数理解析研究所講究録
979巻 1997年 80-98

Ozeki's inequality について

富山大教育 泉野佐一 (Saichi Izumino)
大阪教育大附属高校 瀬尾祐貴 (Yuki Seo)

1. 序. H. Umegaki [9] によって提唱された noncommutative probability theory の見地から, J. I. Fujii により Hilbert 空間の bounded operator $A, B \in B(H)$ に対して, その (unit vector $x \in H$ に関する) covariance $Cov(A, B)$ は

$$Cov(A, B) = (B^*Ax, x) - (Ax, x)(B^*x, x)$$

と, また, A の variance $Var(A)$ は

$$Var(A) = \|Ax\|^2 - |(Ax, x)|^2$$

と定義された. Fujii-Furuta-Nakamoto-Takahasi [1] はこれら covariance, variance の間の基本的な関係として

定理 A ([1]). $|Cov(A, B)|^2 \leqq Var(A)\, Var(B)$.

なる不等式を示した。$A \in B(H)$ が selfad のとき, $Var(A)$ について,

定理 B (F. Kubo [1]). $m \leqq A \leqq M$ のとき,

(1.1) $$\mathrm{Var}(A) \leqq \frac{1}{4}(M-m)^2$$

が成り立つことから, これと定理 A から, 次が導かれた。

定理 C ([1]). $A, B \in B(H)$ が selfad で

$$m_1 \leqq A \leqq M_1, \quad m_2 \leqq B \leqq M_2$$

のとき, 任意の unit vector $x \in H$ に対して,

(1.2) $$|(Ax,x)(Bx,x)-(ABx,x)| \leqq \frac{1}{4}(M_1-m_1)(M_2-m_2).$$

この (1.2) は Kantrovich inequality など, すでに知られた多くの作用素不等式を導き出す道具として有用なことも [1] で示された。

ところで, 標題の Ozeki's inequality であるが, これは Cauchy's inequality を精密化したもので, Ozeki [7] で示された次のようなものである:

定理 D ([6], [7]). $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,\cdots,b_n)$ は n 次実 vector で,

$$0<m_1 \leqq a_k \leqq M_1, \quad 0<m_2 \leqq b_k \leqq M_2 \quad (k=1,\cdots,n)$$

を満たすとき, 次のことが成り立つ.

(1.3) $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqq \frac{n^2}{4}(M_1M_2 - m_1m_2)^2.$

いま，n 次 matrix A, B，n 次 vector x を，それぞれ

$$A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n), \qquad B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n),$$
$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

とおくとき，A, B は selfad, x は unit vector で，

(1.4) $\quad 0 \leqq m_1 \leqq A \leqq M_1, \quad 0 \leqq m_2 \leqq B \leqq M_2$

を満たし，(1.3) は，次の (1.5) の形に書き直すことができる。

(1.5) $\quad (A^2x, x)(B^2x, x) - (ABx, x)^2 \leqq \frac{1}{4}(M_1M_2 - m_1m_2)^2.$

（正確には (1.5) は (1.3) の両辺を n^2 で割ったもの。）

この (1.5) は先の定理C (1.2) によく似ております。(1.5) が一般の selfad な (1.4) を満たす A, $B \in B(H)$ に対して成り立つであろうかという問題が考えられるわけです。さらにまた，(1.5) が成り立てば，$B=1$ (identity operator) とおいて，定理B (1.1) が得られるはずというわけです。

しかしながら，そんなに具合よくはいきません。実は，(1.5) は一般には成り立ちません。

Counterexample（$n=3$ の場合）

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

とすると，

$$(A^2x,x)(B^2x,x)-(ABx,x)^2=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}(M_1M_2-m_1m_2)^2=\frac{1}{4}$$

となります。そればかりか，(1.3)も成り立ちません。実際

$$a=A(\sqrt{3}x)=(1,1,0)^t,\qquad b=B(\sqrt{3}x)=(0,1,1)^t$$

として，

$$\sum_{k=1}^{3}a_k^2\sum_{k=1}^{3}b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{3}a_kb_k\right)^2=3>\frac{3^2}{4}(M_1M_2-m_1m_2)^2=\frac{9}{4}$$

となります。

本報告では，Ozeki's inequality (1.3) の修正として，

(1.6) $$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqq\frac{n(n-1)}{2}(M_1M_2-m_1m_2)^2$$

や，Ozeki [7] の original idea に基づいてこれを精密化した

(1.7) $$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqq\frac{n^2}{3}(M_1M_2-m_1m_2)^2$$

などを示すとともに，これらの不等式の operator version について，二，三の結果を記したい。

2. Ozeki's inequality の修正, operator version I, n次実 vector に関して, 次はよく知られている。

補題 2.1. $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,\cdots,b_n)$ のとき,

$$T\left(= T(a,b)\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{1\leqq i<j\leqq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

上の補題から, (1.5) に代って, 次が容易に得られる。

定理 2.2 ([3]). $0\leqq m_1 \leqq a_k \leqq M_1$, $0\leqq m_2 \leqq b_k \leqq M_2$ のとき,

$$(2.1)\qquad T(a,b) \leqq \frac{n(n-1)}{2}(M_1M_2 - m_1m_2)^2$$

先の定理B, C を用いると, (2.1) の operator version として, 次の定理を得る。

定理 2.3 ([3]). $A, B \in B(H)$ は selfadj, $AB=BA$,

$$0\leqq m_1 \leqq A \leqq M_1,\quad 0\leqq m_2 \leqq B \leqq M_2$$

を満たすとき, 任意 unit vector $x\in H$ に対して,

$$(2.2)\qquad (A^2x,x)(B^2x,x) - (ABx,x)^2 \leqq \frac{1}{2}(M_1M_2 - m_1m_2)^2.$$

証明. $m_1^2 \leqq A^2 \leqq M_1^2$, $m_2^2 \leqq B^2 \leqq M_2^2$, $m_1 m_2 \leqq AB \leqq M_1 M_2$ であるから,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\leqq \left|(A^2x,x)(B^2x,x)-(A^2B^2x,x)\right| \\ &\qquad + \left|((AB)^2x,x)-(ABx,x)^2\right| \\ &\leqq \frac{1}{4}(M_1^2-m_1^2)(M_2^2-m_2^2)+\frac{1}{4}(M_1M_2-m_1m_2)^2 \\ &\leqq \frac{1}{2}(M_1M_2-m_1m_2)^2. \end{aligned}$$

3. Ozeki の original idea による Ozeki's inequality の改良.

先の定理 2.2 の不等式 (2.1) は, 次のように改良される。

定理 3.1. $0 \leqq m_1 \leqq a_k \leqq M_1$, $0 \leqq m_2 \leqq b_k \leqq M_2$ のとき,

$$T(a,b) \leqq \frac{n^2}{3}(M_1M_2-m_1m_2)^2. \tag{3.1}$$

この定理の証明のため, Ozeki [7] で用いられる idea に対応する次の補題 3.2, 3.3 を準備する。

補題 3.2. $T(a,b)$ は a, b について, separately convex である。つまり, 次の二不等式が成り立つ。

- $T(\lambda a'+(1-\lambda)a'', b) \leqq \lambda T(a',b)+(1-\lambda)T(a'',b)$ $\quad(0 \leqq \lambda \leqq 1)$.
- $T(a, \mu b'+(1-\mu)b'') \leqq \mu T(a,b')+(1-\mu)T(a,b'')$ $\quad(0 \leqq \mu \leqq 1)$.

補題 3.3 ([2]). $\underline{a}=(\underline{a}_1,\cdots,\underline{a}_n)$, $\overline{b}=(\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_n)$ をそれぞれ $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,\cdots,b_n)$ の decreasing order, increasing order による rearrangement とする。このとき,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqq \sum_{k=1}^{n} \underline{a}_k \overline{b}_k, \text{ したがって } T(a,b) \leqq T(\underline{a},\overline{b}).$$

定理 3.1 の証明. まず, convex function は, その最大値を定義凸領域の端点 extreme point でとる (cf. [5]). n 次元 cube $[m,M]^n$ の端点は, その座標を $(x_1,\cdots,x_n)$ としたとき, 各成分 x_k について, $x_k=m$ または M となることに注意する。したがって, 補題 3.2, 3.3 から, $T(a,b)$ の最大値をとる点 $(a,b)\in[m_1,M_1]^n\times[m_2,M_2]^n$ として,

$$(3.2)\begin{cases} a=(\overbrace{M_1,\cdots,M_1}^{s},\overbrace{m_1,\cdots,m_1}^{n-s}) & (0\leqq s\leqq n) \\ b=(\overbrace{m_2,\cdots,m_2}^{t},\overbrace{M_2,\cdots,M_2}^{n-t}) & (0\leqq t\leqq n) \end{cases}$$

のような形のものを調べればよいことになる ([7])。

便宜上, $M_1=M_2=1$, $m_1=\alpha$, $m_2=\beta$ とおく。そこで, $T(a,b)$ の値を計算しよう。

Case I: $0\leqq t\leqq s\leqq n$. この場合, (3.2) を書き直して,

$$a = (\overbrace{1,\cdots,1}^{t},\ \overbrace{1,\cdots,1}^{s-t},\ \overbrace{\alpha,\cdots,\alpha}^{n-s})$$

$$b = (\overbrace{\beta,\cdots,\beta}^{t},\ \overbrace{1,\cdots,1}^{s-t},\ \overbrace{1,\cdots,1}^{n-s})$$

とする。いま，番号の集合 $\{1, \cdots, n\}$ を次のように3つに分ける。

$$P = \{1, \cdots, t\},\quad Q = \{t+1, \cdots, s\},\quad R = \{s+1, \cdots, n\}.$$

また，

$$\Delta := \{(i, j)\ ;\ 1 \leqq i < j \leqq n\}$$

を，次の6つの部分に分ける。

$$\Delta \cap P\times P,\qquad \Delta \cap P\times Q,\qquad \Delta \cap P\times R,$$
$$\Delta \cap Q\times Q,\qquad \Delta \cap Q\times R,\qquad \Delta \cap R\times R.$$

こうすると，

$$T\,(=T(a, b)) = \sum_{(i,j)\in\Delta} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$
$$= \sum_{\Delta\cap P\times P} + \sum_{\Delta\cap P\times Q} + \cdots + \sum_{\Delta\cap R\times R}$$

である。ところが簡単な計算から

$$\sum_{\Delta\cap P\times P} = \sum_{\Delta\cap Q\times Q} = \sum_{\Delta\cap R\times R} = 0$$

がわかる。また，

$$\sum_{\Delta\cap P\times Q} = t(s-t)(1-\beta)^2,$$

$$\sum_{\Delta\cap P\times R} = t(n-s)(1-\alpha\beta)^2,$$

$$\sum_{\Delta \cap Q \times R} = (s-t)(n-s)(1-\alpha)^2$$

が得られる。よって，

(3.3) $T = t(s-t)(1-\beta)^2 + t(n-s)(1-\alpha\beta)^2 + (s-t)(n-s)(1-\alpha)^2.$

Case II：$0 \leqq s \leqq t \leqq n$。この場合も Case I と同様の方法により，次を得る。

(3.4) $T = s(t-s)(\beta-\alpha\beta)^2 + s(n-t)(1-\alpha\beta)^2 + (t-s)(n-t)(\alpha-\alpha\beta)^2.$

そこで，Tの評価式を作ることであるが，Case I で，$0 \leqq 1-\alpha$，$1-\beta \leqq 1-\alpha\beta$ なることから，まず

$$T \leqq \{t(s-t) + t(n-s) + (s-t)(n-s)\}(1-\alpha\beta)^2$$

を得る。3つの実数 x, y, z についての不等式

$$xy + yz + zx \leqq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$$

（等号は $x = y = z$ のとき）

を利用すると，

(3.5) $$T \leqq \frac{1}{3}\{t + (s-t) + (n-s)\}^2(1-\alpha\beta)^2 = \frac{1}{3}n^2(1-\alpha\beta)^2$$

を得る。Case II についても同じ不等式 (3.5) を得る。

Case I において，$\alpha = \beta = 0$ のとき，(3.5) の等号が成り

立つのは $t=s-t=n-s$ のとき，つまり，$t=\frac{n}{3}$，$s=\frac{2n}{3}$ のときとなる。したがって，n が 3 の倍数（例えば $n=3\nu$ のとき，$t=\nu$，$s=2\nu$）のとき，T は最大値 $\frac{n^2}{3}$ をとる。先の counterexample $a=(1,1,0)$，$b=(0,1,1)$ は，ちょうど $n=3$，$\nu=1$ のときに他ならない。

n が 3 の倍数であるか否かを考えて，定理 3.1 は次のように精密化される。

定理 3.4.（定理 3.1 と同じ条件の下で）

$$(3.6)\qquad T \leqq \begin{cases} \dfrac{n^2}{3}(M_1M_2-m_1m_2) & \text{if } n=3\nu, \\ \dfrac{n^2-1}{3}(M_1M_2-m_1m_2) & \text{if } n=3\nu\pm 1. \end{cases}$$

上の (3.6) の $n=3\nu\pm1$ の場合であるが，Case I で $\alpha=\beta=0$ とおいて (3.3) から得られる

$$S:=t(s-t)+t(n-s)+(s-t)(n-s)$$

が，$0\leqq t\leqq s\leqq n$（s，t 整数）の条件の下で最小値 $\frac{n^2-1}{3}$ をもつことからわかる。

次に，$\gamma=\max\{\alpha,\beta\}$ とおくと，

$$1-\gamma \leqq 1-\alpha,\ 1-\beta \leqq 1-\alpha\beta$$

であり，このことを用いて（3.3），(3.4）のTの値を評価すると，次の不等式を導くことができる。

(3.7) $$T \leqq \frac{n^2}{12}(1-\gamma)^2 + \frac{n^2}{4}(1-\alpha\beta)^2.$$

これから，次の結果が得られる。

定理 3.5.（定理3.1と同じ条件の下で）

$\mu = \max\left\{\frac{m_1}{M_1}, \frac{m_2}{M_2}\right\}$ とするとき，

$$T \leqq \frac{n^2}{12} M_1^2 M_2^2 (1-\mu)^2 + \frac{n^2}{4}(M_1M_2 - m_1m_2)^2.$$

上の不等式で，$\mu = 1$，例えば $b_1 = \cdots = b_n = 1$ とすると

$$T \leqq \frac{n^2}{4}(M_1 - m_1)^2$$

を得る。これは variance inequality（の n^2倍したもの）に他ならない。

先に，(3.3)（及び (3.4)）で得られた $T = T(s, t)$ の精密な評価を与えるものとして，次のことがいえる。

定理 3.6.（定理3.1と同じ条件の下で）

$\alpha = \frac{m_1}{M_1}$，$\beta = \frac{m_2}{M_2}$ とするとき，

$$T \leqq \begin{cases} \dfrac{n^2 M_1^2 M_2^2 (1-\alpha\beta)^2}{\{4-(1+\alpha)(1+\beta)\}(1+\alpha)(1+\beta)} & \\ & \text{if } (1+\alpha)(1+\beta) \leqq 2, \\ \dfrac{n^2 M_1^2 M_2^2}{4}(1-\alpha\beta)^2 & \text{if } (1+\alpha)(1+\beta) \geqq 2 \end{cases}$$

略証。例えば Case I（$0 \leqq t \leqq s \leqq n$）では，

$$t = x,\quad s-t = y,\quad n-s = z$$

$$(1-\beta)^2 = A,\quad (1-\alpha\beta)^2 = B,\quad (1-\gamma)^2 = C$$

とおく。（$M_1 = M_2 = 1$ とする。）（3.3）から

$$T = Axy + Bxz + Cyz,$$

$$x,\ y,\ z \geqq 0,\quad x+y+z = n$$

の極値（＝最大値）を求める問題となる。x, y, z は整数値をとる変数であるが，連続変数とみれば，これは Lagrange の乗数法を用いて極値が求められる。

$$v = T - \lambda(x+y+z-n) \quad (\lambda \text{は定数})$$

とおいて，$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ から，x, y, z を求めると，

（3.8）　$x = \dfrac{C(A+B-C)}{D}n,\quad y = \dfrac{B(C+A-B)}{D}n,\quad z = \dfrac{A(B+C-A)}{D}n.$

ここで，
$$D = 2AB + 2BC + 2CA - A^2 - B^2 - C^2$$
$$(= \{4-(1+\alpha)(1+\beta)\}(1+\alpha)(1+\beta)(1-\alpha)^2(1-\beta)^2)$$

である。（したがって，$\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ として $D>0$ となる。）

また，$B \geqq A$, $B \geqq C$ から，$x \geqq 0$, $z \geqq 0$ とわかる。

$$y \geqq 0 \Leftrightarrow C+A-B \geqq 0 \Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta) \leqq 2$$

がいえるので，これから，

$(1+\alpha)(1+\beta) \leqq 2$ のとき，(3.8) の x, y, z に対して，Tの最大値として

$$(3.9) \quad T = \frac{ABC}{D} n^2 = \frac{(1-\alpha\beta)^2}{\{4-(1+\alpha)(1+\beta)\}(1+\alpha)(1+\beta)} n^2$$

を得る。したがって，例えば α, β が有理数ならば，nを十分大きくとり，(3.8) の x, y, z が整数になるようにすれば T は (3.9) の値を実際にとることができる。

$(1+\alpha)(1+\beta) \geqq 2$ のとき，このときは，$B-A-C \geqq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} T &= Axy + Bxz + Cyz \\ &= Ax(n-x-z) + Bxz + C(n-x-z)z \\ &= (B-A-C)xz + Ax(n-x) + C(n-z)z. \end{aligned}$$

ところで，
$$xz \leqq \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 \leqq \frac{n^2}{4},$$
$$x(n-x) \leqq \left(\frac{x+n-x}{2}\right)^2 \leqq \frac{n^2}{4},$$
$$(n-z)z \leqq \left(\frac{n-z+z}{2}\right)^2 \leqq \frac{n^2}{4}.$$

したがって，

$$T \leqq (B-A-C)\cdot\frac{n^2}{4} + A\cdot\frac{n^2}{4} + C\cdot\frac{n^2}{4}$$
$$= \frac{n^2}{4}B = \frac{n^2}{4}(1-\alpha\beta)^2.$$

nが偶数のとき，$x = z = \frac{n}{2}$，$y = 0$ とおいて，Tは ちょうど上記 $\frac{n^2}{4}(1-\alpha\beta)^2$ の値をとる。

4. Extensions, operator version II. Ozeki's inequality の拡張と operator version を再考する。まず，

補題4.1. $0 \leqq m_1 \leqq a_k \leqq M_1$, $0 \leqq m_2 \leqq b_k \leqq M_2$, $w_k \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{n} w_k = w$ とするとき，

$$\sum_{k=1}^{n} w_k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} w_k b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k b_k\right)^2 \leqq \frac{w^2}{3}(M_1M_2 - m_1m_2)^2$$

定理4.2. (X, μ)をmeasure space，$\mu \geqq 0$，$\mu(X) = 1$ とする。$f, g \in L^2(\mu)$で，$0 \leqq m_1 \leqq f \leqq M_1$, $0 \leqq m_2 \leqq g \leqq M_2$ とするとき，

$$(4.1) \quad \int f^2 d\mu \int g^2 d\mu - \left(\int fg\, d\mu\right)^2 \leqq \frac{1}{3}(M_1M_2 - m_1m_2)^2.$$

略証. $\{E_1, \cdots, E_n\}$をXの分解，$x_k \in E_k$ とする。補題4.1 から

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)^2 \mu(E_k) \sum_{k=1}^{n} g(x_k)^2 \mu(E_k) - \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) g(x_k) \mu(E_k)\right)^2$$
$$\leqq \frac{1}{3}(M_1 M_2 - m_1 m_2)^2 .$$

そこで分解の極限をとり，(4.1)を得る。

定理 4.3. $A, B \in B(H)$ は selfad，$AB = BA$ で，

$$0 \leqq m_1 \leqq A \leqq M_1, \quad 0 \leqq m_2 \leqq B \leqq M_2$$

のとき，任意の unit vector $x \in H$ に対して，

(4.2) $(A^2 x, x)(B^2 x, x) - (ABx, x)^2 \leqq \frac{1}{3}(M_1 M_2 - m_1 m_2)^2 .$

略証．commuting selfad operators A, B の spectral decomp. については，ある measure $\mu = \mu_x \geqq 0$ が存在して，$\mu([m_1, M_1] \times [m_2, M_2]) = 1$，

$$(A^m B^n x, x) = \int_{m_1}^{M_1} \int_{m_2}^{M_2} s^m t^n \, d\mu$$

がいえる([8])。したがって，先の定理4.2を用いて，(4.2)を導くことができる。

定理4.3の(4.2)は，定理3.1 (3.1)を出発点として導かれたものである。同様の方法により，定理3.5の不等式を出発点として，次の結果が導かれる。

定理4.4.（定理4.3と同じ条件の下で）

$$\mu = \max\left\{\frac{m_1}{M_1}, \frac{m_2}{M_2}\right\}$$

とするとき，

$$(4.3)\quad (A^2x,x)(B^2x,x)-(ABx,x)^2 \leqq \frac{1}{12}M_1^2M_2^2(1-\mu)^2+\frac{1}{4}(M_1M_2-m_1m_2)^2.$$

上の(4.3)において，$B=1$とおくと，

$$(A^2x,x)-(Ax,x)^2 \leqq \frac{1}{4}(M_1-m_1)^2$$

が得られる。これは variance inequality (1.1) に他ならない。

$AB \neq BA$ のとき，定理4.3 (4.2) は必ずしも成り立たない。実際，

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

とすると，

$$(A^2x,x)(B^2x,x)-(ABx,x)^2=110\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}(M_1M_2-m_1m_2)^2=108\frac{1}{3}$$

となり，(4.2) は左辺＞右辺となる。

$AB=BA$ を仮定しない場合については，Kubo-Ando [4] によって導入された operator mean を用いて，一つの不等式を示すことができる。$A, B \geqq 0$ が invertible のとき，

$$A \# B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

と定義する。このとき，次のことがいえる。

定理 4.5. $A, B \in B(H)$ は selfad で

$$0 < m_1 \leqq A \leqq M_1,\quad 0 \leqq m_2 \leqq B \leqq M_2,$$

$$\mu = \max\left\{\frac{m_1}{M_1}, \frac{m_2}{M_2}\right\}$$

とする。このとき，任意の unit vector $x \in H$ に対して，

$$(4.4)\quad (A^2x, x)(B^2x, x) - (A^2 \# B^2 x, x)^2 \leqq \frac{1}{4\mu^2}(M_1M_2 - m_1m_2)^2$$

略証. $C \in B(H)$ で，$0 < m \leqq C \leqq M$ のとき，variance inequality (1,1) から ($\|x\| = 1$ として)，

$$(C^2x, x) - (Cx, x)^2 \leqq \frac{1}{4}(M-m)^2.$$

いま，x を $x/\|x\|$ で置き変えると，

$$(4.5)\qquad (C^2x, x)(x, x) - (Cx, x)^2 \leqq \frac{1}{4}(M-m)^2\|x\|^4$$

を得る。ところで，$\frac{1}{M_1} \leqq A^{-1} \leqq \frac{1}{m_1}$，$m_2^2 \leqq B^2 \leqq M_2^2$ だから

$$\frac{m_2^2}{M_1^2} \leqq A^{-1}B^2A^{-1} \leqq \frac{M_2^2}{m_1^2}$$

これから，$\frac{m_2}{M_1} \leqq (A^{-1}B^2A^{-1})^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{M_2}{m_1}$。そこで (4.5) で，$C$ を $(A^{-1}B^2A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ に，x を Ax に，そして，m を $\frac{m_2}{M_1}$ に，M を $\frac{M_2}{m_1}$ と置き変えて，

$$
\begin{aligned}
(B^2x, x)(A^2x, x) &- (A(A^{-1}B^2A^{-1})^{\frac{1}{2}}Ax, x) \\
&\leqq \frac{1}{4}\left(\frac{M_2}{m_1} - \frac{m_2}{M_1}\right)^2 \|Ax\|^4 \leqq \frac{1}{4} \cdot \frac{(M_1M_2 - m_1m_2)^2}{(m_1/M_1)^2}
\end{aligned}
$$

を得る。AとBを入れ変えて，同様にして

$$
(A^2x, x)(B^2x, x) - (B(B^{-1}A^2B^{-1})^{\frac{1}{2}}Bx, x) \leqq \frac{1}{4} \cdot \frac{(M_1M_2 - m_1m_2)^2}{(m_2/M_2)^2}
$$

を得る。$A^2 \# B^2 = A(A^{-1}B^2A^{-1})^{\frac{1}{2}}A = B(B^{-1}A^2B^{-1})^{\frac{1}{2}}B = B^2 \# A^2$ となることから，求める不等式 (4.4) を得る。

References

1. M. Fujii, T. Furuta, R. Nakamoto and S. Takahashi, Covariance in noncommutative probability, Math. Japon., to appear.
2. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge, 1952.
3. S. Izumino and Y. Seo, On Ozeki's inequality and noncommutative covariance, to appear.
4. F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann. 246 (1980), 205-224.
5. D. London, Rearrangement inequalities involving convex functions, Pacific J. of Math., 34 (1970), 749-753.
6. D. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers,1993.
7. N. Ozeki, On the estimation of the inequalities by the maximum, or minimum values, J. College Arts Ci. Chiba Univ. 5 (1958),199-203.
8. F. Riesz and B.Sz.-Nagy, Functional Analysis, Ungar, New York, 1955.
9. H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, Tohoku Math. J. 6 (1954), 177-181.