数理解析研究所講究録
981 巻 1997 年 128-132

2目的 MPM オープンショップスケジューリング問題

大阪大学　毛利 進太郎　Mohri Shintaro
大阪大学　石井 博昭　Ishii Hiroaki
帝塚山大学　益田 照雄　Masuda Teruo

1 はじめに

これまで, 多くのスケジューリング問題に関する研究では目的関数が単一の問題を扱ってきた. しかしスケジューリング問題においても現実には様々な評価基準があり, それら複数の目的関数を同時に考慮し, バランスあるスケジュールを求めることがより現実的であることも多い. このように複数の目的関数を同時に考慮する問題を多目的スケジューリング問題と呼ぶ. 一般にある目的関数に対して"最適である"スケジュールが, 他の目的関数においても"最適である"とは限らず, それゆえあらゆる評価基準においても最適であるスケジュールは存在しない場合が多い. したがって多目的スケジューリングでは非劣スケジュールと呼ばれる解の集合を求めそれより意思決定者が満足のいくスケジュールを選択する.

E.L.Lawler と J.Labertoulle は非一様並列機械における L_{max}, C_{max} それぞれの単一目的関数を持つ問題に対し線形計画問題を構成しそれを利用して問題を解く方法を与えている [1].

また非一様並列機械における L_{max}, C_{max}の 2 目的の問題に対する解法は石井によって与えられている [2].

本研究では上記の結果を踏まえ最大完了時間 C_{max}と納期遅れ L_{max}という 2 つの目的関数を持つ MPM オープンショップスケジューリング問題を考え, 線形計画問題として定式化し, その非劣スケジュールを構成する方法について述べる.

2 Multi Purpose Machine

Multi Purpose Machine(以下 MPM) は Flexible manufacturing system のモデル化として Brucker と Schlie によって提案された [3, 4].

MPM は 1 つの機械で複数のオペレーションを行うことができる機械のモデルであり, それぞれの機械は複数の異なるオペレーションを実行できる. n_i個のオペレーション $O_{ij}(j = 1, \ldots, n_i)$ からなる仕事 $J_i(i = 1, \ldots, n)$ があり, 機械 $M_k(k = 1, \ldots, m)$ があるとする. O_{ij}は機械の集合 $u_{ij} \subseteq \{M_1, \ldots, M_m\}$ において処理される. ここで任意の $i_1, i_2, j_1, j_2(1 \leq i_1, i_2 \leq n, 1 \leq j_1 \leq n_{i_1}, 1 \leq j_2 \leq n_{i_2})$ に対し, $|u_{i_1j_1} \cap u_{i_2j_2}| \geq 0$ が成立する.

もし全ての仕事 J_iが一つのオペレーションからなり, 全てのオペレーションをいずれの機械でも同じ速度で処理できる時, 等価並列型 MPM であり,PMPM で示す. 同様に処理速度が機械に

よって異なる場合, 一様並列型 (QMPM), 等価でも一様でもない場合, 非一様型 (RMPM) と定義できる. ここでもし全ての機械集合 u_iが全ての機械 $\{M_1, \ldots, M_m\}$ からなっている場合, 従来の並列型であり, したがって従来の並列型の問題は MPM における問題の特殊な場合となる.

MPM における Shop 型問題についても従来と同様に定義できる. オペレーション O_{ij}に対し, 機械集合 u_{ij}が定義され, オペレーションの順番に制約がない場合, MPM open shop 問題 (OMPM) であり, オペレーションの順番がどの仕事においても同じ場合 MPM flow shop 問題 (FMPM) であり, オペレーションの順番が仕事によって異なる場合 MPM job shop 問題 (JMPM) である. ここでオペレーションが異なる任意の機械集合 u, u'に対し, $u \cap u' = \phi$かつ, 全ての機械集合に対し $|u_{ij}| = 1$ の場合, 従来のショップ型問題となる.

3　2目的 MPM オープンショップスケジューリング問題

ここで本研究で取り扱う 2 目的オープンショップスケジューリング問題について述べる.

1. n 個の仕事 $J_1, \ldots, J_n$と m 台の機械 $M_1, \ldots, M_m$がある.

2. 各仕事 $J_i (i = 1 \ldots n)$ はオペレーション $O_{i1}, \ldots, O_{in_i}$からなる. オペレーション O_{ij}は機械の集合 $u_{ij} \subseteq \{M_1, \ldots, M_m\}$ において p_{ij}時間で処理される.

3. オペレーションはどのような順番で処理しても構わない.

4. 各オペレーションは分割処理が可能である. すなわち任意の時間に処理を中断し, また再開することが出来る. 各仕事は同時に複数の機械で処理することはできず, 各機械は同時に複数の仕事を処理することはできない.

5. 各仕事 J_iには納期 d_iが決められており, 仕事 J_iの完了時間を C_iであらわすと, 納期遅れは $L_i = C_i - d_i$ となり, 最大完了時間 C_{max}と最大納期遅れ L_{max}はそれぞれ $C_{max} = \max_i C_i, L_{max} = \max_i L_i$ となる.

この条件の下で C_{max}, L_{max}を同時に最小にするスケジュールは一般には存在しないので, これらを目的関数とする非劣解の集合を求める.

非劣スケジュール

今 2 つの目的関数 f_1, f_2を考える. 任意の可能スケジュールπに対し, そのスケジュールに対するベクトル $v^\pi = (f_1^\pi, f_2^\pi)$を目的関数 f_1^π, f_2^πからなるベクトルとする. 二つのベクトル $v^1 = (v_1^1, v_2^1), v^2 = (v_1^2, v_2^2)$ に対し $v_1^1 \leq v_1^2$かつ $v_2^1 \leq v_2^2$であるとき, v^1は v^2に優越するといい,$v^1 \leq v^2$であらわす. またある可能スケジュールに対し, 優越するスケジュールが存在しないとき, 非劣スケジュールであると呼ばれる [2].

4　線形計画問題への定式化とスケジュールの構成

ここでは前節で述べた問題における非劣スケジュールを求める方法を述べる. まずパラメータ y を導入する. このパラメータ yによって C_{max}は $C_{max} \leq y$と制限される. その上で L_{max}を最小にす

るスケジュールを求める．まず納期 $d_i(i=1,\ldots,n)$ をソートし，得られた結果を $d'_1 < d'_2 < \ldots < d'_q$ とする．ただしここでの q は異なる納期の数である．また p は $d'_l \leq y$ となる最大の l の値とし，r_i は $d'_l = d_i$ となる l の値とする．x_{ij}^{kl} を仕事 J_i のオペレーション O_{ij} が機械 M_k で区間 $[d'_{l-1}, d'_l)$ の間に処理される時間を表わすとする．

以下の線形計画問題 $P^p(y)$ を考える．

$$\text{minimize}\, z$$

subject to

$$\sum_{j,k} x_{ij}^{kl} \leq d'_l - d'_{l-1}, l=2,\ldots,p-1, i=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{i,j} x_{ij}^{kl} \leq d'_l - d'_{l-1}, l=2,\ldots p-1, k=1,\ldots m,$$

$$\sum_{j,k} x_{ij}^{k1} \leq d'_1 + z,\ i=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{i,j} x_{ij}^{k1} \leq d'_1 + z,\ k=1,\ldots,m,$$

$$\sum_{j,k} x_{ij}^{kp+1} \leq y - d'_p,\ i=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{i,j} x_{ij}^{kp+1} \leq y - d'_p,\ k=1,\ldots,m,$$

$$z \geq y - d'_p$$

$$\sum_{k,l\leq r_i} x_{ij}^{kl} = p_{ij},\ j=1,\ldots,n_i,\ i=1,\ldots,m,$$

$$x_{ij}^{kl} = 0,\ \begin{array}{ll} l=r_i\ldots p+1, & i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n_i, & k=1,\ldots,m, \end{array}$$

$$x_{ij}^{kl} = 0,\ \begin{array}{ll} l=1\ldots r_i, & i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n_i, & k=\{k \mid M_k \notin u_{ij}\}, \end{array}$$

$$x_{ij}^{kl} \geq 0,\ \begin{array}{ll} l=2\ldots r_i, & i=1,\ldots,n, \\ j=1,\ldots,n_i, & k=1,\ldots,m, \end{array}$$

問題 $P^p(y)$ を解くことによって C_{max}¥$leqy$ の下での L_{max} の最小値を得る．

$f^p(y)$ を $P^p(y)$ における z の最適値であるとする．そのとき以下の定理 1,2 が成立する．

定理 1 $f^p(y)$ は区間 $[d'_l, y_l]$ において凸関数であり，区分的に線形で，かつ y に対し非増加関数である．ただし y_l は $y_l(y) = y - d'_l$ が成立する最小の y である．

証明 yが増えるにつれて,$P^p(y)$ の可能な領域は増えるので $f^p(y)$ の非増加性は明らかである. $P^p(y)$ の双対問題を考えることによって区分的に線形であることは明らかである. 最後に凸性については $(z_1, x_{1ij}^{kl}), (z_2, x_{2ij}^{kl}), (z_\lambda, x_{\lambda ij}^{kl})$ をそれぞれ $P^p(y_1), P^p(y_2), P^p(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$ の最適解であるとする.

$$\lambda f^p(y_1) + (1-\lambda)f^p(y_2) = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \geq z_\lambda = f^p(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)$$

z_λの最適性より,

$$(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, \lambda x_{1ij}^{kl} + (1-\lambda)x_{2ij}^{kl}$$

は $P^p(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$ の可能領域内に存在する. よって示された. □

定理 2 $f^p(y), y \in [d'_l, y_l], l = r, \ldots, q$の単調増加域と対応する yの変域において非劣スケジュールのスケジュールベクトルは $(y, f^p(y))$ の形で与えられる. ここで rは $d'_k \leq C^*_{max}$を満たす最大の k の値であり, 一般性を失わずに $C^*_{max} > d'_1$を仮定する.

証明 C_{max}が固定されているとき納期遅れのみを考える単一目的の問題となるので $f^p(y)$ は L_{max}の最小値となる. 区間 $[y_p, d'_{l+1})$ において $z = y - d'_l$が成立する. よって yの増加しても z の最適値は減少することはない. なぜなら zは常に区間において基底変数で $(y, f^p(y))$ はベクトル $(y_l, f^p(y_l))$ に優越する. よって区間 $[d'_l, y_l]$ のみを考えればよい. □

$P^p(y)$ の最適解 x_{ij}^{kl}を用いて実際のスケジューリングを構成する方法について述べる. それぞれの区間 $[d'_{l-1}, d'_l), l = 1, \ldots, p+1$ について, 同じ機械に割り当てられている同じ仕事に属する部分を合わせて 1 つの仕事と考える. すなわち仕事$\bar{J}_i^{kl}(i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m)$ を考え, 仕事$\bar{J}_i^{kl}$の機械 M_k上での処理時間を$\bar{p}_i^{kl} = \sum_j x_{ij}^{kl}(i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m)$ とすることにより, i 仕事,m 機械の中断可能なオープンショップ問題 $O \mid pmtn \mid -$に帰着することができ, これは E.L.Lawler と J.Labertoulle による非一様並列機械問題と同様にしてスケジュールを構成できる [1].

具体的には, 各区間 $[d'_{l-1}, d'_l](l = 1, \ldots, p+1)$ において,$n \times m$ 行列 T^l を

$$T^l = \begin{bmatrix} \bar{p}_1^{1l} & \cdots & \bar{p}_1^{ml} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_n^{1l} & \cdots & \bar{p}_n^{ml} \end{bmatrix}$$

とする. もし T^lの i 列が$\sum_{k=1}^{m} \bar{p}_i^{kl} = C_{max}$ならば critical であるという. Yを $m \times m$ の対角行列で各要素 y_{kk}が機械 M_kにおける遊休時間の合計であるとし, $m \times (m+n)$ 行列 Vを $V = [T, Y]$とする. 集合 Uを行列 Vの要素のうち各 ctitical な列から 1 つの要素を取り出し, 残りの列, 行からちょうど要素が 1 つずつになるように取り出したものの集合とする. Uは長さ$\delta > 0$ の部分スケジュールを構成するのに用いる. 最適なスケジュールはこの部分スケジュールを連結することによって得られる. 以下にその手順を示す.

- Step 1. Uを見つける.
- Step 2. 部分スケジュールの長さを決定する. すなわち

$$\delta = \begin{cases} V_{min} & if C_{max} - V_{min} \geq V_{max}, \\ C_{max} - V_{min} & otherwise. \end{cases}$$

ここで

$$V_{min} = \min\{V_{ij} \in U\}, \quad V_{max} = \max_{j}\{\sum^{\prime} V_{ij} \mid V_{ij} \notin U, \forall i\}$$

とする

- Uを用いて部分スケジュールを構成する.(以下に詳細を示す.)
- Step 3. C_{max} と $V_{ij} \in U$をδだけ減らす. もし $C_{max} = 0$ ならば終了. そうでなければ Step 1. へ

集合Uより実行可能なスケジュールを構成することができる. 集合Uの各要素$\bar{p}_i^{kl}$に対し, 機械M_kで仕事J_iを時間 $\min\{\bar{p}_i^{kl}, \delta\}$ の間だけ処理する. 集合Uの要素に対し$\bar{p}_i^{kl}$を $\max\{0, \bar{p}_i^{kl} - \delta\}$ に置き換え新たな行列T^lを構成し $C_{max} = C_{max} - \delta$とする. これにより実行可能なスケジュールを構成することができる.

5 おわりに

本研究では最大完了時間C_{max}と納期遅れL_{max}という 2 つの目的関数を持つ MPM オープンショップスケジューリング問題に対し, 線形計画問題として定式化し, それより非劣スケジュールを構成する方法について考察を行った. なおこの研究は帝塚山学園特別研究費と文部省科学研究費基盤研究 (c)(2)08680460 による援助を受けている.

参考文献

[1] E.L.Lawer,M.G.Luby,V.V.Vazirani "Scheduling open shop with parallel machines", Operations Research Letters,1,4(1982).

[2] H.Ishii, "Multiobjective scheduling problems",Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,405(1992).

[3] P.Brucker,R.Schlie "Job-shop scheduling with multi-pupose machines, Computing 45,369-375(1990).

[4] Peter.Brucker, "Scheduling Algorithms", Springer(1995).