数理解析研究所講究録
979巻 1997年 75-79

Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II

武蔵工大・エ　伊藤隆司 (TAKASHI ITO)

T_N を $N+1$ 次の Toeplitz 行列とする.

$$T_N = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{-N} \\ a_1 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{-(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{-1} \\ a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

ここでは, 正規 $(T_N^* T_N = T_N T_N^*)$ な T_N を問題とする.

正規な Toeplitz 行列 T_N の例として, まず, $N+1$ 次の Hermite 行列 H_N と $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して

$$T_N = e^{i\theta} H_N + \alpha I_N, \quad I_N \text{は} N+1 \text{次の単位行列}, \quad \alpha \text{は複素数}$$

となる場合である. このとき, T_N を I 型と呼ぶことにする. もう一つの例として, $N+1$ 次の Unitary 行列 $U_N(\theta)$ (circulant 行列) に対して

$$U_N(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{i\theta} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_N = p\left(U_N(\theta)\right), \quad p(z) \text{は} N \text{次の多項式}$$

となる場合である. このとき, T_N を II 型と呼ぶことにする.

次のことが成立する.

<u>Theorem</u> 正規 Toeplitz 行列 T_N は I 型か II 型かのいずれかである.

この結果については次のような経緯がある. この事は N が 4 以下のとき, Farenick と Lee によって [1] で示された. $N \geq 5$ の場合は [3] で示された. しかし, [3] と殆んど同時に, 異なる方法で, Farenick, M. Krupnick, N. Krupnick, Lee の 4 者によって [2] でも一般の場合が示された. ここで述べる方法は [3] によるものである. (経緯はもっと複雑のようである. 追記を参照)

最初に述べた I 型, II 型の定義は次のように考えてもよいことは容易にわかる.

T_N が I 型であるとは, ある $\theta(0 \leq \theta < 2\pi)$ が存在して

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \\ \vdots \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \vdots \\ \overline{a}_N \end{bmatrix}$$

となることである. 同様にして, T_N が II 型であるとは, ある $\theta(0 \leq \theta < 2\pi)$ が存在して,

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \\ \vdots \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} a_N \\ a_{N-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}$$

となることである. 以下では, これらを I 型, II 型の定義と考えることにする.

定理の証明は 3 段階に分けられる.

(1) T_N の正規性は, T_N のある種の Toeplitz 部分行列 (Toeplitz 部分行列の定義は後で述べる) にそのまま移る.

(2) T_N が正規のとき, 5 次以下のすべての Toeplitz 部分行列は [1] の結果により I 型か II 型かのいずれかである.

(3) T_N が正規のとき, 5 次以下の Toeplitz 部分行列はすべて同時に I 型か同時に II 型となり, その型がそのまま T_N 自身の型となる.

1. 正規 Toeplitz 行列

まず T_N が正規行列であるための一つの条件を求める. T_N の対角線上の要素 a_0 は T_N の正規性に無関係なので, $a_0 = 0$ と考えてよい. また, T_N を $[a_1, a_2, \cdots, a_N; a_{-1}, a_{-2}, \cdots, a_{-N}]$ と書くことにする.

T_N の self-commutator $[T_N; T_N^*] = T_N T_N^* - T_N^* T_N$ の (i,j)-成分 $\alpha_{i,j}$ を計算すると,

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{N+1} a_{i-k}\overline{a}_{j-k} - \overline{a}_{k-i}a_{k-j} \quad (1 \leq i,j \leq N+1)$$

で与えられる. このことから, 任意の T_N に対して $[T_N; T_N^*]$ は第 2 対角線 (右上隅から左下隅への対角線) に関して skew-symmetric であることがわかる. すなわち,

$$-\alpha_{i,j} = \alpha_{N+2-j,N+2-i} \quad (1 \leq i,j \leq N+1)$$

よって, T_N が正規行列, すなわち $[T_N; T_N^*] = 0$, であることと

$$\alpha_{i+1,j+1} = \alpha_{i,j} \quad (1 \leq i,j \leq N)$$

とは同値になる. この条件を T_N の成分で書き直すことによって, T_N が正規であるための必要かつ十分条件として

$$(*) \quad a_i\overline{a}_j + \overline{a}_{N+1-i}a_{N+1-j} = \overline{a}_{-i}a_{-j} + a_{-(N+1-i)}\overline{a}_{-(N+1-j)} \quad (1 \leq i,j \leq N)$$

が得られる. この $(*)$ からいくつかの事が導かれる. まず,

Proposition 1 T_N を正規行列とする．このとき，
(1) ある $m(1 \leq m \leq N)$ に対して，

$$\begin{bmatrix} a_m \\ a_{-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ かつ } \begin{bmatrix} a_{N+1-m} \\ a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ならば}$$

T_N は I 型である．同様に，
(2) ある $m(1 \leq m \leq N)$ に対して，

$$\begin{bmatrix} a_m \\ a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ かつ } \begin{bmatrix} a_{N+1-m} \\ a_{-m} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ならば}$$

T_N は II 型である．

例えば (1) は，次の様に (*) から導かれる．(*) において，$j = m; a_m = a_{-m} = 0$ とおくと，すべての i について，

$$\overline{a}_{N+1-i}a_{N+1-m} = a_{-(N+1-i)}\overline{a}_{-(N+1-m)}$$

ここで，とくに $i = m$ とし，仮定を用いてると

$$|a_{N+1-m}| = |a_{-(N+1-m)}| > 0$$

故に，すべての i について $a_{-(N+1-i)} = \dfrac{a_{N+1-m}}{\overline{a}_{-(N+1-m)}}\overline{a}_{N+1-i} = e^{i\theta}\overline{a}_{N+1-i}$ となる．すなわち，

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \\ \vdots \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \vdots \\ \overline{a}_N \end{bmatrix}$$

となり，T_N は I 型である．

2. 部分 Toeplitz 行列

もう一つ条件 (*) から導かれることとして，部分行列に関することがある．$\{j_1, j_2, \cdots, j_M\}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_m)$ を $\{1, 2, \cdots, N\}$ の部分集合で，変換：$j \to N+1-j$ で閉じているものとする．すなわち，

$$j_{M+1-m} = N + 1 - j_m \quad (1 \leq m \leq M)$$

このとき，$M+1$ 次の Toeplitz 行列 $[a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_M}; a_{-j_1}, a_{-j_2}, \cdots, a_{-j_M}]$ を単に T_N の Toeplitz 部分行列 と呼ぶことにする．

T_N の正規性を特徴付ける条件 (*) から，次のことが結論される．

Proposition 2
(1) T_N が正規行列ならば，T_N のすべての Toeplitz 部分行列は正規行列である．逆に，
(2) 5 次以下のすべての Toeplitz 部分行列が正規行列ならば T_N 自身正規行列である．

この proposition の (1) が Theorem の証明に本質的に用いられるが, (1) から得られる次のような次数についての reduction も証明の簡単化に役に立つ. すなわち, 正規行列 T_N の型を決めようとするとき, すべての m $(1 \leq m \leq N)$ について

$$\begin{bmatrix} a_m & a_{-m} \\ a_{N+1-m} & a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と仮定してよい. 何故なら, ある m に対して

$$a_m = a_{-m} = a_{N+1-m} = a_{-(N+1-m)} = 0$$

とすると, この 4 要素 (N が odd で $m = \frac{N+1}{2}$ のときは, 2 要素) を除いて出来る Toeplitz 部分行列 (この部分行列の次数は $N-1$ 次または N 次である) はこの proposition の (1) により, また正規行列となる. そして, この部分行列の型が決まれば, その型がそのまま T_N の型となることは明らかである.

3. Theorem の証明

T_N を正規とする. Proposition 2 の (1) により, すべての Toeplitz 部分行列は正規である. とくに, [1] の結果より, 5 次以下の Toeplitz 部分行列は I 型か II 型かのいずれかである. さらに, T_N 自身が I 型か II 型であることを示す前に, 次のことに注意する. 任意の $m\,(1 \leq m \leq N)$ について

$$\begin{bmatrix} a_m & a_{-m} \\ a_{N+1-m} & a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と仮定してよいから, Proposition 1 を考慮すれば

$$\begin{bmatrix} a_m \\ a_{-m} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{かつ} \begin{bmatrix} a_m \\ a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leq m \leq N)$$

である場合だけを考えればよい.

次の Lemma を準備する. その証明は容易である.

Lemma　2 つの 5 次 Toeplitz 部分行列 $(1 \leq m < n < \frac{N+1}{2}, 1 \leq k < l < \frac{N+1}{2})$

$$A = [a_m, a_n, a_{N+1-n}, a_{N+1-m}; a_{-m}, a_{-n}, a_{-(N+1-n)}, a_{-(N+1-m)}]$$
$$B = [a_k, a_l, a_{N+1-l}, a_{N+1-k}; a_{-k}, a_{-l}, a_{-(N+1-l)}, a_{-(N+1-k)}]$$

がともに I 型 (又は II 型) であり, $\{m, n\} \bigcap \{k, l\} = \{r\}$, $\{m, n\} \bigcup \{k, l\} \setminus \{r\} = \{p, q\}$ $(p < q)$ とする. このとき,

$$C = [a_p, a_q, a_{N+1-q}, a_{N+1-p}; a_{-p}, a_{-q}, a_{-(N+1-q)}, a_{-(N+1-p)}]$$

は I 型 (又は II 型) である.

定理の証明の第 3 段階は次のようになる. 以下, N を even とする. (N が odd の場合も議論は殆ど同じである)

$a)$ 次のような 5 次の Toeplitz 部分行列 $(1 < m < \frac{N+1}{2})$

$$A_m = [a_1, a_m, a_{N+1-m}, a_N; a_{-1}, a_{-m}, a_{-(N+1-m)}, a_{-N}]$$

はすべて同時に I 型か同時に II 型である. 何故なら, もしもある m に対して A_m は I 型であるが II 型ではなく, ある n に対して A_n は II 型であるが, I 型ではないとする. このとき, $m < n$ として, Toeplitz 部分行列

$$C = [a_m, a_n, a_{N+1-n}, a_{N+1-m}; a_{-m}, a_{-n}, a_{-(N+1-n)}, a_{-(N+1-m)}]$$

をとると, C は [1] の結果により I 型か II 型かのいずれかである. I 型であるとすると, A_m と C とに Lemma を適用すれば A_n が I 型となり, 仮定に反する. 同様に C が II 型ならば, A_n と C とに Lemma を適用して, A_m が II 型となり, 矛盾が出る.

$b)$ 上の $A_m\,(1 < m < \frac{N+1}{2})$ がすべて同時に I 型 (II 型) ならば T_N は I 型 (II 型) である. 例えば A_m はすべて II 型とすると, $0 \le \theta_m < 2\pi$ が存在して,

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-m} \\ a_{-(N+1-m)} \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta_m} \begin{bmatrix} a_N \\ a_{N+1-m} \\ a_m \\ a_1 \end{bmatrix}$$

よって, とくに, $a_{-1} = e^{i\theta_m} a_N$. しかし, $\begin{bmatrix} a_N \\ a_{-1} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるから $|a_{-1}| = |a_N| > 0$ となり, θ_m は m に無関係に, $e^{i\theta_m} = e^{i\theta} = \frac{a_{-1}}{a_N}$ となる. 故に, すべての m について,

$$a_{-m} = e^{i\theta} a_{N+1-m}, \quad a_{-(N+1-m)} = e^{i\theta} a_m \quad (1 \le m < \frac{N+1}{2})$$

となり, T_N が II 型であることがわかる.

以上

References

[1] D. R. Farenick and W. Y. Lee, *Normal Toeplitz matrices, 1995 manuscript*

[2] D. R. Farenick, M. Krupnick, N. Krupnick and W. Y. Lee, *Normal Toeplitz matrices*, SIAM J. Matrix Anal., **17** No. 4, p.1037–p.1043 (1996)

[3] T. Ito, *Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II*, SIAM J. Matrix Anal., **17** No. 4, p.998–p.1006 (1996)

追記 : ごく最近 (平成 9 年 1 月) のニュースによれば, 同じような結果 (未見なので正確には言えないが) が次の論文 (ロシア語) に発表されているようである.

Kh. D. Ikramov and V. N. Chugunov, Normality condition for a complex Toeplitz matrix, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., **36**(2)(1996), p.3–10 (in Russian). Comput. Math. Math. Phys. **36**(1996), p.131–137.