数理解析研究所講究録
978巻 1997年 28-33

あるn人マーケットゲームについて

大阪府立大学総合科学部　寺岡　義伸 (YoshinobuTeraoka)
大阪府立大学総合科学部　呉　妮　(Wu　Ni)

1。問題とモデル

ここで扱う問題は、n個の動物がある縄張りの独占をめぐって競う現象の理論的説明づけから示唆されたゲームであり、 n企業間のある新製品の市場をめぐる競争や広告の問題といったマーケット・ゲームとしてモデル化できるゲームである。

n人のプレーヤ達がある市場をめぐって対立している。その対立はその市場を独占するために努力を投入し、その努力投入をどこまで維持できるかという対立であり、$[0,\infty)$の中で最も長く維持できたプレーヤがその市場を独占できる。この市場は時刻$t\in[0,\infty)$では$v(t)\geq 0$の価値があり、勝者は独占できた時点以後の価値を手に入れることができる。しかしながら、時刻 t まで努力投入を維持すれるためには$H(t)$の（累積）費用を使わなければならない。各プレーヤは、どの時刻まで努力投入を維持すべきか考え投げればならない。

この種の問題にあっては、プレーヤ達にとって利用できる情報様式には二つの型がある。各プレーヤが他人の$n-1$人の行動が常に観測でき、どの時刻においても他の何人が努力投入を維持しているのかが情報として知らされる場合を*Noisy*型とよび、反対に全員が情報防護を行い各プレーヤが他の$n-1$人のうち何人があきらめ何人が頑張っているかが全く知らされず、市場を独占できた時点で始めて他の$n-1$人が断念したことがわかる場合を*Silent*型とよぶ。

後の議論のため以下のような仮定を設定する：

(1) 各プレーヤにとって許された行動区間は$[0,\infty)$。

(2) 市場の価値$v(t)$は上に有界な連続関数として、

$$0\leq v(t)<\infty、\ t\in[0,\infty)、\quad さらに\quad \int_0^\infty v(t)dt<\infty。$$

(3) $V(x)=\int_x^\infty v(t)dt$ とおく。したがって$V(x)$は$[0,\infty)$上で連続的微分可能で　$V(0)>0,\ \ V(\infty)=0$　かつ　$V(t)\geqq 0\quad t\in[0,\infty)$。

(4) 累積維持費用$H(t)$についてはH$(0)=0$が自然だが$H(t)$は連続的微分可能　$0\leq H(0)<V(0)$　かつ　$h(t)=H'(t)>0\quad t\in(0,1)$
と仮定しておく。

次に $\prod_{i=1}^{n}[0,\infty)$ 上の実数値関数 $M_i(x_1,\cdots,x_n)$ に対して *Player i* が混合戦略として $[0,\infty)$ 上の *cdf* $F_i(x_i)$ を用いたときの期待値として

$$M_i(F_1,F_2,\cdots,F_n)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty M_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)dF_1(x_1)\cdots dF_n(x_n)$$

および

$$M_i(x_1,F_2,\cdots,F_n)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty M_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)dF_2(x_2)\cdots dF_n(x_n)$$

という記号を使用する。さらに

$$\gamma = \sup\{\,t\,|\,V(t)>0\,\}\ ;$$

$$\theta(t)=\exp[-\int_0^Z\{\,h(t)/V(t)\,\}dt$$

とおく。

どころで、n 人のプレーヤのうち k 人が最後まで頑張り同時刻 t で努力を打ち切ったときは、時刻 t 以後の市場の価値のすべてを k 人で平等に分けるものとする。すなわち k 人の各々は $\frac{1}{k}V(t)$ を手に入れる。

この n 人ゲームにおいては、各プレーヤの競争相手は他の $n-1$ 人というよりはむしろ他の $n-1$ 人の中で最後まで頑張るプレーヤであろう。従って、もし *Player i* が純戦略 $x_i\in[0,\infty)$ を用い、n 人の各々が共通に $[0,\infty)$ 上の *cdf* $F(x_i)$ を混合戦略として用いたとすると, *player* 2 から *Player n* が選んだ純戦略のうち最大値 y は $(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}$ *for* $y\in(0,\infty)$ で与えられる *pdf* を持つ混合戦略に従ってプレーすることとなるから *Player* 1の平衡戦略はこの *pdf* との応答から定まってくることがわかる。

2。Silent Game

n 人のプレーヤの各々は、互いに他の $n-1$ 人の行動が観測できない状態に置かれており、$(0,\infty)$ のどの時点まで努力投入をするあらかじめ決定し、自分の決めたその計画時刻が実現されてみてはじめて,自分が勝者となり得たのかそうでないかが知らされるというのだから、*Player i* の純戦略は $x_i\in[0,\infty)$ とする（$i=1,\cdots,n.$）。

$M_1(x_1,\cdots,x_n)$ を *Player i* が純戦略 x_i を用いたときの *Player* 1 への期待利得とし、*Player* 2 から *Player n* の選んだ純戦略 $x_2,\cdots,x_n$ の中で最大値を y とす

る。そして、$x_1=y$の時は*Player* 2から*Player n* の中の $k-1$ が最大値 y を選ぶことになったとする。ただし, $k=1,\cdots,n$。そうすると

$$(2.1)\qquad M_1(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}-H(x_1), & x_1<y\\ (1/k)V(x_1)-H(x_1), & x_1=y\\ V(x_1)-H(x_1), & x_1>y\end{cases}$$

が得られる。混合戦略はゲームの対称性より全プレーヤに共通な *cdf* $F(x_i)$とし、区間 $(0,u)\subset(0,\infty)$ 上の *density part* $f(x_i)>0$ のみで構成される、というクラスから平衡戦略を見つけ出すことにする。点0での *mass part* を0としてよりことは、二人ゲームの解析から容易にわかる［1］。

*Player*1 が純戦略を用い、他の $n-1$ 人混合戦略$F(x_i)$を用いたときの*Player*1 への期待利得 $M_1(x,F,\cdots,F)$は、*Player* 2から *Player n* が選んだ純戦略のうち最大な値 y が $(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}$、*for* $y\in(0,u)$ で与えられる *pdf* をもつから

（2．2）

$$M_1(x,F,\cdots,F)=\begin{cases}V(x)\int_0^x(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}dy-H(x)\int_0^u(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}dy, & 0\le y\le u\\ \{V(x)-H(x)\}\int_0^u(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}dy, & y\ge u\end{cases}$$

したがって

$$M_1(x,F,\cdots,F)=v_1^o\quad \textit{for all } x\in(0,u);$$

$$\int_0^u(n-1)f(t)\{F(t)\}^{n-2}dt=1$$

を満足するように考え

$$\{F(x)\}^{n-1}=H(x)/V(x)\quad,\qquad 0\le x\le u^o$$

ただしu^oは$V(x)-H(x)=0$、$x\in[0,\infty)$ の唯一根と選ぶと

$$M_1(x,F,\cdots,F)=\begin{cases}0 & , \quad 0\le x\le u^o\\ V(x)-H(x)<0 & , \quad x>u^o\end{cases}$$

が成立する。以上より次の定理を得る。

定理1。 u^0を$V(x)-H(x)=0$の［0、∞）における唯一根とし、*cdf* $F^0(x)$を

$$F^0(x)=\begin{cases}\{H(x)/V(x)\}^{1/(n-1)}, & 0\le x\le u^0\\ 1, & x\ge u^0\end{cases}$$

とすると、$(F^0,\cdots F^0)$は(2.1)で与えられるn人非0和ゲームの一つの平衡点とな

り、この平衡点に対応する *Player i* への平衡値を v_i^0 とすると $v_1^0 = \cdots = v_2^0 = 0$。

注： この結果によると、$H(x)=\int_0^x h(t)dt$, $V(x)=\int_x^\infty v(t)dt$ であるから、それまでの努力投入量とそれから以後の入手できるすべての価値か等しくなる点が u^o であり、$cdfF(x)$ はその比を競争相手の数 $n-1$ の（$\dfrac{1}{n-1}$）乗で与えられることとなる。

3。Noisy Game

ここでは,前節と逆に、各プレーヤは互いに他の $n-1$ のうち何人がまだ努力投入を続けているのかが常に観測できるものとする。このモデルにおいても *Player i* の純戦略 $x_i \in (0,\infty)$ とし,この純戦略に対して *Player* 1 への期待利得が次式で与えられるような n 人非０和ゲームを考える：

$$(3.\ 1)\quad M_1(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}-H(x_1), & x<y\\ (1/k)V(x_1)-H(x_1), & x=y\\ \max\limits_{x\ge y_1}\{V(x_1)-H(x_1)\}, & x>y\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-H(x_1), & x_1<y\\ (1/k)V(x_1)-H(x_1), & x_1=y\\ V(y)-H(y), & x_1>y\end{cases}$$

ここに、y は *Player* 2 から n までの $n-1$ 人が選んだ純戦略のうち最大の値であり、$x_1=y$ となるのは *Player* 2 から n のうち $k-1$ 人が最大値 y を選んだものとする。$k=1,\cdots n.$。このゲームも対称ゲームであるから (3.1) で与えられる利得関数は全プレーヤに共通であり、したがって混合戦略もまた全プレーヤに共通と考えてよいから、$[0,\infty)$ 上の cdf $F(x_i)$ とし、$(0,\infty)$ 上の pdf $f(x_i)>0$ のみで構成されるクラスの中から平衡戦略をみつけることとする[１]。前節と同様に、*Player*1 が純戦略 x を用い、他の $n-1$ 人が混合戦略 $F(x_i)$ を用いたときの *Player*1 への期待利得を $M_1(x,F,\cdots,F)$ とすると、*Player* 2 から n が選んだ純戦略のうち最大な値 y は pdf として

$$(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2} \quad for \quad y\in(0,\infty)$$

をもつ分布に従うから

$$(3.\ 2)\qquad M_1(x,F,\cdots,F)=\int_0^x \{V(y)-H(y)\}(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}dy$$

$$-H(x)\int_x^{\infty}(n-1)f(y)\{F(y)\}^{n-2}dy \quad , \qquad x\in[0,\infty)$$

を得る。

このpdfの中には、他の$n-1$人が順次$n-2,\cdots,2,1$と変化していく学習が入っていないようであるが条件付きの期待値の反復であるからこれでよい。そこで

$$M_1(x,F,\cdots,F)=v^* \quad \textit{for all} \quad x>0 \quad ;$$

$$\int_0^{\infty}(n-1)f(t)\{F(t)\}^{n-1}dt=1$$

を解くことにより

（3．3）
$$(n-1)f(t)\{F(t)\}^{n-2}=\frac{h(x)}{V(x)}\exp\left\{-\int_0^x\frac{h(t)}{V(t)}dt\right\} \quad , \quad x\in(0,r)$$

$$\{F^*(x)\}^{n-1}=1-\exp\left\{-\int_0^x\frac{h(t)}{V(t)}dt\right\} \quad , \quad x\in(0,r)$$

を得る。この$F^*(x)$に対して

$$M_1(x,F^*,\cdots,F^*)=0 \quad \textit{for all}\ x\in[0,\infty)$$

が成立する。

以上より定理２を得る。

定理２。$F^*(x)$を次のような$[0,\infty)$上のcdfとする

$$F^*(x)=\begin{cases}\{1-\theta(x)\}^{1/(n-1)}, & 0\le x<\gamma\\ 1, & x\ge\gamma\end{cases}$$

ここに $\gamma=\ \sup\{\,t\,|V(t)>0\,\}$、そうすると $(F^*,\cdots,F^*)$ は(3,1)で与えられる非０和gameの一つの平衡点となり、対応する平衡値は $v_1^*=v_2^*=\cdots=v_n^*=0$。

4。Simple Examples

（1）
$$V(t)=\begin{cases}1-t \quad , & 0\le t<1\\ 0 \quad , & t\ge1,\end{cases}$$

$$H(t)=t$$

の時は $r=1\,,u^o=1/2$ から $\theta(x)=1-x \quad \textit{for}\ x\in[0,1]$。

しだがって

$$F^{o}(x)=\begin{cases}\left\{\dfrac{x}{1-x}\right\}^{\frac{1}{n-1}} & , \quad 0\le z<\dfrac{1}{2}\\ 1 & , \quad z\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$F^{*}(x)=\begin{cases}\sqrt[n-1]{x} & , \quad 0\le x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

を得る。

注： $V(t)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le t<1\\ 0 & , \quad t\ge 1\end{cases}$

（２） $V(t)=e^{-t}$ かつ $H(t)=t$ *for all* $t>0$

この時は $r=\infty$ で u^{o} は $t=e^{-t}$ の根 *i.e.* $u^{o}\approx 0.567$ となる。

また

$$\theta(x)=\exp(1-e^{x}) \qquad \textit{for} \quad x\ge 0 \text{。}$$

したがって

$$F^{o}(x)=\begin{cases}\left\{\dfrac{x}{e^{-x}}\right\}^{\frac{1}{n-1}} & , \quad 0\le x<u^{o}\\ 1 & , \quad x\ge u^{o}\end{cases}$$

$$F^{*}(x)=\{1-\exp(1-e^{x})\}^{\frac{1}{n-1}} \quad , \quad 0\le x<\infty$$

を得る。

注： $v(t)=e^{-t}$, $t\ge 0$

参考文献

[1]. *Y. Teraoka Y. Yamada : Games of production development in manafoctaring , Lecture Notes in Economics and Hathematical systems , Springer – Verlag* (*to appear in* 1996)。