数理解析研究所講究録
981 巻 1997 年 85-88

非対称直角距離を用いた配置問題について

金沢大・自然科学　金　正道
金沢大・教育　久志本　茂

1. はじめに

平面において $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{R}^2, i = 1, 2, \cdots, n(\geq 2)$ を相異なる需要点とし、$d(\cdot, \cdot)$ を距離を表す関数とし、$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ を新たに配置する施設の位置を表わす変数としたとき通常、単一施設配置問題は次のように定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2} F(\boldsymbol{x}) = G(d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1), \cdots, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_n)) \tag{1}$$

目的関数は、配置する施設の種類によって異なり、よく用いられるものとしては次の 3 つがある。 $w_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$ を需要点 $\boldsymbol{a}_i$ に付随する重みとし、 $A = \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ とする。

Minisum Problem(MSP)

$$F_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i) \tag{2}$$

Minimax Problem(MMP)

$$F_2(\boldsymbol{x}) = \max\{w_i d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i) : i = 1, 2, \cdots, n\} \tag{3}$$

Multicriteria Problem(MCP)

$$F_3(\boldsymbol{x}) = (d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1), \cdots, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_n)) \tag{4}$$

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\nexists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ s.t. $d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_i) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ かつ $d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_j) < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_j)$ for some j であるとき $\boldsymbol{x}$ を efficient point といい、efficient points の集合を $E(A)$ で表す。 efficient point $\boldsymbol{x}$ に対して $\exists \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ s.t. $d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_i) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ であるとき $\boldsymbol{x}$ を alternately efficient point といい、alternately efficient points の集合を $AE(A)$ で表す。efficient point $\boldsymbol{x}$ が alternately efficient point でないとき、$\boldsymbol{x}$ を strictly efficient point といい、strictly efficient points の集合を $SE(A)$ で表す。また、$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\nexists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ s.t. $d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_i) < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ であるとき $\boldsymbol{x}$ を quasiefficient point といい、quasiefficient points の集合を $QE(A)$ で表す。定義より明らかに $A \subset SE(A) \subset E(A) \subset QE(A)$ が成り立つ。MCP の最適解としては efficient point または quasiefficient point を考える。

2. ファジィ配置問題

2点 $\boldsymbol{x}=(x,y), \boldsymbol{y}=(x',y')$ 間の非対称直角距離 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を次のように定義する [1,4]。

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d_1(x) + d_2(y) \tag{5}$$

ここで

$$d_1(x) = \begin{cases} E|x-x'| & x \geq x' \\ W|x-x'| & x < x' \end{cases} \tag{6}$$

$$d_2(y) = \begin{cases} N|y-y'| & y \geq y' \\ S|y-y'| & y < y' \end{cases} \tag{7}$$

であり、E,W,S,N はそれぞれ東西南北方向に対して付与された正の重みである。定義より各 $\boldsymbol{y}$ に対して $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x}$ に関して凸関数である。非対称直角距離を用いた MSP,MMP は [1] によって解法が提案されている。

次に、非対称直角距離を用いた MMP に、ファジィ概念を導入した問題を考える。満足度が最も小さい需要点での満足度を最大にする配置を求める maximin 型施設配置問題として、この問題を次のように定式化する [4]。

Fuzzy Maximin Problem(FMMP)

$$\max_{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^2} \min \{\mu_i(w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)) : i=1,2,\cdots,n\}$$

ここで、$\mu_i(w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i))$ は重み付けされた距離 $w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)$ に対する満足度を表すメンバーシップ関数で次のように定義される（図 1)。

$$\mu_i(w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)) = \begin{cases} 1 \quad \text{if } w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i) < L_i \\ f(w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)) \\ \quad \text{if } L_i \leq w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i) < L_i + e_i \\ 0 \quad \text{if } w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i) \geq L_i + e_i \end{cases} \tag{8}$$

ここで L_i, e_i は正数で、$f(w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i))$ は次のような単調減少関数である。

$$f(w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)) = 1 - \frac{1}{e_i}\{w_i d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i) - L_i\} \tag{9}$$

FMMP は [4] によって解法が提案されている。

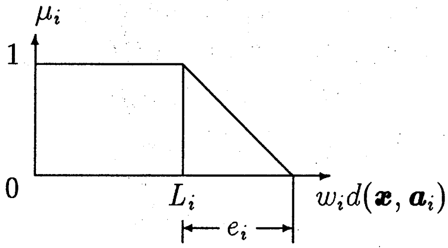

図 1 メンバーシップ関数

3. efficiency の特徴づけ

efficiency に対して次のような性質がある。quasiefficient point でない点を non-efficient point とよぶ。また、$N'(0, \frac{1}{N})$, $E'(\frac{1}{E}, 0)$, $S'(0, -\frac{1}{S})$, $W'(-\frac{1}{W}, 0)$ とする。

[性質]（[4]）

1. $N'E' \nparallel W'S', N'W' \nparallel E'S'$ の場合、alternately efficient point および quasiefficient point であって efficient point でない点は存在しない。
2. 対称距離の場合の strictly efficient point は非対称距離の場合でも strictly efficient point となる。
3. 対称距離の場合の non-efficient point は、非対称距離の場合でも non-efficient point である。
4. 各方向に対する重み（N, E, S, W）が変化するとそれにつれて $E(A), QE(A)$ も変化する。

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\boldsymbol{x}$ が strictly efficient point, alternately effcient point, quasiefficient point であるかどうかは $D_{\boldsymbol{x}} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2 | d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_i) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)\}$ を $\boldsymbol{x}$ の近傍 $B_{\boldsymbol{x}}$ で調べることによってわかる（図 2）。

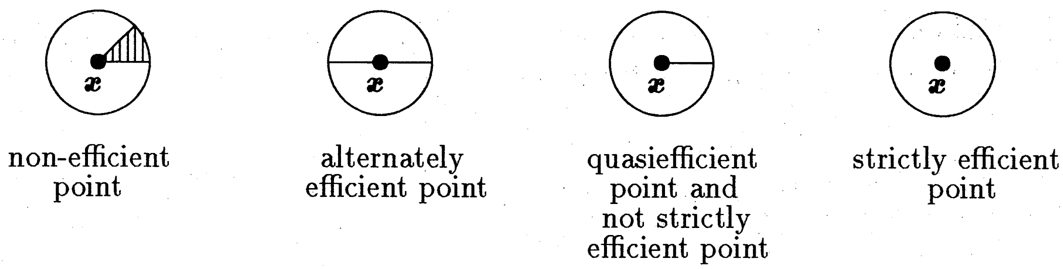

図 2 $D_{\boldsymbol{x}} \cap B_{\boldsymbol{x}}$

非対称直角距離を用いた $E(A), QE(A)$ を求める解法は [4] によって提案されている。

次に efficient points と MSP,MMP,FMMP の最適解との関係を考える。一般に、$\boldsymbol{x}^* \in QE(A)$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}^*$ が、ある $w_1 = \cdots = w_n = 0$ ではない重み $w_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$ に対しての MSP の最適解となることであることが知られている。いまの場合、次の定理が示される。

定理 1

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^* \in E(A) \\
&\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \\
&\exists w_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n \\
&\text{s.t. } \boldsymbol{x}^* \text{ が } w_1, w_2, \cdots, w_n \text{ を重みとする} \\
&\quad \text{MSP の最適解}
\end{aligned}
$$

S^* を MMP の最適解の集合とすると S^* は有界であり、次の補題が成り立つ。

補題 1　S^* は 1 点かまたは 1 つの線分になる。

一般に、MMP の最適解は quasiefficient point であることが知られている。いまの場合、次の定理が示される。

定理 2　MMP の最適解であり efficient point でもあるような点が存在する。

系 1　FMMP の最適値を t^* としたとき FMMP の最適解に関して次が成り立つ。

1. $0 < t^* < 1$ のとき最適解は quasiefficient point であり、最適解であり efficient point でもあるような点が存在する。
2. $t^* = 1$ のとき最適解は quasiefficient point である場合も quasiefficient point でない場合もあるが、最適解であり、 efficient point でもあるような点が存在する。

参考文献

[1] Z.Drezner and G.O.Wesolowsky, "The Asymmetric Distance Location Problem", Transportation Science, Vol.23, No.3, 1989, pp.201-207

[2] 久志本茂, "最適化問題の基礎, 森北出版, 1979

[3] T.J.Lowe, T.-F.Thisse, J.E.Ward and R.E.Wendell, "On Efficient Solutions to Multiple Objective Mathematical Programs", Managemanet Science, Vol.30, 1984, 1346-1349

[4] 松富達夫, 石井博昭, "ファジィ概念を用いた非対称距離施設配置問題", 日本ファジィ学会誌, Vol.8, No.1, 1996, pp.57-64

[5] B.Pelegrin and F.R.Fernandez, "Determination of Efficient Points in Multiple-Objective Location Problems", Naval Research Logistics., Vol.35, 1988, pp.697-705