数理解析研究所講究録
978 巻 1997 年 53-63

Fan's System Theorem and its Applications

高橋　渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科

Fan[3] は凸不等式のシステムに関するつぎの定理を証明した。

定理 A (Fan のシステム定理). X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ を X 上で定義され, 値を $(-\infty, \infty)$ にとる下半連続で凸な関数とする. また $c \in R$ とする. このとき, つぎの条件 (1) と (2) は同値である.

(1) n 個の不等式のシステム

$$f_i(x) \leq c \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が解をもつ.

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leq c$$

となる $y \in X$ が存在する.

この定理は minimax 定理 [2], または Fan-Browder[1] の集合値写像に対する不動点定理を用いて証明されるが, それはいろいろの存在定理を証明する上で有用な定理 [10] である. ここではまずこの定理を 3 つの方向から拡張することを試みる. 1 番目は定理 A からコンパクト性と凸性をはずすことである. 2 番目は, 定理 A において, 関数 f_i のとる値を $(-\infty, \infty]$ まで拡張することである. 3 つ目は, 関数 f_i のとる値をベクトル値まで拡張することである. 定理 A からコンパクト性と凸性をはずした定理を用いると, Simons[12] によって証明されていたコンパクト性を仮定しない minimax 定理を簡単に証明することができる. また Fan の定理を用いると, これまで未解決問題とされていた非線形非拡大半群の共通不動点定理が証明できる [6]. 上述のように, ここでは Fan のシステム定理を 3 つの方向から拡張することを 1 つの目的とするが, Fan のシステム定理が応用上有効であることを強調するのもここでの目的である.

1　Fan のシステム定理の拡張定理

まず Fan のシステム定理からコンパクト性と凸性をはずすことを試みよう. X, Y を空でない集合とし, F を $X \times Y$ 上の実数値関数とする. このとき, $F(x, y)$ が第 1 変数に

関して convexlike であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in X$ と $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ に対して, ある $x_0 \in X$ が存在して, 不等式

$$F(x_0, y) \leq \alpha F(x_1, y) + (1-\alpha)F(x_2, y) \quad (\forall y \in Y)$$

がつねに成立することである. concavelike についても不等式

$$F(x_0, y) \geq \alpha F(x_1, y) + (1-\alpha)F(x_2, y) \quad (\forall y \in Y)$$

で同様に定義できる. 最初の拡張定理を証明する前に定理 A を用いてつぎのような minimax 定理を証明しておく.

補助定理 1.1. X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし, Y を単なる集合とする. F を $X \times Y$ 上の実数値関数でつぎの (1) と (2) の条件を満たすものとする.

(1) $y \in Y$ を固定したとき, x の関数 $F(x,y)$ は下半連続な凸関数である;

(2) $F(x,y)$ は第 2 変数に関して concavelike である.

このとき,

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x,y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x,y).$$

証明. $c = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x,y)$ とし, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ を Y の任意の有限集合とする. いま $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ をとると, (2) より $y_0 \in Y$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(x, y_i) \leq F(x, y_0) \quad (\forall x \in X)$$

となる. この y_0 に対して, $c = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x,y)$ より $F(x_0, y_0) \leq c$ となる $x_0 \in X$ が存在する. すなわち, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(x_0, y_i) \leq F(x_0, y_0) \leq c$$

となる $x_0 \in X$ が存在する. ここで定理 A (Fan のシステム定理) を用いると

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x : F(x, y_i) \leq c\} \neq \phi$$

がいえたことになる. X がコンパクトなので

$$\bigcap_{y \in Y} \{x : F(x, y) \leq c\} \neq \phi$$

となる．これは $\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y)\le c$ を意味するので

$$c=\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)\ge\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y)$$

である．逆の不等式は明らかであるから

$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y).$$

定理 1.2.　X をある集合，$f_1,f_2,\ldots,f_n$ を X 上の実数値関数とする．$I=\{1,2,\ldots,n\}$ とし，$X\times I$ 上の関数 F を

$$F(x,i)=f_i(x)\quad(\forall i\in I,x\in X)$$

とする．また，F を第 1 変数に関して convexlike であるとし，$c\in R$ とする．このとき，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)\le c$$

となる $x_0\in X$ が存在するなら，

$$\inf_{x\in X}\max_{i}f_i(x)\le c.$$

証明.

$$Y=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n):\alpha_i\ge 0,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\}$$

とし

$$f(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\quad(\forall x\in X,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in Y)$$

とする．すると，f は第 1 変数に関して convexlike である．実際 $F(x,i)=f_i(x)$ は第 1 変数に関して convexlike であるから $a+b=1$ となるような $a,b\ge 0$ と $x,y\in X$ に対して

$$\begin{aligned}af(x,\alpha)+bf(y,\alpha)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\{af_i(x)+bf_i(y)\}\\ \ge\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(z)&=f(z,\alpha)\quad(\forall\alpha\in Y)\end{aligned}$$

となるような $z\in X$ が存在する．だから補助定理 1.1 の変形によって

$$\inf_{x\in X}\max_{\alpha\in Y}f(x,\alpha)=\max_{\alpha\in Y}\inf_{x\in X}f(x,\alpha)\le c$$

となる. $f(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)$ であるから

$$\inf_{x\in X}\max_{i} f_i(x)\le c.$$

つぎに定理 A において, 関数 f_i のとる値を $(-\infty,\infty]$ まで拡張することを試みる. その前に補助定理を与えておく.

補助定理 1.3. X と Y を位相空間とする. β を X から $[0,\infty)$ への連続関数とし, f を Y から $(-\infty,\infty]$ への下半連続な関数とする. このとき,

$$(\beta\cdot f)(x,y)=\beta(x)f(y)\quad(\forall x\in X, y\in Y)$$

で定義される $X\times Y$ 上の関数 $\beta\cdot f$ は下半連続である.

定理 1.4. X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とする. $f_1,f_2,\ldots,f_n$ を X から $(-\infty,\infty]$ に値をとる下半連続で凸な関数とする. このとき, つぎの命題は同値である.

(1) 凸不等式のシステム

$$f_i(x)\le 0\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

が X 上で解をもつ;

(2) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(y)\le 0$$

となる $y\in X$ が存在する.

証明の概略. (1) が (2) を意味することは明らかである. (2) $\Longrightarrow$ (1) を証明しよう.

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X: f_i(x)<\infty\}$$

とする. $\alpha_i=\dfrac{1}{n}(i=1,2,\ldots,n)$ とすると, (2) から $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\le 0$ となる $x\in X$ が存在する. これは $x\in A$ を意味する. だから A は空でない.

$$Y=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\ :\ \alpha_i\ge 0,\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\}$$

に対して, $F: X\times Y\longrightarrow R$ を

$$F(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\quad(\forall x\in X, \alpha\in Y)$$

で定義する．このとき，

$$\inf_{x\in A}\max_{\alpha}F(x,\alpha)=\max_{\alpha}\inf_{x\in A}F(x,\alpha)$$

となる．だから定理 1.4 を証明するためには，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\leq 0$$

となる $x\in A$ が存在することを示せばよい．これは X のコンパクト性と補助定理 1.3 を用いるとよい．そこで

$$\inf_{x\in X}\max_{i}f_i(x)\leq\inf_{x\in X}\max_{\alpha}F(x,\alpha)\leq\inf_{x\in A}\max_{\alpha}F(x,\alpha)\leq 0$$

より，

$$f_i(x_0)\leq 0\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

となる $x_0\in X$ の存在を得る．

この節の最後に，定理 A において関数 f_i のとる値がベクトル値の場合を考えよう．

定理 1.5. X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，F を順序ノルム空間とする．また F_+ を F の正錐とする．G を X から F への写像で，任意の $\varphi\in F_+^*$ に対して，

$$g(x)=(G(x),\varphi)\quad(x\in X)$$

で定義される関数 g は下半連続で凸な関数である．ただし，F_+^* は F_+ の polar cone である．このとき，つぎの (1) と (2) は同値である．

(1) $G(x)\leq 0$ となる $x\in X$ が存在する;

(2) 任意の $\varphi\in F_+^*$ に対して，$(G(y),\varphi)\leq 0$ となる $y\in X$ が存在する．

証明 $X\times F_+^*$ 上の関数

$$F(x,\varphi)=(G(x),\varphi)\quad({}^\forall(x,\varphi)\in X\times F_+^*)$$

に minimax 定理を適用すればよい．

2 応用

この節ではまず初めに定理 1.2 を用いて Simons[12] によって証明された minimax 定理を簡単に証明する．X を空でない集合とし，

$$F(X)=\{X_0:\phi\neq X_0\subset X, X_0\text{は有限集合}\}$$

とする．

定理 2.1(Simons). X,Y を任意の集合とし，f,g を $X\times Y$ 上の実数値関数で，つぎの (1), (2), (3) の条件を満たすものとする．

(1) $f(x,y) \leq g(x,y) \quad ({}^\forall(x,y) \in X \times Y)$;

(2) f は第 2 変数に関して convexlike である;

(3) g は第 1 変数に関して concavelike である.

このとき, つぎの (i), (ii), (iii) が成立する.

(i) $X_0 \in F(X)$, $Y_0 \in F(Y)$ に対して

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x,y) \leq \sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x,y);$$

(ii) $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y) > -\infty$ ならば, $X_0 \in F(X)$ に対して

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x,y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y);$$

(iii) Y がコンパクト集合で, f が第 2 変数に関して下半連続ならば

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y) \leq \sup_{s \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y).$$

証明

(i) $\sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x,y) = c$ とし, $X_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ とする. すると, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i, y) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i, y) \leq g(x_0, y) \quad ({}^\forall y \in Y)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する. $g(x_0, y_1) \leq c$ である $y_1 \in Y_0$ が存在するので

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i, y_1) \leq c$$

である. 定理 1.2 より

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x,y) \leq c = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x,y).$$

(ii) $\sup_{x \in X} \min_{y \in Y} g(x,y) = c$ とし, $\varepsilon > 0$ とする. $X_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ と n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ で $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となるものに対して, (i) の場合と同様にして

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i, y_1) \leq c + \varepsilon$$

となるような $y_1 \in Y$ が存在する．ここで定理 1.2 を使って

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0} f(x,y) \le c = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

(iii) 任意の有限集合 X_0 に対して，$\max_{x\in X_0} f(x,y)$ は下半連続である．また Y はコンパクトなので $\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y) = c$ とすると，$\max_{x\in X_0} f(x,y_0) \le c$ となる $y_0 \in Y$ が存在する．そこで

$$\bigcap_{x\in X}\{y\in Y; f(x,y)\le c\} \ne \phi.$$

よって，

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \le c = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

最後に定理 A を使って非線形非拡大半群の共通不動点定理を証明する．その前に定義を与えておく．

S を semitopological 半群 ($S = \{0,1,2,\ldots\}$ や $S = [0,\infty)$ はその例である) とし，$B(S)$ を S 上の有界実数値関数のつくる Banach 空間とする．X を恒等的に 1 となる関数 e を含む $B(S)$ の部分空間とする．$\mu \in X^*$ が $\|\mu\| = 1 = \mu(e)$ を満たすとき，μ を X 上の mean という．$\mu \in X^*$ が X 上で mean であるための 必要十分条件は，

$$\inf\{f(s) : s\in S\} \le \mu(f) \le \sup\{f(s) : s \in S\} \quad (\forall f \in X)$$

が成り立つことであることはよく知られている．X 上の実数値関数μ はつぎの 4 つの条件を満たすとき，X 上の submean といわれる．

(i) $\mu(f+g) \le \mu(f) + \mu(g) \quad (\forall f, g \in X)$;

(ii) $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f) \quad (\forall f \in X, \alpha \ge 0)$;

(iii) $f \le g \quad (f, g \in X) \Longrightarrow \mu(f) \le \mu(g)$;

(iv) constant 関数 c に対しては $\mu(c) = c$ が成り立つ．

明らかに，X 上の mean は X 上の submean である．$\mu(f) = \sup_{s\in S} f(s)$ で定義される X 上の実数値関数は X 上の submean である．submean の概念は最初 Mizoguchi-Takahashi [9] によって導入された．X 上の submean μ と $f \in X$ に対して，$\mu(f)$ を時々 $\mu_t(f(t))$ と書くこともある．$s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して，$B(S)$ の元 $\ell_s f$ と $r_s f$ を

$$(\ell_s f)(t) = f(st), \quad (r_s f)(t) = f(ts) \quad (\forall t \in S)$$

で定義する．X を $B(S)$ の subspace で，$e \in X$, $\ell_s(X) \subset X$ $(\forall s \in S)$ となるものとする．このとき X 上の submean μ が

$$\mu(f) = \mu(\ell_s f) \quad (\forall s \in S, f \in X)$$

を満たすなら, μ は X 上で left invariant であるといわれる. X 上の left invariant mean はもちろん X 上の left invariant submean であり, semitopological 半群が left reversible (S の任意の 2 つの closed right ideals がつねに共通部分をもつ) であるとき,

$$\mu(f) = \inf_s \sup_{s \leq t} f(t) \quad (\forall f \in X)$$

で定義される X 上の実数値関数 μ は X 上の left invariant submean である.

S を semitopological 半群とし, C を Banach 空間 E の閉で凸な部分集合とする. このとき, C 上で定義され, C に値をとる写像の族 $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ が次の 3 つの条件をみたすとき C 上で nonexpansive 半群 であるといわれる.

(i) $T_{st}x = T_sT_tx \quad (\forall s, t \in S, x \in C)$;

(ii) 任意の $x \in C$ に対して, $s \mapsto T_sx$ は連続である;

(iii) 任意の $s \in S$ に対して,

$$\|T_sx - T_sy\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C)$$

をみたす.

C 上の nonexpansive 半群 $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ に対して, $F(\mathcal{S})$ で写像 $T_s (s \in S)$ の共通不動点集合を表す. semitopological 半群 S に対して, $C(S)$ で S 上の有界連続関数全体のつくる Banach 空間を表し, $RUC(S)$ で S 上の有界右一様連続全体のつくる $C(S)$ の closed subalgebra を表す. すなわち,

$$RUC(S) = \{f \in C(S) : s \mapsto r_sf \text{ が連続 }\}$$

である. 今や定理 A を用いて, nonexpansive 半群の共通不動点定理を述べることができる.

定理 2.2. S を semitopological 半群とし, C を Banach 空間 E の弱コンパクトで正規構造をもつ凸集合とする. $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C 上の nonexpansive 半群とし, $RUC(S)$ は left invariant submean をもつものとする. このとき $F(\mathcal{S})$ は空でない. すなわち,

$$T_sz = z \quad (\forall s \in S)$$

となる T_s $(s \in S)$ の共通不動点 $z \in C$ が存在する.

証明には, 定理 A とつぎの補助定理が本質的に用いられる.

補助定理 2.3. Banach 空間 E の閉凸集合 C が正規構造をもつための必要十分条件は, C が, ある $c > 0$ に対して

$$\|x_n - x_m\| \leq c, \quad \|x_{n+1} - \overline{x}_n\| \geq c - \frac{1}{n^2} \quad (\forall n \geq 1, \ m \geq 1)$$

となるような点列 $\{x_n\}$ を含まないことである. ただし, $\overline{x}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ である.

定理 2.2 の証明の概略　$x, y \in C$ とするとき,

$$h(t) = \|T_t x - y\| \quad (\forall t \in S)$$

で定義される関数 h は $RUC(S)$ の元である. U を

$$U = \{M \subset C : M \neq \phi,\ 閉, 凸, T_s(M) \subset M\ (\forall s \in S)\}$$

とするとき, ツオルンの補題より U の極小元 K の存在がわかる. K の直径を $\delta(K) > 0$ とし, μ を $RUC(S)$ 上の left invariant submean とする. このとき, 任意の $x \in K$ に対して,

$$A_x = \{z \in K : \mu_t\|T_t x - z\| = \min_{y \in K} \mu_t\|T_t x - y\|\}$$

で定義される集合 A_x は, 空でなく, T_s- 不変な閉凸集合である. K の極小性より $A_x = K$ である. いま任意の $\varepsilon > 0$ と$\sigma = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset K$ に対して,

$$h_i(u) = \|u - x_i\| \quad ({}^\forall u \in K, i = 1, 2, \ldots, n)$$

を定義する. 定理 A を使うと

$$D_\sigma = \{z \in K : h_i(z) \leq \rho_0 + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\} \neq \phi$$

となる. ただし $\rho_0 = \min_{y \in K} \mu_t\|T_t x - y\|$ である. 実際, $A_x = K$ なので $\mu_t\|T_t x - x_i\| = \rho_0$ である. そこで$\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ となる $\{\lambda_i\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \mu_t(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\|T_t x - x_i\|) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_t\|T_t x - x_i\| \\ &= \rho_0 < \rho_0 + \varepsilon \end{aligned}$$

から, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\|T_{t_0} x - x_i\| \leq \rho_0 + \varepsilon$ となるような $t_0 \in S$ が存在する. そこで

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(T_{t_0} x) \leq \rho_0 + \varepsilon$$

である. ここで定理 A を使うと

$$h_i(z) \leq \rho_0 + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる $z \in K$ が存在する. だから

$$D = \{z \in K : \|x - z\| \leq \rho_0 + \varepsilon \quad ({}^\forall x \in K)\} \neq \phi$$

となる. これから

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \min_{y \in K} \mu_t\|T_t x - y\| \\ &\leq \min_{y \in K} \sup_t \|T_t x - y\| \\ &\leq \min_{y \in K} \sup_{z \in K} \|z - y\| \leq \rho_0 + \varepsilon \end{aligned}$$

を得, $\varepsilon > 0$ は任意なので

$$\rho_0 = \inf_{y\in K} \sup_{z\in K} \|z-y\|$$

を得る. そこで, 任意の $x, y \in K$ に対して

$$\rho_0 = \mu_t \|T_t x - y\|$$

となる. あとは μ の性質を使って

$$\|x_n - x_m\| \leq \rho_0, \quad \|x_{n+1} - \overline{x_n}\| \geq \rho_0 - \frac{1}{n^2}$$

をみたすような K の点列 $\{x_n\}$ を構成する. 補助定理 2.3 から K が正規構造をみたさないことになり矛盾を得る.

定理 2.2 は Lim の定理 [8] と Takahashi-Jeong の定理 [21] を同時に拡張するものである. また この定理は, 第 1 回の「Fixed Point Theory and Applications」の国際会議(フランス)で, 未解決問題の 1 つとして提示されたものを, 肯定的に解くものである.

REFERENCES

1. F. E. Browder, *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann., 177 (1968), 283-301.
2. K. Fan, *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), 42-47.
3. K. Fan, *Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations*, Math. Z., 68 (1957), 205-217.
4. A. T. Lau, *Amenability and fixed point property for semigroup of non-expansive mappings*, in Fixed Point Theory and Applications (M. A. Théra and J. B. Baillon Eds.), Pitman Research Notes in Mathematics Series #252, 1991, 303-313.
5. A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 5 (1995), 39-57.
6. A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant submeans and semigroups of nonexpansive mappings on Banach spaces with normal structure*, J. Functional Analysis, 142 (1996), 79-88.
7. T. C. Lim, *A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 53 (1974), 484-493.
8. T. C. Lim, *Characterization of normal structure*, Proc. Amer. Math. Soc., 43 (1974), 313-319.
9. N. Mizoguchi and W. Takahashi, *On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69-80.
10. K. Sakamaki and W. Takahashi, *Systems of convex inequalities and their applications*, J. Math. Anal. Appl., 70 (1979), 445-459.
11. N. Shioji and W. Takahashi *Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications*, J. Math. Anal. Appl., 135 (1988), 383-398.
12. S. Simons, *Minimax and variational inequalities. Are they of fixed point or Hahn-Banach type?*, Game Theory and Mathematical Economics, North Holland Publishing Company, 1981, 379-387.
13. W. Takahashi, *Fixed point theorem for amenable semigroups of non-expansive mappings*, Kodai Math. Sem. Rep., 21 (1969), 383-386.
14. W. Takahashi, *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems*, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.
15. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

16. W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.
17. W. Takahashi, *Fixed point, Minimax and Hahn-Banach theorems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Amer. Math. Soc., 45 (1986), 417-427.
18. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 55-58.
19. W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)*, Kindai-kagakusha, Japan, 1988.
20. W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Canadian J. Math., 44 (1992), 880-887.
21. W. Takahashi and D. H. Jeong, *Fixed Point theorem for nonexpansive semigroups on Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), 1175-1179.