数理解析研究所講究録
982巻 1997年 209-219

Kink of XXZ models

松井 卓
(東京都立大学)

§1. 以下では, Ferromagnetic XXZ modelで, 非並進不変基底状態について最近得られた結果を述べる。

$\mathfrak{A}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の量子スピン系 ($S=1/2$) の物理的観測可能量をあらわす C^*-代数とする。

$$\mathfrak{A} = \overline{\bigotimes_{\mathbb{Z}^d} M_2(\mathbb{C})}^{C^*}$$

$M_2(\mathbb{C})$ は 2×2 行列 ——$^{C^*}$ は C^*-代数になるような完備化を表わし, 各テンソル積成分は, $\mathbb{Z}^d$ の格子に対応するとする.

XXZ model の (形式的 体積無限大での) ハミルトニアンは

$$H = \sum_{\substack{j,j'\in\mathbb{Z}^d \\ |j-j'|=1}} \left(1 - \sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j')} - \frac{1}{\Delta}\left(\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j')} + \sigma_y^{(j)}\sigma_y^{(j')}\right) \right)$$

ここで $\sigma_\alpha^{(j)}$ $(\alpha = x, y, z)$ $j \in \mathbb{Z}^d$ は 格子点 j 上のパウリスピン行列である。

$\Delta \geqq 1$ の時が Ferromagnetic と呼ばれる。ここでは

$\Delta > 1$ と仮定する。

$\mathfrak{A}$ の状態 φ が H の基底状態であるとは、

$$\varphi(Q^* [H, Q]) \geqq 0 \qquad (1.1)$$

が $^\forall Q \in \mathfrak{A}_{loc} = \{ \sigma_\alpha^{(j)}$ で生成される多項式 $\}$ について成立することとする。

一般に 量子スピン系のハミルトニアンが与えられた時 全ての(上述の意味での)基底状態を決定するのは 必ずしも簡単でない。しかし 1次元 XXZ model の場合は完全な答が最近得れた。多次元の場合の研究は進行中である。1次元 XXZ model では、スピンが全て上(又は下)を向いた並進不変基底状態の他に 非並進不変でスピンがねじれてゆくように見える基底状態がある。これを Kink とよぶ。以下 Kink についての厳密な結果を解説する。

§2　1次元基底状態の分類とKink

(1.1)をみたす基底状態全体は，弱位相でコンパクトな凸集合である。この端点は純粋状態なので以下で純粋基底状態のみを扱う。([8]で述べたように $\Delta>1$ は仮定する。)　$\tau_j(\cdot)$　$(j\in\mathbb{Z})$ を格子の上のシフトとする。この時

<u>命題1.</u>　φ を1次元 XXZ model の純粋基底状態とする。この時次が成立する。

$$C_\infty \equiv \lim_{j\to\infty} \varphi(\sigma_z^{(j)}) = \lim_{j\to\infty} \varphi\circ\tau_j(\sigma_z^{(0)}) = \pm 1$$

$$C_{-\infty} \equiv \lim_{j\to-\infty} \varphi(\sigma_z^{(j)}) = \lim_{j\to-\infty} \varphi\circ\tau_j(\sigma_z^{(0)}) = \pm 1$$

$$0 \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbb{1} - \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}) < \infty. \tag{2.1}$$

$C_\infty = C_{-\infty} = 1$ 又は $C_\infty = C_{-\infty} = -1$ は標準的な並進不変基底状態である。(φ が基底状態で並進不変なら $\varphi = \lambda\varphi_+ + (1-\lambda)\varphi_-$　$0<\lambda<1$　$\varphi_\pm$ は

スピンが全て上又は下を向いた並進不変基底状態である。）

基底状態で $C_{\infty}=1$ $C_{-\infty}=-1$ （又は $C_{\infty}=-1$ $C_{-\infty}=1$ ）となるものがあるかどうかは比較的最近まで分っていなかった。物理学者 S. R. Alcaraz — R. S. Salinas — R. S. Wreszinski, C. T. Gottstein — Werner らの研究によってこのような基底状態の存在が明らかになった。例として次のような product state がある。 $k \in \mathbb{Z}$ に対し $M_2(\mathbb{C})$ の状態 $\varphi^{(k)}$ を次で定める。 （ $\Delta = \frac{1}{2}(q+q^{-1})$ $0<q<1$ とする。）

$$\varphi^{(k)}(\sigma_x) = \frac{2q^k}{(1+q^{2k})} \qquad \varphi^{(k)}(\sigma_y) = 0$$

$$\varphi^{(k)}(\sigma_z) = \frac{1}{(1+q^{2k})}(1-q^{2k})$$

ψ_{kink} を

$$\psi_{kink} = \bigotimes_{k=-\infty}^{\infty} \varphi^{(k)} \tag{2.2}$$

で定める。 $\Lambda = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ に対し

$$H_{\Lambda}^{(\pm)} = \sum_{k=-n}^{n-1} \left\{ 1 - \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \frac{1}{\Delta}\left(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} \right) \right\}$$
$$\pm \sqrt{1-\frac{1}{\Delta^2}} \left(\sigma_z^{(-n)} - \sigma_z^{(n)} \right) \tag{2.3}$$

と置くと　$H_{\Lambda}^{(+)} \geqq 0$　となる。さらに

$$\psi_{kink}(H_{\Lambda}^{(+)}) = 0 \qquad (2.4)$$

が全ての $\Lambda = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ について成立する。$H_{\Lambda}^{(+)}$ のスペクトルが正であることと (2.4) から ψ_{kink} は (1.1) の意味で基底状態であり　$C_{\infty} = 1$　$C_{-\infty} = -1$ である。

$$\psi_0 = \text{w-}\lim_{g \to 0} \psi_{kink} = \bigotimes_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}^{(k)}$$

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_x) = \tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_y) = 0 \qquad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_z) = 1 \quad (k \geq 0) \qquad \tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_z) = -1 \quad (k < 0)$$

とすると次が成立する。

<u>命題2.</u>　ψ は $\mathfrak{A}$ の状態で次をみたすとする。

$$C_{\infty} \equiv \lim_{j \to \infty} \psi(\sigma_z^{(j)}) = 1$$

$$C_{-\infty} \equiv \lim_{j \to -\infty} \psi(\sigma_z^{(j)}) = -1$$

$$0 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(1 - \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)}) < \infty$$

この時 ψ は ψ_0 とユニタリー同値　つまり ψ は,

ψ_0のGNS表現空間内のベクトル状態である。

命題2より XXZ modelのKink状態はψ_0のGNS表現空間のベクトルで表わされる。(命題2ではψは基底状態であることを仮定しない。)

以下ψ_0のGNS表現のヒルベルト空間を$\mathcal{H}$,

$\Omega \in \mathcal{H}$ は $(\Omega, Q\Omega) = \psi_0(Q)$ $(Q \in \mathfrak{A})$ をみたすベクトルとする。

この時 次が(レゾルベントが強収束の意味で)収束する。

$$\lim_{\Lambda \to \mathbb{Z}} H_\Lambda^{(+)} = H^{(+)} \geqq 0$$

$$\lim_{\Lambda \to \mathbb{Z}} \sum_{k \in \Lambda} \sigma_z^{(k)} = S_z$$

さらに $H^{(+)}$ と S_z は可換 $[e^{itH^{(+)}}, e^{isS_z}] = 0$

$(\forall t, s \in \mathbb{R})$. S_zのスペクトルは $\mathrm{spec}(S_z) = \mathbb{Z}$ である。

<u>命題3.</u>

単位ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ のベクトル状態 $(\xi, Q\xi) = \psi_\xi(Q)$ が XXZ model の基底状態とする。この時

$$H^{(+)}\xi = 0$$

命題4. $n \in \mathbb{Z}$ とする。

$$\dim \{ \xi \in \mathcal{H} \mid H^{(+)}\xi = 0 \quad S_z \xi = n\xi \} = 1$$

命題3,4から 1次元XXZ modelのkinkは完全に特長付けられたことになる。

§3 多次元XXZ modelのKink

1次元の場合と同様のやり方で多次元XXZ modelの非並進不変基底状態を作ることができる。$d=2$ の場合を例にあげる。Λ_n を原点を中心として45°回転した正方形とする。

$$\Lambda_n = \{ j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid |j_1| + |j_2| \leq n \} \ (\subset \mathbb{Z}^2)$$

H_{Λ_n} を Λ_n 上の自由境界条件のXXZ modelのハミルトニアンとする。

$$H^{(+)}_{\Lambda_n} = H_{\Lambda_n} + \sqrt{1 - \frac{1}{\Delta^2}} \left(- \sum_{\substack{j_1 + j_2 = 1 \\ j_1 \geq 0 \ j_2 \geq 0}} \sigma_z^{(j)} + \sum_{\substack{j_1 + j_2 = -1 \\ j_1 \leq 0 \\ j_2 \leq 0}} \sigma_z^{(j)} \right)$$

すると　$H^{(+)}_{\Lambda_n} \geqq 0$　となる。

$j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$

に対し　$s(j) = j_1 + j_2$　と置く。

$$\psi_{kink} = \bigotimes_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi^{s(j)}$$　（$\varphi^{(k)}$ は (2.2) の上で定義されている。）

すると

$$\psi_{kink}(H^{(+)}_{\Lambda_n}) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (3.1)$$

となる。よって ψ_{kink} は基底状態である。

多次元の場合，基底全体が上のようなタイプにつきるかどうかは今の段階（1996年2月）で不明である。
しかし (3.1) の条件をみたす基底状態全体は容易に記述できる

$$\Sigma = \{ \psi : \mathfrak{A} = \overline{\bigotimes_{\mathbb{Z}^2} M_2(\mathbb{C})}^{C^*} \text{の状態} \quad \psi(H^{(+)}_{\Lambda_n}) = 0 \quad \forall n \}$$

Σ は凸コンパクト集合で端点は純粋状態である。

命題5.

$\varphi \in \Sigma$　かつ純粋状態とする。この時 φ は積状態である。

命題5は $d(\geq 2)$ 次元でも同様に成立する。積状態で $\mathcal{Z}$ に属するのは次のどれかである。

$\varphi_{\pm}$ （スピンが全て上又は下）

$\psi_{kink} \circ \tau_j \circ \beta_\theta \qquad (j \in \mathbb{Z}^2,\ \theta \in \mathbb{R})$

ここで $j \in \mathbb{Z}^2 \quad \tau_j$ 2次元シフト

$(\ \tau_j(\sigma_\alpha^{(k)}) = \sigma_\alpha^{(j+k)} \quad j, k \in \mathbb{Z}^2 \quad \alpha = x, y, z\ )$

$$\beta_\theta(Q) = e^{i\theta S_z}\, Q\, e^{-i\theta S_z}$$

$$S_z = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sigma_z^{(k)}$$

命題5の系として次がわかる。

$\mathcal{H}$ を ψ_{kink} の GNS 表現空間とする。前と同じく

$$\lim_{n \to \infty} H_{\Lambda_n}^{(+)} = H^{(+)}$$

が resolvent 収束の意味で存在する。この $H^{(+)}$ について

系　$\dim\{\xi \in \mathcal{H} \mid H^{(+)}\xi = 0\} = 1$

1次元と多次元で $H^{(+)}$ のスペクトルの性質が異なることを，上の系は表わす。実はギャップについても著しい異なりがある。次は Koma-Nachtergaele の結果である。

定理　(Koma-Nachtergaele)

(1)　1次元 ψ_{kink} の GNS 表現で，$\delta > 0$ があり

$$\mathrm{Spec}\, H^{(+)} \cap (0, \delta) = \phi$$

(2)　2次元 ψ_{kink} の GNS 表現で どのような $\delta > 0$ に対しても

$$\mathrm{Spec}\, H^{(+)} \cap (0, \delta) \neq \phi$$

§4　終りに

以上で XXZ model の kink についての最近の結果を解説してきた。Kink 自体は 量子群 $SU_q(2)$ 対称性に関連して発見された。しかし 上で述べた結果では

量子群自体は重要な意味は持たない。1次元の場合 Kink の GNS 表現空間上 $SU_q(2)$ の(解析的に意味のある)表現は存在しないように見える。しかし $SU_q(2)$ をくり込んで得られる 2次元ユークリッド空間の運動群 $E(2)$ の表現が定義できる。1次元で $H^{(+)}$ のスペクトル分解に $E(2)$ の表現がどのように現われるかは、スペクトルの準粒子的な描像をとらえるために興味深い重要な問題である。

参考文献

Alcaraz, S.R. Salinas R.S. Wreszinski W.F
Anisotropic ferromagnetic quantum domain, Phy Rev. Lett. 75 (1995)

Gottstein, C.T. Werner R. Zero-energy states of the ferromagnetic XXZ chain Preprint, Osnabrück

Matsui, T. On ground states of the one-dimensional Ferromagnetic XXZ model. to appear in Lett. Math. Phys.

Koma, T. Nachtergaele B. preprint
to appear in Lett. Math. Phys.