数理解析研究所講究録
980巻 1997年 35-43



# $C^*$力学系におけるある種のエントロピー函数について

山口大学工学部　村木 尚文 (Naofumi Muraki)

**あらまし** 非可換力学系（$C^*$力学系）の定常状態およびその間の定常チャンネルに対して、ある種のエントロピー型函数 $\tilde{S}$ と $\tilde{I}$ を定義することを試みる。これらは情報理論における entropy rate および information rate のアナロジーのつもりである。函数 $\tilde{S}$ と $\tilde{I}$ に対して Kolmogorov-Sinai 型の収束定理が成立することが示される。

## 1. はじめに

非可換力学系（$C^*$力学系）の時間発展の複雑さを測る量として A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring の dynamical entropy が知られている [CNT] [OhP]。これは可換力学系に対する Kolmogorov-Sinai entropy の非可換拡張になっている。Kolmogorov-Sinai entropy の非可換拡張の試みはいくつか成されているが、それらのうち、Connes-Narnhofer-Thirring の dynamical entropy がもっともよく知られたものである [Emc] [CoS] [Con] [CNT]。これは、$II_1$ 型 von Neumann 代数の自己同型に対して定義された Connes-Størmer の entropy を一般の $C^*$力学系に対して拡張したものである。Connes-Narnhofer-Thirring の dynamical entropy の定義はやや複雑でその直感的意味が解りづらいが、基本的には、同時エントロピー (*joint entropy*) および アーベリアン モデル（*Abelian model*）という方法でエントロピーを定義している。同時エントロピーの方法というのは、代数 $\mathcal{A}$ の有限次元部分代数の組 $A_1$, $A_2, \cdots, A_N \subset \mathcal{A}$（古典論では標本空間 $\Omega$ の有限分割の組 $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \cdots, \tilde{B}_N$ に相当）が生成する代数 $A =< A_1, A_2, \cdots, A_N >$（古典論では生成される有限分割 $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \vee \tilde{B}_2 \vee \cdots \vee \tilde{B}_N$ に相当）が一般には有限次元とはならないため、古典論なら、本来、生成された代数 $A \subset \mathcal{A}$ を用いて有限次元部分代数の組 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ の同時エントロピーを定義すべきところ $((A_1, A_2, \cdots, A_N) \mapsto A \mapsto H(A))$ を、直接、組 $(A_1, A_2, \cdots, A_N)$ に対して同時エントロピーを定義してしまおう $((A_1, A_2, \cdots, A_N) \mapsto H(A_1, A_2, \cdots, A_N))$ というアイデアである [CoS] [CNT]。また、アーベリアン モデルとは、ラフにいうと、非可換な状況を可換な状況に射影して考えよう、というものである [CNT]。

一方、M. Ohya は、量子情報理論の展開のために、合成状態 (*compound state*) と相互エントロピー (*mutual information = mutual entropy*) を導入している [Ohy1]。この合成状態という考えでは、入力状態 $\phi$ とそれをチャンネル $\Lambda^*$ を通して送った出力状態 $\psi = \Lambda^*\phi$ の相関状況を入力系の代数 $\mathcal{A}$ と出力系の代数 $\mathcal{B}$ のテンソル積 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 上の（非自明な）状態 $\Phi$（状態 $\phi$ と状態 $\psi$ の合成状態）として表そうというものである。この（非自明な）合成状態 $\Phi$ は入力状態 $\phi$ の端点分解 $\phi = \int \omega d\mu(\omega)$ を通して実現される。($\Phi = \Phi_\mu$, つまり、

端点分解の仕方 $\mu$ に依存。）ラフにいうと２つのシステム $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の相関状況をテンソル積代数 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 上で（状態 $\phi$ の端点分解 $\mu$ をいろいろと動かすことにより）見よう、というものである。特に、テンソル積代数 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 上で非自明な合成状態 $\Phi_\mu$ と自明な合成状態 $\Phi_0=\phi\otimes\psi$ との差異を相対エントロピー $S(\cdot|\cdot)$ によって測ったもの $S(\Phi_\mu|\Phi_0)$ （の端点分解 $\mu$ に関する sup）を, 状態 $\phi$ から状態 $\psi$ に伝わった情報量と考えようというのが、Ohya の相互エントロピーの考えである。

力学系の理論の立場では、個々の $C^*$力学系の時間発展の様子に興味があるが、情報理論の立場では入力系と出力系の２つの $C^*$力学系の間の情報論的相関に興味がある。情報理論では、入力系の Kolmogorov-Sinai entropy を情報源エントロピー（source entropy）もしくは情報生成速度（entropy rate）といい、入力系から出力系へ伝わる単位時間当たりの情報量を情報伝送速度(information rate)という。よって量子情報理論の展開という立場からは、２つの $C^*$力学系 $(\mathcal{A},\theta_{\mathcal{A}})$ と $(\mathcal{B},\theta_{\mathcal{B}})$ の間の定常チャンネル $\Lambda^*$ （＝完全正単位写像 $\Lambda:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ であって、$\theta_{\mathcal{A}}\circ\Lambda=\Lambda\circ\theta_{\mathcal{B}}$ を満たすような $\Lambda$ の双対 $\Lambda^*$）を通して伝送される information rate というものを論じるのは自然な問題であろう。(ここで $\theta_{\mathcal{A}}$, $\theta_{\mathcal{B}}$ はそれぞれ $C^*$代数 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ の自己同型である。)

本稿では、$C^*$定常チャンネル $\Lambda^*$ と定常入力状態 $\phi$ に対して, entropy rate のアナロジーである函数 $\tilde{S}$ と information rate のアナロジーである函数 $\tilde{I}$ を定義する。函数 $\tilde{S}$ と函数 $\tilde{I}$ の構成は、Connes-Størmer の同時エントロピーの考えと, Ohya の合成状態および相互エントロピーの考えに基づいて行う。後で述べるようにこの函数 $\tilde{S}$ と $\tilde{I}$ に対しては Kolmogorov-Sinai 型の定理が成立することがわかる。

尚、本稿の内容は大矢雅則教授との共同研究である。(詳しくは [MuO] を参照。)

## 2. 完全正単位写像の組に対する函数 $S$ と 函数 $I$

Connes-Størmer のアイデアに従って、まず、$C^*$代数 $\mathcal{A}$ の状態 $\phi$ に関する、有限次元 $C^*$部分代数の組 $A_1,A_2,\cdots A_M\subset\mathcal{A}$ の（ある種の）同時エントロピー $S_\phi(A_1,A_2,\cdots A_M)$、および、有限次元 $C^*$部分代数の組２つ $A_1,A_2,\cdots A_M\subset\mathcal{A}$ と $B_1,B_2,\cdots B_N\subset\mathcal{A}$ の間の（ある種の）同時相互エントロピー $I_\phi((A_1,A_2,\cdots A_M),(B_1,B_2,\cdots B_N))$ を定義することを考えよう。しかし、実際には $C^*$代数は von Neumann 代数と違って十分に多くの有限次元部分代数を持つとは限らない。極端な場合として自明な有限次元部分代数しか持たない $C^*$代数も存在する。しかしそのような場合でも、有限次元部分代数は持たずとも、有限次元代数からの完全正写像を十分に多く持つ場合がある。それは核型 $C^*$代数とよばれるクラスの場合である [CNT]。よって、核型 $C^*$代数の場合を念頭において、“同時エントロピー” $S$ と “同時相互情報量” $I$ を、（有限次元 $C^*$部分代数の組に対してではなく）有限次元 $C^*$代数からの完全正写像の組に対して定義しよう。もちろん、定義は一般の $C^*$代数に対して成され

るが、念頭にあるのは核型 $C^*$代数ということである。２つの函数 $S$ と $I$ を実際に定義する過程において、アーベリアン モデルの代わりに Ohya のアイデアである合成状態と相互エントロピーを用いようというわけである。(テンソル積 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ において、代数 $\mathcal{A}$ と代数 $\mathcal{B}$ は互いに可換となるから、Ohya の合成状態の考え方においても、非可換な状況をある種の可換性を持った状況にマップしていることになる。)

$\mathcal{A}$ を $C^*$代数$(\ni I)$ とし、$\phi$ を $\mathcal{A}$ 上の状態とする。各 $m=1,2,\cdots,M$ に対して、$A_m$ を有限次元 $C^*$代数$(\ni I)$ とし、$\alpha_m : A_m \to \mathcal{A}$ を完全正写像で単位元を保つもの ($\alpha_m(I)=I$) とする。(以下、単位元を持つ $C^*$代数を単位的 $C^*$代数 (unital $C^*$-algebra) といい、単位元を保つ完全正写像を完全正単位写像 (completely positive unital map) という。) また、各 $n=1,2,\cdots,N$ に対して、$B_n$ を有限次元 $C^*$代数$(\ni I)$ とし、$\beta_n : B_n \to \mathcal{A}$ を完全正単位写像 ($\beta_n(I)=I$) とする。単位的 $C^*$代数 $\mathcal{A}$ の状態空間 $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ 上の正則 Borel 確率測度 $\mu$ のうち、Choquet 順序で極大、かつ、状態 $\phi$ を重心としてもつもの ($\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{A})}\omega d\mu(\omega)=\phi$) の全体を $M_+^1(\phi)$ とおく。このような測度 $\mu$ を状態 $\phi$ の極大分解測度という。Choquet の定理より、極大分解測度は常に存在する。単位的 $C^*$代数 $\mathcal{A}$ の状態 $\phi$ の極大分解測度 $\mu$ と、有限次元代数達からの完全正単位写像の組 $\alpha^M=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_M)$ とを用いて、テンソル積代数 $\otimes_{m=1}^M A_m$ 上の状態 $\Phi_\mu(\alpha^M)$ を次のように定める：

$$\Phi_\mu(\alpha^M)=\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{A})}\otimes_{m=1}^M\alpha_m^*\omega d\mu(\omega).$$

この状態 $\Phi_\mu(\alpha^M)$ は、[Ohy1] の意味で、状態 $\alpha_1^*\phi,\alpha_2^*\phi,\cdots,\alpha_M^*\phi$ の合成状態である。即ち, 任意の $x\in A_m$ および単位元 $I\in\otimes_{m'\neq m}A_{m'}$ に対して

$$\Phi_\mu(\alpha^M)(x\otimes I)=\alpha_m^*\phi(x).$$

更に、$\alpha^M\cup\beta^N\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_M,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)$ とおくと、状態 $\Phi_\mu(\alpha^M\cup\beta^N)$ は状態 $\Phi_\mu(\alpha^M)$ と状態 $\Phi_\mu(\beta^N)$ の合成状態である。即ち、任意の $x\in\otimes_{m=1}^M A_m$ および単位元 $I\in\otimes_{n=1}^N B_n$ に対して

$$\Phi_\mu(\alpha^M\cup\beta^N)(x\otimes I)=\Phi_\mu(\alpha^M)(x)$$

であり、かつ、単位元 $I\in\otimes_{m=1}^M A_m$ と任意の $y\in\otimes_{n=1}^N B_n$ に対して

$$\Phi_\mu(\alpha^M\cup\beta^N)(I\otimes y)=\Phi_\mu(\beta^N)(y)$$

である。

有限次元 $C^*$代数達からの完全正単位写像 $\alpha_m : A_m\to\mathcal{A}$, $m=1,2,\cdots,M$, および, $\beta_n : B_n\to\mathcal{A}$, $n=1,2,\cdots,N$, から作った有限列をそれぞれ $\alpha^M=(\alpha_1,\cdots,\alpha_M)$、$\beta^N=(\beta_1,\cdots,\beta_N)$ とし、$\mu$ を $\mathcal{A}$ 上の状態 $\phi$ の極大分解測度とする。このとき函数 $S_\mu(\cdot)$ および

函数 $I_\mu(\cdot,\cdot)$ を次のように定める：

$$S_\mu(\alpha^M) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{A})} S\left(\otimes_{m=1}^M \alpha_m^* \omega | \Phi_\mu(\alpha^M)\right) d\mu(\omega),$$
$$I_\mu(\alpha^M, \beta^N) = S\left(\Phi_\mu(\alpha^M \cup \beta^N) \middle| \Phi_\mu(\alpha^M) \otimes \Phi_\mu(\beta^N)\right).$$

ここで、$S(\cdot|\cdot)$ は H. Umegaki の相対エントロピーを表す [Ume]。即ち、ある有限次元 $C^*$ 代数 $A(\ni I)$ 上の状態 $\omega_1, \omega_2$ に対し、そのトレース Tr に関する密度作用素を $\rho_{\omega_1}$, $\rho_{\omega_2}$ としたとき

$$S(\omega_1|\omega_2) = \mathrm{Tr}\{\rho_{\omega_1}(\log\rho_{\omega_1} - \log\rho_{\omega_2})\}$$

である。相対エントロピー $S(\rho_{\omega_1}|\rho_{\omega_2})$ は $\mathcal{A}$ 上のトレース Tr の選び方によらずに決まる。今定めた函数 $S_\mu$ と $I_\mu$ に対し次の関係式が成立する。

**命題 2.1.** $S_\mu(\alpha^M) + S_\mu(\beta^N) = S_\mu(\alpha^M \cup \beta^N) + I_\mu(\alpha^M, \beta^N).$

これは、情報理論における、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の有限分割 $\tilde{A}$ のエントロピー $H_P(\tilde{A})$、および、2つの有限分割 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ の間の相互エントロピー $I_P(\tilde{A}, \tilde{B})$ との間の基本関係式

$$H_P(\tilde{A}) + H_P(\tilde{B}) = H_P(\tilde{A} \vee \tilde{B}) + I_P(\tilde{A}, \tilde{B})$$

に類似している。([Bil] を参照。)

ここで $C^*$代数 $\mathcal{A}$, $A_m$, $B_n$ $(m = 1, \cdots, M; n = 1, \cdots, N)$ が、皆、可換であり、更に、完全正単位写像 $\alpha_m : A_m \to \mathcal{A}$, $\beta_n : B_n \to \mathcal{A}$ が、皆、部分代数としての埋め込み $\alpha_m = j_{A_m}$, $\beta_n = j_{B_n}$ である場合を考えてみる。このとき、可換 $C^*$代数 $\mathcal{A}(\ni I)$ 上の任意の状態 $\phi$ に対して $\phi$ の極大分解測度 $\mu$ は一意に決まる。$\mathcal{A}$ は純粋状態全体のなすコンパクト ハウスドルフ空間 $\Omega = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ 上の複素数値連続関数の空間 $C(\Omega)$ と同型となり、有限次元部分代数 $A_m$, $B_n$ は $\Omega$ の有限分割 $\tilde{A_m}$, $\tilde{B_n}$ を導く。そして、本節で定義した函数 $S_\mu(\alpha^M)$ は情報理論での有限分割のエントロピーと一致すること：

$$S_\mu(\alpha^M) = H_\mu(\vee_{m=1}^M \tilde{A}_m)、$$

および、函数 $I_\mu(\alpha^M, \beta^N)$ は有限分割の相互エントロピーと一致すること：

$$I_\mu(\alpha^M, \beta^N) = I_\mu(\vee_{m=1}^M \tilde{A}_m, \vee_{n=1}^N \tilde{B}_n),$$

がわかる。

再び、非可換な場合の一般論に戻ることにする。有限次元の単位的 $C^*$ 代数 $A_m$ $(m = 1, 2, \cdots, M)$, $B_n$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ から単位的 $C^*$代数 $\mathcal{A}$ への完全正単位写像の組 $\alpha^M = (\alpha_1, \cdots, \alpha_M)$, $\beta^N = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$ に対し

$$S_\phi(\alpha^M) = \sup_{\mu \in M_+^1(\phi)} S_\mu(\alpha^M),$$
$$I_\phi(\alpha^M, \beta^N) = \sup_{\mu \in M_+^1(\phi)} I_\mu(\alpha^M, \beta^N)$$

とおく。函数 $S_\phi(\alpha^M)$ は $M$ 個の完全正単位写像 $\alpha_m : A_m \to \mathcal{A}$, $m = 1, 2, \cdots, M$ の間の同時エントロピーに相当する量であり、函数 $I_\phi(\alpha^M, \beta^N)$ は完全正単位写像の $M$ 組 $\alpha^M = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_M)$ と $N$ 組 $\beta^N = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N)$ の間の同時相互エントロピーに相当する量である。そして、函数 $I_\phi(\alpha^M, \beta^N)$ は、以下の様に、Ohya の相互エントロピー $I(\phi; \Lambda^*)$ を多数の完全正単位写像が関与している状況に一般化したものと見なすことができる。Ohya は、$C^*$代数 $\mathcal{A}$ から $C^*$代数 $\mathcal{B}$ へのチャンネル $\Lambda^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ を通して状態 $\phi$ から状態 $\psi = \Lambda^*\phi$ へ伝わった相互エントロピーを

$$I(\phi; \Lambda^*) = \sup_{\mu \in M_+^1(\phi)} I_\mu(\phi; \Lambda^*)$$

と定めている。但し、$I_\mu(\phi; \Lambda^*) = S(\Phi_\mu | \Phi_0)$、$\Phi_\mu = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{A})} \omega \otimes \Lambda^* \omega d\mu(\omega)$,、$\Phi_0 = \phi \otimes \Lambda^* \phi$ である。$C^*$代数 $\mathcal{A}$ と $C^*$代数 $\mathcal{B}$ は一般に無限次元であるので $S(\cdot|\cdot)$ は一般化された相対エントロピーである [Ara] [Uhl]。先ほどの $I_\phi(\alpha^M, \beta^N)$ の定義において有限次元性の仮定を落として、$A_m$, $B_n$ が無限次元のときにも同様に定義するならば、2つの完全正単位写像 $\alpha_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ と $\beta_1 = \Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ に対して

$$I_\phi(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}, \Lambda) = I(\phi; \Lambda^*)$$

となるので、確かに、函数 $I_\phi(\alpha^M, \beta^N)$ は Ohya の相互エントロピー $I(\phi; \Lambda^*)$ の拡張になっている。

相対エントロピー $S(\cdot|\cdot)$ の基本性質（同時凸性、単調性、スケール性等）を用いると次が容易に得られる。

**命題 2.2.** $A'_m, m = 1, \cdots, M$ と $B'_n, n = 1, \cdots, N$ を有限次元 $C^*$代数($\ni I$) とし、$\gamma_m : A'_m \to A_m$ と $\delta_n : B'_n \to B_n$ を完全正単位写像とする。また、$\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を $\phi \circ \theta = \phi$ なる完全正単位写像とする。このとき次が成立する。

(1) 基本不等式:

$$I_\phi(\alpha^M, \beta^N) \leq \min\{S_\phi(\alpha^M), S_\phi(\beta^N)\}.$$

(2) 完全正単位写像の有限列 $\alpha^{M'} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_L)$ と $\alpha^{M''} = (\alpha_{L+1}, \alpha_{L+2}, \cdots, \alpha_M)$ とに対して

$$\max\{S_\phi(\alpha^{M'}), S_\phi(\alpha^{M''})\} \leq S_\phi(\alpha^M) \leq S_\phi(\alpha^{M'}) + S_\phi(\alpha^{M''}).$$

(3) 完全正単位写像の有限列 $\alpha^M \circ \gamma^M \equiv (\alpha_1 \circ \gamma_1, \alpha_2 \circ \gamma_2, \cdots, \alpha_M \circ \gamma_M)$ と $\beta^N \circ \delta^N \equiv (\beta_1 \circ \delta_1, \beta_2 \circ \delta_2, \cdots, \beta_N \circ \delta_N)$ に対して

$$S_\phi(\alpha^M \circ \gamma^M) \leq S_\phi(\alpha^M),$$

$$I_\phi(\alpha^M \circ \gamma^M, \beta^N \circ \delta^N) \leq I_\phi(\alpha^M, \beta^N).$$

更に、もし全ての $m, n$ に対し $\gamma$ と $\delta$ が条件付期待値であれば等号が成立。

(4) 完全正単位写像の有限列 $\theta\circ\alpha^M \equiv (\theta\circ\alpha_1, \theta\circ\alpha_2, \cdots, \theta\circ\alpha_M)$ と $\theta\circ\beta^N \equiv (\theta\circ\beta_1, \theta\circ\beta_2, \cdots, \theta\circ\beta_N)$ に対して

$$\begin{aligned} &S_\phi(\theta\circ\alpha^M) \le S_\phi(\alpha^M), \\ &I_\phi(\theta\circ\alpha^M, \theta\circ\beta^N) \le I_\phi(\alpha^M, \beta^N). \end{aligned}$$

更に、もし $\theta$ が自己同型であれば等号が成立する。

## 3. 定常状態と定常チャンネルに対する函数 $\tilde{S}$ と 函数 $\tilde{I}$

この節では、定常チャンネル $\Lambda^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ と定常状態 $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ に対して、2つの函数 $\tilde{S}(\phi)$ と $\tilde{I}(\phi, \Lambda^*)$ を定義し、それらに対し、Kolmogorov-Sinai 型の定理を示す。

$(\mathcal{A}, \theta_\mathcal{A})$ を単位的 $C^*$代数 $\mathcal{A}$ とその自己同型 $\theta_\mathcal{A}$ との対とし、$(\mathcal{B}, \theta_\mathcal{B})$ も同様とする。また $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ を完全正単位写像で、かつ、$\theta_\mathcal{A}$, $\theta_\mathcal{B}$ に関して定常 $(\theta_\mathcal{A}\circ\Lambda = \Lambda\circ\theta_\mathcal{B})$ なものとする。完全正単位写像 $\Lambda$ の双対 $\Lambda^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ は $\theta_\mathcal{A}$ に関して定常な状態 $\phi$ $(\phi\circ\theta_\mathcal{A} = \phi)$ を $\theta_\mathcal{B}$ に関して定常な状態 $\psi = \Lambda^*\phi$ $(\psi\circ\theta_\mathcal{B} = \psi)$ に写し、定常チャンネルと呼ばれる。有限次元 $C^*$代数 $A\ (\ni I)$ からの完全正単位写像 $\alpha : A \to \mathcal{A}$ と有限次元 $C^*$代数 $B\ (\ni I)$ からの完全正単位写像 $\beta : B \to \mathcal{B}$ に対して、完全正単位写像の n 組 $\alpha^n$ と $\beta^n$ を

$$\begin{aligned} \alpha^n &= (\alpha, \theta_\mathcal{A}\circ\alpha, \cdots, \theta_\mathcal{A}^{n-1}\circ\alpha), \\ \beta^n &= (\beta, \theta_\mathcal{B}\circ\beta, \cdots, \theta_\mathcal{B}^{n-1}\circ\beta) \end{aligned}$$

と定め、更に

$$\begin{aligned} &\tilde{S}_\phi(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_\phi(\alpha^n), \\ &\tilde{I}_{\phi,\Lambda^*}(\alpha, \beta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} I_\phi(\alpha^n, \beta^n) \end{aligned}$$

とおく。函数 $\tilde{S}_\phi(\alpha)$ と函数 $\tilde{I}_{\phi,\Lambda^*}(\alpha,\beta)$ の、完全正単位写像 $\alpha$, $\beta$ 全体に渡る sup をとり (もちろん有限次元代数 $A$, $B$ も動かす)、

$$\begin{aligned} &\tilde{S}(\phi) = \sup_\alpha \tilde{S}_\phi(\alpha), \\ &\tilde{I}(\phi, \Lambda^*) = \sup_{\alpha,\beta} \tilde{I}_{\phi,\Lambda^*}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

とおく。函数 $\tilde{S}(\cdot)$ は情報理論における entropy rate のアナロジーとして、函数 $\tilde{I}(\cdot)$ は information rate のアナロジーとして構成したものである。このとき、情報理論的に自然な次の基本関係式を得る。

**命題 3.1.** $\tilde{I}(\phi, \Lambda^*) \le \min\{\tilde{S}(\phi), \tilde{S}(\Lambda^*\phi)\}$.

さて、可換系のエルゴード理論や情報理論では、Kolmogorov-Sinai entropy に対して Kolmogorov-Sinai の定理と呼ばれる基本定理がある。 これは抽象力学系 $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$ において、標本空間 $\Omega$ の有限分割 $\tilde{A}=\{A_i\}$, $A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j)$, $\cup_i A_i=\Omega$, のエントロピー

$$h_{\mu,T}(\tilde{A})=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\tilde{A}\vee T^{-1}\tilde{A}\vee\cdots\vee T^{-(n-1)}\tilde{A})$$

(但し、$T:\Omega\to\Omega$ は確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ の保測変換、$\mu$ は不変測度) の上限 $h_\mu(T)=\sup_{\tilde{A}}h_{\mu,T}(\tilde{A})$ として定義される Kolmogorov-Sinai entropy $h_\mu(T)$ を、有限分割のエントロピー $h_{\mu,T}(\tilde{A})$ で効果的に近似できることを保証する定理である。Kolmogorov-Sinai の定理のおかげで、Kolmogorov-Sinai の entropy は具体的な個々の例にたいしてその値を計算することが可能となる。Connes-Narnhofer-Thirring の dynamical entropy においても非可換 Kolmogorov-Sinai 定理が成立することが知られている。

先ほど定義した函数 $\tilde{S}$ と函数 $\tilde{I}$ に対しても Kolmogorov-Sinai 型の定理を証明できる。しかもその証明は、Connes-Narnhofer-Thirring の dynamical entropy に対する Kolmogorov-Sinai 定理の証明と本質的に同じものである。というのも、その証明はどちらも次の不等式に基づいているからである。

**命題 3.2** [CNT]. $\mathcal{A}$ を単位的 $C^*$代数とし、$\phi$ を $\mathcal{A}$ の状態とする。$\mu$ を $\phi$ の分解測度、即ち、$\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{A})}\omega d\mu(\omega)=\phi$ とし、$B$ を有限次元の単位的 $C^*$代数 ($\dim B=d<\infty$) とする。このとき $\|\alpha-\alpha'\|\leq\varepsilon$ なる任意の完全正単位写像 $\alpha:B\to\mathcal{A}$ と $\alpha':B\to\mathcal{A}$ に対して

$$\left|\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{A})}S(\alpha^*\omega|\alpha^*\phi)d\mu(\omega)-\int_{\mathfrak{S}(\mathcal{A})}S(\bar{\alpha}^*\omega|\bar{\alpha}^*\phi)d\mu(\omega)\right|\leq 6\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\log\left(1+\frac{d}{\varepsilon}\right)\right).$$

この補題より、函数 $S_\phi(\alpha^M)$ と函数$I_\phi(\alpha^M,\beta^N)$ に対する次の評価式が直ちに得られる。

**命題 3.3.** $\mathcal{A}$ を単位的 $C^*$代数とし、$\phi$ を $\mathcal{A}$ 上の状態とする。$A_m, m=1,\cdots,M$ を有限次元の単位的 $C^*$代数とし、$\alpha_m:A_n\to\mathcal{A}$ と $\bar{\alpha}_m:A_n\to\mathcal{A}$ を完全正単位写像とする。$d$ を $d=\max_{1\leq m\leq M}\dim A_m$ とする。このとき $\max_{1\leq m\leq M}\parallel\alpha_m-\bar{\alpha}_m\parallel\leq\varepsilon$ であれば、$\alpha^M=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_M)$ と $\bar{\alpha}^M=(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_M)$、に対して

$$\left|S_\phi(\alpha^M)-S_\phi(\bar{\alpha}^M)\right|\leq 6M\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\log\left(1+\frac{d}{\varepsilon}\right)\right).$$

**命題 3.4.** $\mathcal{A}$ を単位的 $C^*$代数とし、$\phi$ を $\mathcal{A}$ 上の状態とする。$A_m, m=1,\cdots,M$ と $B_n, n=1,\cdots,N$ を有限次元の単位的 $C^*$代数とし、$\alpha_m:A_n\to\mathcal{A}$、$\bar{\alpha}_m:A_n\to\mathcal{A}$、$\beta_m:B_n\to\mathcal{A}$、および、$\bar{\beta}_m:B_n\to\mathcal{A}$ を完全正単位写像とする。$d$ を $\dim A_m$ $(m=1,2,\cdots,M)$ および $\dim B_n$ $(n=1,2,\cdots,N)$ の最大値とする。このとき、完全正単位写像の組 $\alpha^M=(\alpha_1,\cdots,\alpha_M)$ と $\beta^N=(\beta_1,\cdots,\beta_N)$ が

$$\max\{\parallel\alpha_m-\bar{\alpha}_m\parallel,\parallel\beta_n-\bar{\beta}_n\parallel|m=1,\cdots,M;n=1,\cdots,N\}\leq\varepsilon$$

を満たせば、

$$\left| I_\phi(\alpha^M, \beta^N) - I_\phi(\bar{\alpha}^M, \bar{\beta}^N) \right| \leq 12(M+N)\varepsilon \left( \frac{1}{2} + \log\left(1 + \frac{d}{\varepsilon}\right)\right).$$

命題 3.3 と命題 3.4 は、それぞれ函数 $S$ と函数 $I$ の完全正単位写像のノルムに関する連続性を表している。これを用いて次の Kolmogorov-Sinai 型の定理（定理 3.5、定理 3.6）を得る。

**定理 3.5.** 完全正写像の列 $\alpha_m : A_m \to \mathcal{A}$ に対してある完全正写像の列 $\alpha'_m : \mathcal{A} \to A_m$ が存在して各点収束 $\alpha_m \circ \alpha'_m \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ $(m \to \infty)$ しているとする。このとき

$$\tilde{S}(\phi) = \lim_{m\to\infty} \tilde{S}_\phi(\alpha_m).$$

**定理 3.6.** 完全正写像の列 $\alpha_m : A_m \to \mathcal{A}$ と $\beta_m : B_m \to \mathcal{B}$ に対して、ある完全正写像の列 $\alpha'_m : \mathcal{A} \to A_m$ と $\beta'_m : \mathcal{B} \to B_m$ が存在して各点収束$\alpha_m \circ \alpha'_m \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$、$\beta_m \circ \beta'_m \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ しているとする。このとき

$$\tilde{I}(\phi, \Lambda^*) = \lim_{m\to\infty} \tilde{I}_{\phi,\Lambda^*}(\alpha_m, \beta_m).$$

$C^*$代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が核型であるなら定理 3.5 と 3.6 における仮定は自動的に満たされる。これら 2 つの定理を AF 代数（有限次元部分代数の増大列 $\{A_n\}$ の合併のノルム閉包 $\overline{\cup A_n}$ として表すことのできる $C^*$代数）に適用して次を得る。

**系 3.7.** $\mathcal{A} = \overline{\cup A_n}$ を AF 代数とし、$\theta_{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ の自己同型とする。このとき $\mathcal{A}$ 上の任意の定常状態 $\phi$ に対し

$$\tilde{S}_\phi(\theta) = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_{\phi,\theta}(A_n).$$

**系 3.8.** $\mathcal{A} = \overline{\cup A_n}$ と $\mathcal{B} = \overline{\cup B_m}$ を AF 代数とし、$\theta_{\mathcal{A}}$ と $\theta_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の自己同型とする。このとき、任意の定常チャンネル $\Lambda^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ と $\mathcal{A}$ 上の任意の定常状態 $\phi$ に対して

$$\tilde{I}(\phi, \Lambda^*) = \lim_{n\to\infty} \tilde{I}_{\phi,\Lambda^*}(A_m, B_n).$$

ここで、部分代数 $A_n \subset \mathcal{A}$ はそれに自然に伴う包含写像 $j_{A_n} : A_n \to \mathcal{A}$ をも表しているとする。

## 参考文献

[Ara] ARAKI, H. (1976) Relative entropy of states of von Neumann algebras. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **11**, 809-833.

[Bil] BILLINGSLEY, P. (1965), *Ergodic theory and information.* Wiley, New York.

[Con] CONNES, A. (1985) Entropie de Kolmogoroff Sinai et mécanique statistique quantique. *C.R. Acad. Sci. Paris, Séri. I* **301**, 1-6.

[CNT] CONNES, A., NARNHOFER, H. AND THIRRING, W. (1987) Dynamical entropy of $C^*$algebras and von Neumann algebras. *Commun. Math. Phys.* **112**, 691-719.

[CoS] CONNES, A. AND STØRMER, E. (1975) Entropy for automorphisms of $II_1$ von Neumann algebras. *Acta Math.* **134**, 289-306.

[Emc] EMCH, G. G. (1974) Positivity of the K-entropy on non-abelian K-flows. *Z. Wahr. Gebiete* **29**, 241-252.

[Kol] KOLMOGOROV, A. N. (1958) A new metric invariant of transcient dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **119**, 861-864.

[MuO] MURAKI, N. AND OHYA, M. (1993) Entropy functionals of Kolmogorov-Sinai type and their limit theorems. Preprint.

[Ohy1] OHYA, M. (1983) On compound state and mutual information in quantum information theory. *IEEE Trans. Inform. Theory* **29**, 770-774.

[Ohy2] OHYA, M. (1989) Some aspects of quantum information theory and their applications to irreverssible processes. *Rep. Math. Phys.* **27**, 19-47.

[OhP] OHYA, M. AND PETZ, D. (1993) *Quantum Entropy and Its Use.* Springer-Verlag, Berlin.

[Uhl] UHLMANN, A. (1977) Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory. *Commun. Math. Phys.* **54**, 21-32.

[Ume] UMEGAKI, H. (1962) Conditional expectation in an operator algebra IV (entropy and information). *Kôdai Math. Sem. Rep.* **14**, 59-85.

Department of Applied Science,
Faculty of Engineering,
Yamaguchi University,
Ube City, Yamaguchi 755, Japan
*E-mail address*: `muraki@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp`