

$$\begin{cases} (1) \quad \left\langle \tau^N , c \right\rangle = v(\tau^N), \\ (2) \quad ^{\forall}\tau \in \mathcal{T}, \quad \langle \tau , c \rangle \leq v(\tau). \end{cases} \quad (2.3)$$

Proposition 2.1 v が *convex* かつ *positively homogeneous* のとき次が成り立つ．

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}, v) = \partial v(\tau^N),$$

ただし，$\partial v(\tau^N) = \{ c \in \mathbb{R}^n \mid v(\tau) \geq v(\tau^N) + \left\langle c , \tau - \tau^N \right\rangle ,\ ^{\forall}\tau \in \mathbb{R}^n \}$.

Proof. $c \in \mathcal{C}(\mathcal{T}, v)$ をとる．その時任意の $\tau \in \mathbb{R}^n_+$ に対して，

$$v(\tau^N) - \left\langle \tau^N , c \right\rangle = 0 \leq v(\tau) - \langle \tau , c \rangle .$$

よって，$c \in \partial v(\tau^N)$.

逆に，$c \in \partial v(\tau^N)$ とすると，

$$v(\tau^N) - \left\langle \tau^N , c \right\rangle \leq v(\tau) - \langle \tau , c \rangle$$

かつ v が positively homogeneous であるので，$\tau = 0$，また $\tau = 2\tau^N$ とすることにより，$\left\langle \tau^N , c \right\rangle = v(\tau^N)$ を得る．よって，

$$\langle \tau , c \rangle \leq v(\tau), \quad ^{\forall}\tau \in \mathbb{R}^n_+.$$

ゆえに，$c \in \mathcal{C}(\mathcal{T}, v)$. □

Proposition 2.2 v が *convex* かつ *positively homogeneous* のとき，v の *core* $\mathcal{C}(\mathcal{T}, v)$ は空でなくかつ，*convex*，*compact* な集合である．更に，v が τ^N で微分可能のとき *core* は τ^N での v の *gradient vector* $Dv(\tau^N)$ にのみ一致する．

3 ε-core of a fuzzy game and its applications

上では，side-payment を持つ fuzzy game の core を定義し，またそれが空でないことを示した．しかし，core はいつでも空でないとは限らないので，それを示す条件が必要である．(例えば，特性関数が convex や balanced であるなど.) そこで，side-payments を持つ fuzzy game において ε-core を定義し，ε-core が存在するとき Ekeland's ε-variational principle を用いることによって近似解を得ることができる．

Definition 3.1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，*side-payments* を持つ *fuzzy game* の ε*-core* $\mathcal{C}_\varepsilon(\mathcal{T}, v)$ は次の (3.1) を満たす *multiloss* $c \in J(\tau)$ の集合である．

$$\begin{cases} (1) & \left\langle \tau^N , c \right\rangle = v(\tau^N), \\ (2) \quad {}^\forall \tau \in \mathcal{T}, & \langle \tau , c \rangle \leq v(\tau) + \varepsilon. \end{cases} \tag{3.1}$$

よって，次の Proposition を与える．

Proposition 3.1 v を *convex* かつ *positively homogeneous* な関数とする．そのとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathcal{C}_{\varepsilon_1}(\mathcal{T}, v) \subset \mathcal{C}_{\varepsilon_2}(\mathcal{T}, v) \quad \text{if } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2, \\ &(2) \quad \mathcal{C}(\mathcal{T}, v) = \mathcal{C}_\varepsilon(\mathcal{T}, v) \quad \text{if } \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Proposition 3.2 v を *convex* かつ *positively homogeneous* な関数とする．そのとき，任意の $\varepsilon \geq 0$ に対して

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\mathcal{T}, v) \subset \partial_\varepsilon v(\tau^N),$$

ただし，$\partial_\varepsilon v(\tau^N) = \{c \in \mathbb{R}^n \mid v(\tau) \geq v(\tau^N) + \left\langle c, \tau - \tau^N \right\rangle - \varepsilon, {}^\forall \tau \in \mathbb{R}^n\}$.

Proof. $c \in \mathcal{C}_\varepsilon(\mathcal{T}, v)$ をとる．このとき任意の$\tau \in \mathbb{R}^n_+$ に対して，

$$v(\tau^N) - \left\langle \tau^N , c \right\rangle = 0 \leq v(\tau) - \langle \tau , c \rangle + \varepsilon.$$

ゆえに，$c \in \partial_\varepsilon v(\tau^N)$. □

こうして，v が convex かつ positively homogeneous のとき次を得る．

$$\partial v(\tau^N) = \mathcal{C}(\mathcal{T}, v) \subset \mathcal{C}_\varepsilon(\mathcal{T}, v) \subset \partial_\varepsilon v(\tau^N). \tag{3.2}$$

次に，特性関数 v が convex でないときを考えとくに，locally Lipschitz game であると仮定する．(ただし，game が locally Lipschitz であるとは，v が locally Lipschitz である game のことである.) このとき，v は τ^N で Clarke's generalized gradient $\partial v(\tau^N)$ を持つ．$\partial v(\tau^N)$ は convex かつ compact であるが，core とは一致するとは限らない．そこで ε-core が存在するとき 近似解の存在に関する定理を与える．

Lemma 3.1 (Ekeland) 関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が下半連続で下に有界とする．このとき，正の実数$\varepsilon>0$ と $f(x_0)\le\inf\{f(x)\mid x\in\mathbb{R}^n\}+\varepsilon$ となる $x_0\in\mathbb{R}^n$に対して，次の *3* 条件を満たす$\bar{x}\in\mathbb{R}^n$が存在する．

任意のδ $(0<\delta<1)$ に対して，

1. $\delta\|\bar{x}-x_0\|\le f(x_0)-f(\bar{x})$,
2. $\|\bar{x}-x_0\|<\frac{\varepsilon}{\delta}$,
3. $x\ne\bar{x},\quad \delta\|\bar{x}-x_0\|+f(x)>f(\bar{x})$.

Theorem 3.1 vはτ^Nで *locally Lipschitz* でかつ *positively homogeneous* とする．このとき，任意の実数 $\varepsilon\ge0$, $\beta\ge0$ に対して，ε-*core* $c\in\mathcal{C}_\varepsilon(\mathcal{T},v)$ が存在するとき，次を満たす$\tau_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$と $c_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$が存在する．

1. $c_\varepsilon\in\partial v(\tau_\varepsilon)$,
2. $\|\tau^N-\tau_\varepsilon\|\le\sqrt{\varepsilon}$,
3. $|v(\tau_\varepsilon)-v(\tau^N)|\le\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{\beta})$,
4. $\|c_\varepsilon-c\|\le\sqrt{\varepsilon}(1+\beta\|c\|)$,
5. $|\langle c_\varepsilon-c\,,\,\tau\rangle|\le\sqrt{\varepsilon}(\|\tau\|+\beta|\langle c\,,\,\tau\rangle|)$, ${}^\forall\tau\in\mathbb{R}^n$.

Proof. $\mathbb{R}^n$上のノルム $\|\cdot\|_\beta$を次のように定義する．

$$\|\tau\|_\beta:=\|\tau\|+\beta|\langle c\,,\,\tau\rangle|. \tag{3.3}$$

次に，$u(\tau)=v(\tau)-\langle c\,,\,\tau\rangle$ とすると u はτ^Nで locally Lipschitz となるから，

$$u(\tau^N)\le\inf_{\tau\in\mathbb{R}^n_+}u(\tau)+\varepsilon. \tag{3.4}$$

ここで Ekeland の定理 (lemma) を$\delta=\sqrt{\varepsilon}$として，また $\|\cdot\|_\beta$について適用すると，次の 2 条件を満たす$\tau_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$が存在する:

$$ {}^\forall\tau_\varepsilon\ne\tau,\quad u(\tau_\varepsilon)<u(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\|\tau-\tau_\varepsilon\|_\beta, \tag{3.5}$$

$$u(\tau_\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}\|\tau-\tau_\varepsilon\|_\beta\le u(\tau^N). \tag{3.6}$$

(3.5) 式より, $h(\tau)=\|\tau-\tau_\varepsilon\|_\beta$, $\tau=\tau_\varepsilon+t\lambda$ $\quad(t>0,{}^\forall\lambda\in\mathbb{R}^n)$ とおくと，$(u+\sqrt{\varepsilon}h)(\tau_\varepsilon+t\lambda)-(u+\sqrt{\varepsilon}h)(\tau_\varepsilon)>0=\langle\theta\,,\,\lambda\rangle$ となるので

$$\limsup_{\substack{\tau\to\tau_\varepsilon\\ t>o}}\frac{(u+\sqrt{\varepsilon}h)(\tau+t\lambda)-(u+\sqrt{\varepsilon}h)(\tau)}{t}\ge\langle\theta\,,\,\lambda\rangle\,,\quad {}^\forall\lambda\in\mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

ゆえに，

$$\theta\in\partial(u+\sqrt{\varepsilon})(\tau_\varepsilon)\subset\partial v(\tau_\varepsilon)-c+\sqrt{\varepsilon}\partial h(\tau_\varepsilon). \tag{3.8}$$

ここで，$\partial h(\tau_\varepsilon)=\{\bar{c}+\alpha c\mid\|\bar{c}\|\le1\text{ and }|\alpha|\le\beta\}$ だから，次を満たす $c_\varepsilon\in\partial v(\tau_\varepsilon)$ が存在する．((1) が成立)

$$c_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}\bar{c}+(1-\sqrt{\varepsilon}\alpha)c,\quad\text{where }\|\bar{c}\|\le1\text{ and }|\alpha|\le\beta. \tag{3.9}$$

これより，すべての$\tau \in \mathbb{R}^n_+$に対して，

$$|\langle c_\varepsilon - c\,,\,\tau\rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}(\|\tau\| + \beta|\langle c\,,\,\tau\rangle|) \tag{3.10}$$

が成り立つ．((5) が成立)

(3.10) 式において$\tau = c_\varepsilon - c$を代入すると，

$$\|c_\varepsilon - c\|(\|c_\varepsilon - c\| - \sqrt{\varepsilon}(1 + \beta\|c\|)) \leq 0.$$

$\|c_\varepsilon - c\| \geq 0$ より，$\|c_\varepsilon - c\| - \sqrt{\varepsilon}(1 + \beta\|c\|) \leq 0$. ((4) が成立)

一方 (3.6) 式から，$0 \leq \sqrt{\varepsilon}\|\tau^N - \tau_\varepsilon\|_\beta \leq u(\tau^N) - u(\tau_\varepsilon) \leq \varepsilon$ より

$$\begin{aligned}\varepsilon \geq \sqrt{\varepsilon}\|\tau^N - \tau_\varepsilon\|_\beta &= \sqrt{\varepsilon}\|\tau^N - \tau_\varepsilon\| + \sqrt{\varepsilon}\beta\left|\left\langle c\,,\,\tau^N - \tau_\varepsilon\right\rangle\right| \\ &\geq \sqrt{\varepsilon}\|\tau^N - \tau_\varepsilon\|.\end{aligned} \tag{3.11}$$

ゆえに，$\|\tau^N - \tau_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$. ((2) が成立)

特に$\left|\left\langle c\,,\,\tau^N - \tau_\varepsilon\right\rangle\right| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta}$ となるから，

$$\begin{aligned}0 &\leq u(\tau^N) - u(\tau_\varepsilon) \\ &= v(\tau^N) - \left\langle\tau^N\,,\,c\right\rangle - (v(\tau_\varepsilon) - \langle\tau_\varepsilon\,,\,c\rangle) \leq \varepsilon.\end{aligned} \tag{3.12}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}|v(\tau^N) - v(\tau_\varepsilon)| &\leq \left|\left\langle c\,,\,\tau^N - \tau_\varepsilon\right\rangle\right| + \varepsilon \\ &\leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta} + \varepsilon \\ &= \sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\beta}).\quad \text{((3) が成立)}\end{aligned}$$

□

Corollary 3.1 vはτ^Nで *locally Lipschitz* でかつ *positively homogeneous* とする．このとき，任意の実数 $\varepsilon \geq 0$ に対して，ε-*core* $c \in \mathcal{C}_\varepsilon(\mathcal{T}, v)$ が存在するとき，次を満たす$\tau_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$と $c_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$が存在する．

1. $c_\varepsilon \in \partial v(\tau_\varepsilon)$,

2. $\|\tau^N - \tau_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

3. $\|c_\varepsilon - c\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Proof. 定理において$\beta = 0$ とすればよい． □

References

1. J. -P. Aubin, "Mathematical Methods of Game and Economic Theory," North-Holland, Amsterdam, 1979.
2. J. -P. Aubin, "Locally Lipschitz Cooperative Games," J. Math. Econ. 8 (1981), 241—262.
3. J. -P. Aubin, "Optima and Equilibria," Springer-Verlag/New York, 1993.
4. J.M. Borwein, "A note on ε-subgradients and maximal monotonicity," Pac. J. Math. 103 (1982), 307—314.
5. R.R. Phelps, "Convex functions, monotone operators and differentiability," Lecture note in mathematics 1364, Springer-Verlag/Berlin, 1989.
6. L.S. Shapley and M. Shubic, "Quasi-core in a monetary economy with nonconvex preferences," Econometrica 34 (1966), 805—827