数理解析研究所講究録
979巻 1997年 15-21

Furuta inequality and its complementary domain

大阪府立桃谷高等学校　亀井栄三郎
Eizaburo Kamei

$\boxed{\text{進化}}$ １９８７年に、古田によって発見された作用素不等式は、その巧妙な証明方法も含め、作用素不等式における歴史的発展として絶賛された。そして今日、それは「フルタ不等式」と呼ばれて定着している。([11],[12])
フルタ不等式は、Hilbert 空間上の正値作用素 A, B に対して、次のように与えられる。

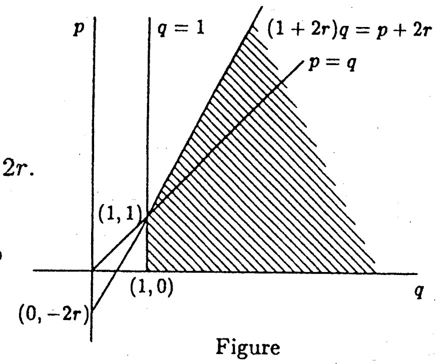
Furuta inequality: If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq (B^r B^p B^r)^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(A^r A^p A^r)^{\frac{1}{q}} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}}$$

hold for p and q such that $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$.



Figure

これは、$r = 0$ と置くことで Löwner-Heinz の拡張となっていることが解る。

Löwner-Heinz inequality: If $A \geq B \geq 0$, then $A^\alpha \geq B^\alpha$ for $\alpha \in [0, 1]$.

我々はフルタ不等式を久保-安藤[19]による作用素平均の観点から見ていく([3],[15],[16])。特にここで使われる作用素平均は、*α-power mean* と呼ばれるもので、Hilbert 空間上の正値作用素 A, B と $\alpha \in [0, 1]$ に対し、次のように与えられる。

$$A \natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$$

α-power mean を用いてフルタ不等式を表すと次のようになる。

$$A^{-2r} \natural_{\frac{1+2r}{p+2r}} B^p \leq A^{-2r} \natural_{\frac{1+2r}{p+2r}} A^p, \qquad \text{for } r \geq 0 \text{ and } p \geq 1.$$

α-power mean を用いたフルタ不等式の証明の中で、我々は次のような結果を得た[16]。

Satellite theorem of the Furuta inequality: If $A \geq B$, then

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B \leq A \leq B^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} A^p$$

for $t \leq 0$ and $p \geq 1$.

更に、古田はフルタ不等式を進化させ、安藤-日合による $log - majorization$ の議論[13]と結びつけ、$grand\ Furuta\ inequality$[16] を創り上げた。

Grand Furuta inequality : If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then for each $t \in [0,1]$, and $p \geq 1$,

$$F_{p,t}(A,B,r,s) = A^{-\frac{r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}A^{-\frac{r}{2}}$$

is a decreasing function of both r and s for any $r \geq t$ and $s \geq 1$, and the following inequality holds:

$$A^{1-t} = F_{p,t}(A,A,r,s) \geq F_{p,t}(A,B,r,s)$$

for any $s \geq 1$,$p \geq 1$ and r such that $r \geq t \geq 0$.

この不等式に於いて、$t=1$,$s=r$ の時、次の安藤-日合の不等式[2]が得られる。

$$A^r \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})^rA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1}{p}}$$

また、$t=0$ の時は、フルタ不等式となることを指摘した。

これに α-*power mean* を用いた証明を与えることで我々は次の結果を得ることに成功した[8]。

Theorem 1. If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then

$$A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq B \leq A$$

for $p \geq 1, s \geq 1$ and $1 \geq t \geq 0$.

ここで $A \natural_s B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^sA^{\frac{1}{2}}, s \in R$ を表し、$s \in [0,1]$ においては $\alpha - power\ mean$ と一致する。

この定理に於いて、

$$F(r,s) = A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq B \leq A$$

と置けば、$F(r,s) = A^{\frac{t}{2}}F_{p,t}(A,B,r,s)A^{\frac{t}{2}}$ となり、$F(r,s)$ が r,s について、*decreasing* であることも解る。

上の定理においては、$A^t \natural_s B^p$ の振る舞いが重要な意味を持つ。次の結果は、これを *operator mean* の枠から自由にしたときの我々の基本定理である。

Theorem 2. If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then for $p \geq 1, s \geq 1$ and $1 \geq t \geq 0$

$$(A^t \natural_s B^p)^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \leq B.$$

これが解ると、フルタ不等式を使うことで次のように定理1の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} & A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \\ = \ & A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \{(A^t \natural_s B^p)^{\frac{1}{(p-t)s+t}}\}^{(p-t)s+t} \\ \leq \ & (A^t \natural_s B^p)^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \leq B \leq A \end{aligned}$$

そこで定理2の証明のために次の2つのlemmaを与えておく。

Lemma 1 (Furuta[13]). Let A and B be positive invertible operators. Then for any real number s,

$$(ABA)^s = AB^{\frac{1}{2}}(B^{\frac{1}{2}}A^2B^{\frac{1}{2}})^{s-1}B^{\frac{1}{2}}A.$$

次の lemma は、Lemma 1 を operator mean の言葉に言い換えたものである。

Lemma 2. Let A and B be positive invertible operators and $A \geq B$. Then for $1 \leq s \leq 2$ and $t \in [0,1]$,

$$A^t \natural_s B^p \leq B^{(p-t)s+t}.$$

Proof of Theorem 2. It is sufficient to show that

$$(A^t \natural_{2^k s} B^p)^{\frac{1}{(p-t)2^k s+t}} \leq B$$

for $1 \leq s \leq 2$ and $k = 1, 2, \ldots$.
Lemma 2 is the case of $k = 0$. Let $p_1 = s(p-t)+t$ and $B_1 = (A^t \natural_s B^p)^{\frac{1}{p_1}}$.
Inductively, put $p_{k+1} = 2^k s(p-t)+t$ and $B_{k+1} = (A^t \natural_{2^k s} B^p)^{\frac{1}{p_{k+1}}}$ for $k = 1, 2, \ldots$.
Then $p_{k+1} = 2(p_k - t)+t$ and

$$B_{k+1} = (A^t \natural_2 (A^t \natural_{2^{k-1}s} B^p))^{\frac{1}{p_{k+1}}} = (A^t \natural_2 B_k^{p_k})^{\frac{1}{p_{k+1}}}.$$

If $B_k \leq A$, then applying Lemma 2,

$$B_{k+1} = (A^t \natural_2 B_k^{p_k})^{\frac{1}{2(p_k-t)+t}} \leq B_k$$

so we have the conclusion by induction.

深化 フルタ不等式における条件「$p \geq 0, r \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$」が best possible であることは、棚橋によって示された[20]。ところが吉野は $r \leq 0$ の場合にもフルタ型の不等式が成り立つ領域があることをことを指摘した[22]。それは、我々の言葉で言えば、次のようになる。

Yoshino. If $A \geq B \geq 0$, then for $1 \leq \frac{1-t}{p-t} \leq 2$ and $0 \leq t \leq 1$,

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A$$

. そこで我々は、これをフルタ不等式の補足領域としてとらえ、まず次のような領域においても同様な結果を得ることができた[5]。

F.F.K. If $A \geq B \geq 0$, then for $2 \leq \frac{1-t}{p-t}$, $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ and $0 \leq t < p$,

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A$$

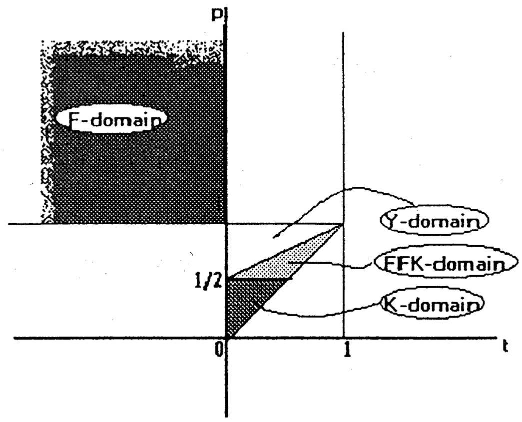
さらに我々はこれらの結果を統合し、拡張した形で次の結果を得た[17]。

Theorem 3. Let $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then
(1) for $0 \leq t < p \leq \frac{1}{2}$,

$$A^t \natural_{\frac{2p-t}{p-t}} B^p \leq B^{2p} \leq A^{2p},$$

(2) for $0 \leq t < p \leq 1$ and $\frac{1}{2} \leq p$,

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B \leq A.$$



更にこれは、次のように一般化される[6]。

Theorem F.F.K. Let $A \geq B \geq 0$ and A is invertible.
(1) If $0 \leq t < p \leq \frac{1}{2}$, then

$$G(\beta) = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{2p}{\beta}}$$

is decreasing for $\beta \geq 2p$. Especially for $\beta = 1$, the following holds;

$$(A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p)^{2p} \leq A^t \natural_{\frac{2p-t}{p-t}} B^p \leq B^{2p} \leq A^{2p}.$$

(2) If $0 \leq t < p \leq 1$ and $\frac{1}{2} \leq p$, then

$$F(\beta) = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}}$$

is decreasing for $\beta \geq 1$. Especially for $\beta = 2p$, the following holds;

$$(A^t \natural_{\frac{2p-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{2p}} \leq A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B \leq A.$$

棚橋の問題[21]: $0 \leq t < p < \frac{1}{2}$ の時、$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A$ は成立するか?

これについて現在解っていることは次までである [14]。

$$(A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p)^{\delta} \leq A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^{\delta} \leq A^{\delta},$$

for $p \leq \delta \leq 2p$.

真価 フルタ不等式の真価は、その応用にある。我々は positive invertible operators A, B に対し、次のような順序を与えることから始める。

Definition. Let A and B be positive invertible operators. If $\log A \geq \log B$, then we denote $A \gg B$ and call the *chaotic* order.

これは、安藤[1] による次の定理を chaotic order としてとらえ直すことである。

Theorem(Ando). Let A and B be positive invertible operators. Then the following are equivalent.
(1) $A \gg B$,
(2) $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}}$, for $p \geq 0$,
(3) $A^{-p} \natural_{\frac{1}{2}} B^p$ is decreasing for $p \geq 1$.

まず、我々は次のように安藤の定理を拡張することができた [4],[7]。

Theorem 4. If A, B are positive and invertible, then $A \gg B$ if and only if for $p \geq 0, t \leq 0$, $A^t \natural_{\frac{-t}{p-t}} B^p \leq I$ holds.

このことから、chaotic order の下でも Satellite Theorem と同様のことが得られる。すなわち、

Corollary. If $A \gg B$, then $A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B$.

更に、$A \geq B$ と $A \gg B$ とを繋ぐ order として $A^\delta \geq B^\delta, \delta \in [0,1]$ を与えることができ、次のような特徴付けが得られる [10]。

Theorem 5. If A, B are positive,invertible and $\delta \in [0,1]$, then $A^\delta \geq B^\delta$ if and only if $A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq A^\delta$ holds for $p \geq \delta$ and $t \leq 0$.

Proof. If $A^\delta \geq B^\delta$, then by using the Furuta inequality,

$$A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p = (A^\delta)^{\frac{t}{\delta}} \natural_{\frac{1-\frac{t}{\delta}}{\frac{p}{\delta}-\frac{t}{\delta}}} (B^\delta)^{\frac{p}{\delta}} \leq B^\delta \leq A^\delta.$$

これらをまとめると $\delta \in [0,1]$ に対して $\delta \longrightarrow +0$ の時次のようになる。

(Furuta inequality)

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B \leq A \leq B^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} A^p$$

(Theorem 5)

$$A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta \leq A^\delta \leq B^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} A^p$$

(chaotic order)

$$A^t \natural_{\frac{-t}{p-t}} B^p \leq 1 \leq B^t \natural_{\frac{-t}{p-t}} A^p$$

また、strictly chaotic order (i.e. $\log A > \log B$) については、最近次のような特徴づけを得ることができた [9]。

Theorem 6. If A, B are positive invertible, then $\log A > \log B$ if and only if there exists an $\alpha \in (0,1]$ such that $A^\alpha > B^\alpha$.

Proof. Assume $\log A > \log B$. Since the function $\frac{x^\alpha - 1}{\alpha}$ is monotone increasing for $\alpha \in [-1,1]$(cf.[18]), we have $\lim_{\alpha \to 0} \dfrac{x^\alpha - 1}{\alpha} = \log x$ uniformly. For $\log A - \log B \geq \epsilon > 0$, there exists α such that $\| \frac{A^\alpha - 1}{\alpha} - \log A \| < \frac{\epsilon}{3}$ and $\| \frac{B^\alpha - 1}{\alpha} - \log B \| < \frac{\epsilon}{3}$.

$$A^\alpha - B^\alpha = \alpha\{(\frac{A^\alpha - 1}{\alpha} - \log A) + (\log A - \log B) + (\log B - \frac{B^\alpha - 1}{\alpha})\}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \alpha\{\epsilon - (\| \frac{A^\alpha - 1}{\alpha} - \log A \| + \| \frac{B^\alpha - 1}{\alpha} - \log B \|)\} \\
&\geq \alpha(\epsilon - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3}) \\
&= \frac{\alpha\epsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

The converse is easy.

chaotic order ($\log A \geq \log B$) の場合は、次のように与えることしかできない。Theorem 6 の形にはならないという反例については、最近の棚橋からの私信によって与えられている。

Corollary 7. For positive invertibleoperators A and B, $A \gg B$ if and only if for any $\delta \in (0,1]$ there exists an $\alpha = \alpha_\delta$ such that $(e^\delta A)^\alpha > B^\alpha$.

参考文献

[1] T.Ando, On some operator inequalities,Math.Ann.,279(1987),157-159.

[2] T.Ando and F.Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities,Linear Algebra Appl.,197,198(1994),113-131.

[3] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach,J.Operator Theory,23(1990),67-72.

[4] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Operator functions associated with Furuta's inequality,Linear Alg. and Its Apll.,149(1991),91-96.

[5] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem,Linear Alg. and Its Apll.,179(1993),161-169.

[6] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Complements to the Furuta inequality,Proc.Japan Acad.,70(1994), Ser.A,239-242.

[7] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Complements to the Furuta inequality III,Math.Japon.,to appear.

[8] M.Fujii and E.Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality,Proc.Amer.Math.Soc., 124(1996),2751-2756.

[9] M.Fujii,J.F.Jiang and E.Kamei, Characterization of chaotic order to Furuta inequality,Proc.Amer. Math.Soc.,to appear.

[10] M.Fujii,J.F.Jiang and E.Kamei, A characterization of orders defined by $A^\delta \geq B^\delta$ via Furuta inequality,Math.Japon.,to appear.

[11] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{(p+2r)}{q}}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$,Proc.Amer.Math.Soc.,101(1987),85-88.

[12] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality,Proc.Japan Acad.,65(1989),126.

[13] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization,Linear Alg. and Its Appl.,219(1995),139-155.

[14] J.F.Jiang and E.Kamei, On mysterious delta zone of complementary domain for the Furuta inequality,preparing.

[15] E.Kamei, Furuta's inequality via operator means,Math.Japon.,33(1988),737-739.

[16] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality,Math.Japon.,33(1988),883-886.

[17] E.Kamei, Complements to the Furuta inequality,II,Math.Japon.,to appear.

[18] E.Kamei, Paths of operators parametrized by operator means,Math.Japon.,39(1994),395-400.

[19] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators,Math.Ann.,246(1980),205-224.

[20] K.Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality,Proc.Amer.Math.Soc.,124(1996),141-146.

[21] K.Tanahashi, The Furuta inequality in case of negative powers,RIMS,903(1995),78-96.

[22] T.Yoshino, Introduction to Operator Theory,Pitman Research Notes in Math.,Ser.,300,Longman Scientific and Technical,1993.