数理解析研究所講究録
979巻 1997年 115-119

可換 C*-環上の環準同型写像の構造に関する一考察 (L. Molnar の論文より)

山形大学工学部　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)

我々の目的は、可換 C*-環の環準同型像に関する L. Molnar の最近の結果を紹介し、更に彼の手法を用いて、可換 Banach 環から他の単純可換 Banach 環へのある種の環準同型写像の構造を考察することにある。

L. Molnar [2] は『ρ が可換 C*-環 A から他の可換 C*-環 $\boldsymbol{B}$ への環準同型写像であるとき、その像 $\rho(A)$ が $\boldsymbol{B}$ の Gelfand 空間の点を強分離するような $\boldsymbol{B}$ の部分環を含むなら、ρ は全射である』ことを示し、Gelfand 理論を用いて、『半単純可換 Banach 環が、可換 C*-環の環準同型像であれば、すでにそれは C*-同値である』ことを証明した。我々は彼の手法を用いて、可換 Banach 環から他の半単純可換 Banach 環へのある種の環準同型写像の構造を考察する。

A を Gelfand 空間 Φ_A を持つ可換 Banach 環、B を Gelfand 空間 Φ_B を持つ半単純可換 Banach 環、ρ を次の条件を満たす A から B への環準同型写像とする：

(*) $$\rho(A)\hat{}(\psi) = \boldsymbol{C} \quad (\forall\ \psi \in \Phi_B).$$

此処に "^" は Gelfand 変換を表す。このとき我々は次のような ρ の構造定理を持つ：

Theorem. Suppose A is regular. Then there exist a continuous map $\hat{\rho}$ of Φ_B into Φ_A and a division $\{\Phi_B^0, \Phi_B^1, \Phi_B^2\}$ of Φ_B such that Φ_B^1 and Φ_B^2 are closed, and for each $a \in A$, $\rho(a)\hat{} = \hat{a} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^1, $\rho(a)\hat{} = \bar{\hat{a}} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^2 and $\rho(a)\hat{}(\psi) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)))$ for every $\psi \in \Phi_B^0$ and for some discontinuous ring isomorphism τ_ψ of the complex field $\boldsymbol{C}$ onto itself.

Moreover, if ρ is surjective, then $\hat{\rho}$ is injective, and if A satisfies the following condition (#), then $\hat{\rho}(\Phi_B^0)$ is a finite set:

(#) For any $\lambda_n \in \boldsymbol{C}$ with $|\lambda_n| \leq 1/2^n\ (n = 1, 2, \ldots)$ and $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subseteq \Phi_A$ such that each φ_n is an isolated point in $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, there exists an element $a \in A$ such that $\hat{a}(\varphi_n) = \lambda_n\ (n = 1, 2, \ldots)$.

注意：もし A が条件 (#) を満たす正則環で、ρ が全射であれば、Φ_B^0 は有限集合となり、従って Φ_B^1 及び Φ_B^2 は閉開集合となる。

定理を証明するにはいくつかの補題が必要である。我々は Molnar の手法を一部応用する。

Lemma 1. $\mathrm{Ker}(\rho)$ is a closed algebra ideal of A.

証明。$\mathrm{Ker}(\rho)$ の閉包から任意に元 a を選ぶと、

(1) $$\rho(a)\hat{}(\psi)\,\rho(x)\hat{}(\psi) \neq 1\ (\forall\psi \in \Phi_B, \forall x \in A)$$

が成り立つ。実際任意の $x \in A$ に対して、ax も $\mathrm{Ker}(\rho)$ の閉包に属するから、$\|ax - y\| < 1$ なる $y \in \mathrm{Ker}(\rho)$ を選び、$z = \sum_{n=1}^{\infty}(ax-y)^n$ とおくと、$zax - zy = z - (ax - y)$ が成り立つので、$(\rho(z)+1)\rho(a)\rho(x) = \rho(z)$ が従う。それ故望む (1) 式が得られる。そこでもし、$\rho(a) \neq 0$ とすると、B の半単純性から、$\rho(a)\hat{}(\psi_0) \neq 0$ なる $\psi_0 \in \Phi_B$ が存在する。しかし (*) から $\rho(x_0)\hat{}(\psi_0) = \dfrac{1}{\rho(a)\hat{}(\psi_0)}$ なる $x_0 \in A$ を選ぶことができるので、これは (1) 式に反する。それ故 $\mathrm{Ker}(\rho)$ の閉性が示された。

次に $x \in \mathrm{Ker}(\rho)$, $\lambda \in C$ とする。$\lim_{n\to\infty} \alpha_n + i\beta_n = \lambda$ なる有理数の列 $\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots\}$ を選ぶと、

$$\left|\alpha_n x + i\beta_n x - \lambda x\right| \to 0\ (n \to \infty)\ かつ\ \alpha_n x, \beta_n x \in \mathrm{Ker}(\rho)\ (n = 1, 2, \ldots)$$

である。しかし $\rho(i\beta_n x)^2 = -\rho(\beta_n x)^2 = 0$ であるから、B の半単純性より $\rho(i\beta_n x) = 0$ を得る。それ故 $\alpha_n x + i\beta_n x \in \mathrm{Ker}(\rho)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となり、このことと前半の事実から $\lambda x \in \mathrm{Ker}(\rho)$ が導かれるため、$\mathrm{Ker}(\rho)$ が algebra ideal であることが示された。

証明終

Lemma 2. There exist a continuous map $\hat{\rho}$ of Φ_B into Φ_A such that

$$\rho(a)\hat{}(\psi) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)))\ (a \in A)$$

for every $\psi \in \Phi_B$ and some ring isomorphism τ_ψ of C onto itself.

証明。$\psi \in \Phi_B$ を任意に固定する。このとき、$\rho_\psi(a) = \rho(a)\hat{}(\psi)$ $(a \in A)$ で定義される ρ_ψ は (*) から A から C の上への環準同型写像となる。そこで、Lemma 1 で B を C, ρ を ρ_ψ と思うと、必然的に (*) が満たされ、従って $\mathrm{Ker}(\rho_\psi)$ は A の閉 algbera ideal であり、$A/\mathrm{Ker}(\rho_\psi)$ と C は環同型となる。このようにして $A/\mathrm{Ker}(\rho_\psi)$ は単位的可換 Banach 環となり、従って $A/\mathrm{Ker}(\rho_\psi)$ から C の上への代数準同型写像 η が存在する。そこで、A から $A/\mathrm{Ker}(\rho_\psi)$ への標準写像と η の合成を φ とおくと、$\varphi \in \Phi_A$ であり、$\mathrm{Ker}(\rho_\psi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ となっている。しかし C は環としても単純であるから、$\mathrm{Ker}(\rho_\psi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ でなければならない。勿論このような $\varphi \in \Phi_A$ は $\psi \in \Phi_B$ に対して唯一つであり、これを $\hat{\rho}(\psi)$ で表すことにする。以上を図で示すと、

$$
\begin{array}{ccccccc}
C & \cong & A/\mathrm{Ker}(\hat{\rho}(\psi)) & = & A/\mathrm{Ker}(\rho_\psi) & \cong & C \\
\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)) & \leftrightarrow & a+\mathrm{Ker}(\hat{\rho}(\psi)) & = & a+\mathrm{Ker}(\rho_\psi) & \leftrightarrow & \rho(a)\hat{}(\psi)
\end{array}
$$

3for each $a \in A$. ただし前者は代数同型、後者は環同型である。従って上の対応を τ_ψ と置けば欲しい結果を得る。証明終

Lemma 3. If A is regular, then $\hat{\rho}$ is continuous on Φ_B .

証明。$\psi \in \Phi_B$ を任意に固定し、$\{\psi_\lambda\}$ を ψ に収束する Φ_B のネット、U を $\hat{\rho}(\psi)$ の任意の開近傍とする。従って A の正則性より、$\hat{a}(\hat{\rho}(\psi))=1,\ \hat{a}\mid\Phi_A \setminus U=0$ を満たす $a \in A$ を選ぶことができる。それ故 Lemma 2 から

$$\lim_\lambda \tau_{\psi_\lambda}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\lambda))) = \lim_\lambda \rho(a)\hat{}(\psi_\lambda) = \rho(a)\hat{}(\psi) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi))) = \tau_\psi(1) = 1.$$

従ってある λ_0 が存在して、

$$\tau_{\psi_\lambda}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\lambda))) \neq 0,\ i.\ e.,\ \hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\lambda)) \neq 0 \text{ and so } \hat{\rho}(\psi_\lambda) \in U \ (\forall \lambda \geq \lambda_0)$$

である。このことは $\lim_\lambda \hat{\rho}(\psi_\lambda)) = \hat{\rho}(\psi)$ を意味し、$\hat{\rho}$ は Φ_B 上で連続である。証明終

Lemma 4. If ρ is surjective, then $\hat{\rho}$ is injective.

証明。次の式を満たす $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_B$ が存在したとする：

$$\psi_1 \neq \psi_2,\ \hat{\rho}(\psi_1) = \hat{\rho}(\psi_2)\ (\equiv \varphi \in \Phi_A)\ .$$

このとき $\rho(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_1) \cap \mathrm{Ker}(\psi_2)$ である。実際、$\varphi(a)=0$ とすると、Lemma 2 から、

$$\rho(a)\hat{}(\psi_1) = \tau_{\psi_1}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_1))) = \tau_{\psi_1}(\varphi(a)) = \tau_{\psi_1}(0) = 0$$

が成り立つから、$\rho(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_1)$ を得る。同様に $\rho(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_2)$ も示される。一方 $\psi_1 \neq \psi_2$ であるから、$\mathrm{Ker}(\psi_1) \cap \mathrm{Ker}(\psi_2) \subsetneqq \mathrm{Ker}(\psi_1)$, 従って上のことと併せて

(2) $$\rho(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subsetneqq \mathrm{Ker}(\psi_1)$$

である。また

(3) $$\mathrm{Ker}(\rho) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$$

である。実際、$\rho(a)=0$ とすると、Lemma 2 から、

$$\varphi(a) = \hat{a}(\hat{\rho}(\psi_1)) = \tau_{\psi_1}^{-1}(\rho(a)\hat{}(\psi_1)) = \tau_{\psi_1}^{-1}(0) = 0$$

となるからである。それ故、

$$
\begin{aligned}
C &\cong A/\mathrm{Ker}(\varphi) \quad \text{(algebra iso.)} \\
&\cong (A/\mathrm{Ker}(\rho))/(\mathrm{Ker}(\varphi)/\mathrm{Ker}(\rho)) \quad \text{(algebra iso.) (by (3))} \\
&\cong B/\rho(\mathrm{Ker}(\varphi)) \quad \text{(algebra iso.) (since } \rho \text{ is surjective)} \\
&\supsetneqq \mathrm{Ker}(\psi_1)/\rho(\mathrm{Ker}(\varphi)) \\
&\supsetneqq \{0\} \quad \text{(by (2))}
\end{aligned}
$$

となり、これは C が環としても単純であることに反する。証明終

定理の証明。次の3個の集合を考えよう：

$$\Phi_B^0 = \{\psi \in \Phi_B : \tau_\psi \text{ is discontinuous}\},$$
$$\Phi_B^1 = \{\psi \in \Phi_B : \tau_\psi(\lambda) = \lambda \text{ for all } \lambda \in C\},$$
$$\Phi_B^2 = \{\psi \in \Phi_B : \tau_\psi(\lambda) = \bar{\lambda} \text{ for all } \lambda \in C\}.$$

このとき

$$\Phi_B = \Phi_B^0 \cup \Phi_B^1 \cup \Phi_B^2 \text{ (disjoint union)}$$

であることをみることは易しい。また

『For each $a \in A$, $\rho(a)^\wedge = \hat{a} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^1, $\rho(a)^\wedge = \bar{\hat{a}} \circ \hat{\rho}$ on Φ_B^2 and

$$\rho(a)^\wedge(\psi) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)))$$

for every $\psi \in \Phi_B^0$ and for some discontinuous ring isomorphism τ_ψ of C onto itsel』

であることも、3個の集合の定義と Lemma 2 から明らかである。

さて A は正則と仮定しよう。従って $\hat{\rho}$ は Lemma 3 より連続である。いま Φ_B^1 が閉であることを示す。Φ_B^1 の中のネット $\{\psi_\alpha\}$ が、ある $\psi \in \Phi_B$ に収束したとする。従って

$$\hat{a}(\hat{\rho}(\psi)) = \lim_\alpha \hat{a}(\hat{\rho}(\psi_\alpha)) = \lim_\alpha \rho(a)^\wedge(\psi_\alpha) = \rho(a)^\wedge(\psi) \quad (\forall a \in A)$$

であるから、

$$\tau_\psi(\rho(a)^\wedge(\psi)) = \tau_\psi(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi))) = \rho(a)^\wedge(\psi) \quad (\forall a \in A)$$

が成り立ち、従って条件 (*) から $\tau_\psi(\lambda) = \lambda$ $(\forall \lambda \in C)$ となり、$\psi \in \Phi_B^1$ である。つまり Φ_B^1 が閉であることが分かる。同様に Φ_B^2 の閉性も示される。

最後に A が条件 (#) を満たすしよう。このとき $\hat{\rho}(\Phi_B^0)$ が有限集合であることを示す。今そうでなかったと仮定すると、$\hat{\rho}(\Phi_B^0)$ の中の無限列 $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ を選んできて、各 φ_n が $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ のなかで孤立点であるようにできる。そこで

$$\varphi_n = \hat{\rho}(\psi_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

となるように $\psi_n \in \Phi_B^0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を選んでおく。このとき、各 τ_{ψ_n} は C 上の不連続な自己同型写像であるから、それは C の中の任意の円板を C の中のある非有界な集合の上に移す (cf. [1, Theorem 2, p. 360])。それ故各自然数 n に対して、

$$|\lambda_n| \le \frac{1}{2^n}, \quad |\tau_{\psi_n}(\lambda_n)| \ge n$$

となるようにできる。そこで条件 (#) から、$\hat{a}(\varphi_n) = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となるように $a \in A$ を選べるから、

$$|\rho(a)^\wedge(\psi_n)| = |\tau_{\psi_n}(\hat{a}(\hat{\rho}(\psi_n)))| = |\tau_{\psi_n}(\hat{a}(\varphi_n))| = |\tau_{\psi_n}(\lambda_n)| \ge n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を得る。一方

$$|\rho(a)^\wedge(\psi_n)| \le \|\rho(a)\| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

であるから、これは矛盾する。証明終

問題。条件 (#) はどこまで緩められるであろうか？

参考文献

1. M. Kuczma, An Introduction to The Theory of Functional Equations and Inequalities, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.
2. L. Molnar, The range of a ring homomorphism from a commutative C*-algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 1789-1794.