数理解析研究所講究録
982 巻 1997 年 258-268

量子確率解析の離散時間単調 Fock 空間におけるアナローグ

山口大学工学部　村木 尚文 (Naofumi Muraki)

あらまし 自然数の単調減少列の全体から生成されるある種の Fock 空間（離散時間単調 Fock 空間）において、非可換確率論の一例を展開する。非可換ランダムウォークを基本ノイズとした、量子確率解析の離散アナローグを調べる。離散時間単調 Fock 空間上でのマルチンゲール展開定理、Ito 公式の離散アナローグ、及び、量子力学的半群の stochastic dilation について述べる。連続時間単調 Fock 空間においても量子確率解析が構成可能であると期待される。

1. Fock 空間と量子確率過程

量子確率論（＝非可換確率論）を展開する自然な舞台の 1 つは Fock 空間である [Par] [Mey] [Oba]。与えられた複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対し、3 つの基本的な Fock 空間、即ち、ボソン Fock 空間 Φ_{boson}、フェルミオン Fock 空間 $\Phi_{fermion}$、自由 Fock 空間 Φ_{free} が自然に付随する：

$$\begin{cases} \Phi_{boson} &= \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{H}^{\circ r} \quad (\mathcal{H}^{\circ r} \text{ は } \mathcal{H} \text{ の } r \text{ 次対称テンソル積})、\\ \Phi_{fermion} &= \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{H}^{\wedge r} \quad (\mathcal{H}^{\wedge r} \text{ は } \mathcal{H} \text{ の } r \text{ 次反対称テンソル積})、\\ \Phi_{free} &= \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{H}^{\otimes r} \quad (\mathcal{H}^{\otimes r} \text{ は } \mathcal{H} \text{ の } r \text{ 次テンソル積})。\end{cases}$$

Fock 空間は、元来、生成・消滅する量子力学的粒子を記述するための数学的モデルであり、閉部分空間 $\mathcal{H}_r := \mathcal{H}^{\circ r}$ (or $\mathcal{H}^{\wedge r}$ or $\mathcal{H}^{\otimes r}$) は r 粒子部分空間、$\mathcal{H}_0 \equiv \mathbb{C}$ は真空部分空間と呼ばれる。本来、Fock 空間は時空の中の粒子の生成・消滅を記述するためのものであり、1 粒子空間 $\mathcal{H}$ としては、主に、$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3)$ や $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^4)$ やそのヴァリエーションを採用する。ところが面白いことに、“1 粒子空間” として、時間軸 $T = \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$ 上の L^2 函数の全体 $\mathcal{H} := L^2(T)$ を採用すると、Fock 空間の構造が確率過程論的に解釈でき、Fock 空間上での作用素過程 $\{X_t\}_{t\in T}$（時刻 $t \in T$ を添字とした作用素の族）に対する量子確率解析（quantum stochastic calculus）を展開できることが知られている [Par] [Mey] [Oba]。量子確率解析の出発点は次の基本定理である。

定理 1 (Wiener-Ito-Segal). Ω を 1 次元ブラウン運動（＝Wiener 過程）$\{B(t)\}_{t\geq 0}$ の path space とせよ。このときブラウン運動の path の L^2汎函数の空間はボソン Fock 空間 Φ_{boson} と自然に同型である：

$$L^2(\Omega) \cong \Phi_{boson}.$$

ここでは、もちろん $\mathcal{H} = L^2(T)$ として時間軸上の Fock 空間を考えている。この Wiener-Ito-Segal 同型は多重 Wiener 積分を用いて構成される。この同型定理は、連続的な対象（ブ

ラウン運動の path に関するもの）と離散的な対象（生成・消滅する粒子に関するもの）との同一視を与えていて興味深い。ブラウン運動の時刻 t での位置座標 $B(t)$ を $L^2(\Omega)$ 上の掛け算作用素

$$L^2(\Omega) \ni f \mapsto B(t)f \in L^2(\Omega)$$

と見なしたとき、それは Wiener-Ito-Segal 同型によって Fock 空間 Φ_{boson} 上のある作用素に写像されるが、その作用素とはボソン生成・消滅作用素 $A_t^+ \equiv a^*_{\chi_{[0,t]}}$、$A_t^- \equiv a_{\chi_{[0,t]}}$（$\chi_{[0,t]}$ は区間 $[0,t]$ の定義函数）によって

$$Q_t = A_t^+ + A_t^-$$

と表される作用素である。よって、作用素の可換族 $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ はブラウン運動 $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ を Fock 空間 Φ_{boson} 上で作用素過程として表現したものになっている。"位置"の作用素過程 $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ に正準共役な"運動量" $P_t = i(A_t^+ - A_t^-)$ の作用素過程 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ もまたブラウン運動 $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ に作用素過程として同型である。つまり、ボソン Fock 空間 Φ_{boson} は互いに可換ではない２つの可換ブラウン運動 $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ と $\{P_t\}_{t\geq 0}$ とを持った Hilbert 空間である。正準変数の対 Q_t、P_t を考えることは生成・消滅対 A_t^+、A_t^- を考えることと同等であり、むしろ、ボソン Fock 空間 Φ_{boson} においては生成過程 $\{A_t^+\}_{t\geq 0}$ と消滅過程 $\{A_t^-\}_{t\geq 0}$ の２つが基本過程と考えられる。Wiener-Ito-Segal 同型によって、path space Ω 上の確率論的構造のうち特に Ito の確率解析の構造を Fock 空間 Φ_{boson} 上に持ち込み、それを基本過程 $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ と（可換という意味で）両立する可換作用素過程に対する calculus と解釈し、更に、$\{Q_t\}_{t\geq 0}$ と両立しない（つまり、２つの過程が可換ではない、あるいは、同時測定可能ではない、あるいは２つの過程に共通の標本空間 $\tilde{\Omega}$ を作れない）ような可換作用素過程（例えば $\{P_t\}_{t\geq 0}$）や、異なる時刻 $t_1 \neq t_2$ では可換でない（$X_{t_1}X_{t_2} \neq X_{t_2}X_{t_1}$）ような作用素過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ にまで演算対象を広げて得られる calculus が（ボソン的）量子確率解析（bosonic stochastic calculus）と呼ばれるものである。これは R. L. Hudson と K. R. Parthasarathy の論文 [HuP] に始まる。(尚、これの超函数論的拡張が [Oba] 等で展開されている。) Ito の確率解析では古典ブラウン運動 $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ が基本ノイズであり、確率積分の basic integrator であったのに対し、量子確率解析では生成・消滅過程 A_t^+、A_t^-（及び保存過程と称するもの Λ_t）が基本ノイズとなり、確率積分の basic integrator となる。

一度、量子確率解析がボソン Fock 空間 Φ_{boson} 上でボソン生成・消滅作用素の言葉で構成されてしまえば、それをフェルミオン生成・消滅作用素、自由生成・消滅作用素の言葉に対応させることにより、フェルミオン Fock 空間 $\Phi_{fermion}$ 上の量子確率解析（＝fermionic stochastic calculus [ApH]）、自由 Fock 空間 Φ_{free} 上の量子確率解析（＝free stochastic calculus [KuS]）を展開させることができる。もちろん、boson のときの議論がすっかりそのまま fermion や free の場合にも成り立つわけではなく、いろいろと違いも出てくる。ボソンの正準変数 Q_t、

P_t に対応するフェルミオンや free の"正準変数" $Q_t^{(fermion)}$、$P_t^{(fermion)}$、$Q_t^{(free)}$、$P_t^{(free)}$ はやはりある種のブラウン運動となるが、今度は作用素過程 $Q_t^{(fermion)}$、$Q_t^{(free)}$ 等はそれ自体が自己共役作用素の非可換族となり、フェルミオン-ブラウン運動 $\{Q_t^{(fermion)}\}_{t\geq 0}$ や自由ブラウン運動 $\{Q_t^{(free)}\}_{t\geq 0}$ はもはや path space "Ω" を持つことができない。(可換ブラウン運動 $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ において、"path" はいわば作用素の可換族の同時固有値のようなものである。)

今述べたように、何らかの意味での Fock 空間が与えられれば、それに自然に付随した(非可換) ブラウン運動と量子確率解析というものが存在しそうである:

Φ_{boson} $\rightsquigarrow$ 可換ブラウン運動の (非可換) 対 (Q_t, P_t)
(↔ ボソン生成・消滅過程の対 A_t^+, A_t^-)
$\rightsquigarrow$ ボソン的量子確率解析

$\Phi_{fermion}$ $\rightsquigarrow$ フェルミオン-ブラウン運動の対 $(Q_t^{(fermion)}, P_t^{(fermion)})$
(↔ フェルミオン生成・消滅過程の対 B_t^+, B_t^-)
$\rightsquigarrow$ フェルミオン的量子確率解析

Φ_{free} $\rightsquigarrow$ 自由ブラウン運動の対 $(Q_t^{(free)}, P_t^{(free)})$
(↔ 自由生成・消滅過程の対 C_t^+, C_t^-)
$\rightsquigarrow$ 自由量子確率解析

つまり、一般的に

$$\mathrm{Fock}(L^2(\mathbf{R}_+)) \rightsquigarrow \text{量子ブラウン運動}$$

という対応関係がありそうに思われる。(ここでの"量子"という形容詞は"非可換"という軽い意味で用いており、量子物理的解釈の存在を要求しているわけではない。可換確率論(=古典確率論)の非可換アナローグの例を構成しようという数学の問題として考えている。)すると、当然

いろいろな Fock 空間 $\rightsquigarrow$ いろいろな非可換ブラウン運動
$\rightsquigarrow$ いろいろな非可換確率解析

という発想に導かれる。そこで、何らかの意味での Fock 空間 (の新しい例) を時間軸上に構成できないものかと試みた [Mur1] [Mur2]。その結果、単調 Fock 空間 (monotone Fock space) と名付けた、Fock 空間もどきの空間を定義することが出来た。これは、ある種の生成・消滅作用素を持った Hilbert 空間であるという意味で、Fock 空間もどきの空間である。

この単調 Fock 空間は連続時間と離散時間の両方で構成され、連続時間単調 Fock 空間には非可換ブラウン運動を伴い、離散時間単調 Fock 空間には非可換ランダムウォークを伴うことが分かっている。また、この非可換ランダムウォークの中心極限定理型の極限分布として逆正弦法則が出現する [Mur1]。連続時間単調 Fock 空間における非可換ブラウン運動は逆正弦法則に従うことが分かっており、上記非可換ランダムウォークの自然なスケーリグ極限と考えられる [Mur2]。

研究の次のステップとして、連続時間単調 Fock 空間上に量子確率解析（＝非可換確率解析）を展開することを目標として掲げたい。しかし、とっかかりなしでは、連続時間で calculus を展開しようにも五里霧中の状態になってしまうので困る。

そこで今回は、連続時間 calculus の手がかりを収集することを目的として、連続時間 calculus へのタタキ台のつもりで、離散時間単調 Fock 空間上で量子確率解析の離散時間アナローグ（というよりは、むしろ、ランダムウォーク-アナローグ）を展開することを試みる。

2. 単調 Fock 空間

離散時間のケースを考えているので、時刻の集合を $T=\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ とする。また、時刻の長さ r の減少列 $\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_r)$、$i_1>i_2>\cdots>i_r\quad(i_1,i_2,\cdots,i_r\in T)$、を省略記法で $\sigma=(i_1>i_2>\cdots>i_r)$ と書く。時刻の長さ r の減少列 $\sigma=(i_1>i_2>\cdots>i_r)$ の全体を ${}_T\mathrm{D}_r$ とおく。但し、${}_T\mathrm{D}_0$ は空列 Λ のみからなる成る一点集合 $\{\Lambda\}$ とする。この集合 ${}_T\mathrm{D}_r$ 上の l^2函数全体の成す複素 Hilbert 空間を $\mathcal{H}_r=l^2({}_T\mathrm{D}_r)$ とし、r 粒子空間と呼ぶ。但し、その内積 $<\cdot|\cdot>$ は右線形であると約束する。r 粒子空間 $\mathcal{H}_r$ の Hilbert 空間直和 $\Phi=\oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{H}_r$ を（離散時間）単調 Fock 空間と名付ける。単調 Fock 空間 Φ は時刻の減少列 $\sigma=(i_1>i_2>\cdots>i_r)$ の全体 $\mathrm{Dec}(T)=\cup_{r=0}^{\infty}{}_T\mathrm{D}_r$ を添字集合とする自然な完全正規直交系 $\{e_\sigma|\sigma\in\mathrm{Dec}(T)\}$ を持つ。但し、基底ベクトル e_σ は $e_\sigma(\sigma')=1\ (\sigma'=\sigma)$、$=0\ (\sigma'\neq\sigma)$ で与えられる函数 $(\in\Phi=l^2(\mathrm{Dec}(T)))$ である。特に、空列 Λ に付随する基底ベクトル $\Omega=e_\Lambda$ を真空ベクトルと呼ぶ。

時刻 $i\in T$ に付随する作用素 δ_i^+ を、基底ベクトル e_σ への作用

$$\delta_i^+e_{(i_1>i_2>\cdots>i_r)}=\begin{cases} e_{(i>i_1>i_2>\cdots>i_r)} & (\text{if } i>i_1),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

によって定義し、時刻 $i\in T$ に付随した生成作用素と呼ぶ。同様にして、時刻 $i\in T$ に付随した消滅作用素を次式で定義する：

$$\delta_i^-e_{(i_1>i_2>\cdots>i_r)}=\begin{cases} e_{(i_2>i_3>\cdots>i_r)} & (\text{if } i=i_1),\\ 0 & (\text{その他}).\end{cases}$$

もちろん、真空ベクトル $\Omega=e_\Lambda$ に対しては $\delta_i^-\Omega=0$ と約束する。生成・消滅作用素 δ_i^+、δ_i^- は有界線形作用素であり、互いに adjoint になっている。生成・消滅作用素対 δ_k^+、δ_k^- を

用いて正準対 q_k、p_k を次式により自然に定める：

$$q_k = \delta_k^+ + \delta_k^-, \qquad p_k = i(\delta_k - \delta_k^-).$$

但し、この式における i は虚数単位である。

生成・消滅作用素全体 $\{\delta_i^+, \delta_i^- | i \in T\}$ 及び恒等作用素 I から生成される C^*代数を $\mathcal{A} = C^*(I, \delta_i^+, \delta_i^- | i \in T)$ とし、真空ベクトル $\Omega \in \Phi$ に伴う状態を $\phi(\cdot) = < \Omega | \cdot \Omega >$ としよう。このとき、C^*確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ が単調 Fock 空間上の確率論を展開する舞台である。この C^*確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ には、時刻 $i \in T$ を径数とする C^*部分代数の族 $\mathcal{A}_i = C^*(I, \delta_i^+, \delta_i^-)$、$i \in T$、が自然に付随している。この C^*部分代数の族 $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in T}$ は次の意味で真空状態 ϕ に関して独立である。

命題 2. 時刻の増加する順序に有限個の C^*部分代数 $\mathcal{A}_{i_1}, \mathcal{A}_{i_2}, \cdots, \mathcal{A}_{i_n}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ を選ぶと、そこから選んだ作用素の積の真空期待値は常に分解する：

$$\phi(A_1 A_2 \cdots A_n) = \phi(A_1)\phi(A_2)\cdots\phi(A_n) \qquad (\forall A_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, A_2 \in \mathcal{A}_{i_2}, \cdots, A_n \in \mathcal{A}_{i_n}).$$

この命題に現れているような、作用素の時間順序積に関する期待値の分解の形で定式化された独立性を Kümmerer の独立性という。上記の命題が述べていることは、単調 Fock 空間に自然に付随する組 $(\mathcal{A}, \phi, \{\mathcal{A}_i\}_{i \in T})$ を考えると $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in T}$ は真空状態 ϕ に関して Kümmerer の意味で独立である、ということである。

時刻 $k \in T$ を径数とした作用素の族を作用素過程と呼ぶ。離散時間単調 Fock 空間 Φ においては、次の作用素過程が基本的であり、可換確率論でのブラウン運動（というよりむしろ、ランダムウォーク）の役割を果たす。即ち、生成過程 $D_k^+ = \delta_1^+ + \delta_2^+ + \cdots + \delta_k^+$ 及び 消滅過程 $D_k^- = \delta_1^- + \delta_2^- + \cdots + \delta_k^-$ の対である。これを自己共役化すると、正準過程の対 $Q_k = q_1 + q_2 + \cdots + q_k$ と $P_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ を得る。自己共役作用素 q_i 及び p_i のスペクトルは $\mathrm{Sp}(q_i) = \mathrm{Sp}(p_i) = \{-1, 0, +1\}$ であり、真空状態 ϕ の下で、固有値 $-1, 0, +1$ の確率はそれぞれ $1/2, 0, 1/2$ となる。よって作用素 p_i、q_i は量子ベルヌイ確率変数と見なせる。量子ベルヌイ確率変数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ はそれぞれ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ の元であるから Kümmerer の意味で独立であり、よって、正準過程 $Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ は（非可換）ランダムウォークと見なせる。正準過程 $P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ についても同様である。

3. フィルタレーション、条件付期待値、及び、マルチンゲール

単調 Fock 空間に付随した C^*確率空間にフィルタレーションの構造と条件付き期待値の構造を入れ、マルチンゲールを定義しよう。

時刻の集合 $T_k = \{1, 2, \cdots, k\} \subset T$ に付随する C^* 部分代数を $\mathcal{A}_{k]} = C^*(I, \delta_i^+, \delta_i^- | i \in T_k)$ とせよ。C^* 部分代数の族 $\{\mathcal{A}_{k]}\}_{k \in T}$ が C^* 確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ の自然なフィルタレーションである。後で、このフィルタレーションに基づいて作用素過程の適合性やマルチンゲールの概念を自然に定めることになる。

マルチンゲールの概念を定義するためには、条件付期待値の構造が必要である。条件付期待値の構造を定義するための準備として、Fock 展開定理を用意しておこう。(一般に "Fock 空間" 上の一般の作用素は生成・消滅作用素を用いて展開されるという型の定理を Fock 展開定理という。[Oba] を参照。) 時刻の減少列 $\sigma = (i_1 > i_2 > \cdots > i_r)$ に対し

$$\begin{cases} \delta_\sigma^+ = \delta_{(i_1 > i_2 > \cdots > i_r)}^+ = \delta_{i_1}^+ \delta_{i_2}^+ \cdots \delta_{i_r}^+, \\ \delta_\sigma^- = \delta_{(i_1 > i_2 > \cdots > i_r)}^- = \delta_{i_r}^- \delta_{i_{r-1}}^- \cdots \delta_{i_1}^- \end{cases}$$

とおき、これらも生成・消滅作用素と呼ぶことにする。また作用素 $\delta_i^\bullet = \delta_i^- \delta_i^+$ を排他作用素と呼ぶことにし、$\delta_\emptyset^\bullet = I$ と約束する。このとき次が成り立つ。

定理 3.1 (Fock 展開). C^* 部分代数 $\mathcal{A}_{k]} \subset \mathcal{A}$ に属する任意の作用素 A は次の形に一意に展開される。($a_{\sigma,U,\tau}$ は複素数。)

$$A = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathrm{Dec}(T_k) \\ U \subset T_k \\ U = \emptyset \text{ or singleton} \\ \sigma > U \text{ and } \tau > U}} a_{\sigma,U,\tau} \delta_\sigma^+ \delta_U^\bullet \delta_i^- .$$

但し、ここで $\mathrm{Dec}(T_k)$ は T_k の元のみからなる減少列の全体である。また、$\sigma > U$ とは列 σ に属する任意の時刻が U に属する任意の時刻よりも大きいことを表わす。この Fock 展開定理によれば $\mathcal{A}_{k]}$ の任意の元 A は $\delta_\sigma^+ \delta_U^\bullet \delta_\tau^-$ の形の作用素の 1 次結合である。このことを用いて条件付期待値を構成する。

C^* 代数 $\mathcal{A}$ から C^* 部分代数 $\mathcal{A}_{k]}$ への条件付期待値 (真空期待値を保つ線形写像で良い性質を持つもの) $\varepsilon_{k]} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{k]}$ を構成しよう。まず、線形写像 $\varepsilon_{k,k+1} : \mathcal{A}_{k+1]} \to \mathcal{A}_{k]}$ を次により定める。

$$\varepsilon_{k,k+1}(\delta_\sigma^+ \delta_U^\bullet \delta_\tau^-) = \begin{cases} \delta_\sigma^+ \delta_U^\bullet \delta_\tau^- & (\sigma, U, \tau \text{ が } T_k \text{ の元で書けているとき})、\\ I & (U \text{ が一点集合 } \{k+1\} \text{ のとき})、\\ 0 & (\sigma \text{ か } \tau \text{ が時刻 } k+1 \text{ を含むとき})。\end{cases}$$

この隣接 2 時刻間の線形写像 $\varepsilon_{k,k+1}$ を時刻の鎖 $k, k+1, k+2, \cdots, l-1, l$ に沿って合成した写像 $\varepsilon_{k,l} \equiv \varepsilon_{k,k+1} \circ \varepsilon_{k+1,k+2} \circ \cdots \circ \varepsilon_{l-1,l} : \mathcal{A}_{l]} \to \mathcal{A}_{k]}$ を考えると $\{\varepsilon_{k,l} | k < l\}$ は整合的な系となる、即ち、$\varepsilon_{k,l} \circ \varepsilon_{l,m} = \varepsilon_{k,m} \quad (k < l < m)$。これら $\varepsilon_{k,l}$ の l を動かして、自然な合併 $\tilde{\varepsilon}_{k]} : \cup_{l \geq k+1} \mathcal{A}_{l]} \to \mathcal{A}_{k]}$ を作る。$\tilde{\varepsilon}_{k]}$ は有界線形写像であるので、これを連続拡張することにより、C^* 代数 $\mathcal{A}$ からの有界線形写像 $\varepsilon_{k]} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{k]}$ を定義できる。この写像 $\varepsilon_{k]}$ は次の意味で真空状態 ϕ に関する $\mathcal{A}_{k]}$ への条件付期待値と見なし得る。

定理 3.2. 線形写像 $\varepsilon_{k]}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}_{k]}$ は次を満たす。任意の $A\in\mathcal{A}$ 及び $B,B_1,B_2\in\mathcal{A}_{k]}$ に対して

(1) $\varepsilon_{k]}(B)=B$; (2) $\varepsilon_{k]}(A^*)=\varepsilon_{k]}(A)^*$; (3) $\varepsilon_{k]}(A^*A)\geq 0$; (4) $\|\varepsilon_{k]}(A)\|\leq\|A\|$;
(5) $\varepsilon_{k]}(A^*A)\geq\varepsilon_{k]}(A)^*\varepsilon_{k]}(A)$; (6) $\phi(\varepsilon_{k]}(A))=\phi(A)$; (7) $\varepsilon_{k]}(B_1AB_2)=B_1\varepsilon_{k]}(A)B_2$.

これより、線形写像 $\varepsilon_{k]}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}_{k]}$ は H. Umegaki [Ume] の意味での条件付期待値の性質をほとんど全て満足していることがわかる。(Umegaki のオリジナルの定義とくいちがっている点は、C^*代数の設定のため、弱連続性が不成立であること、及び、状態 ϕ が忠実ではない、という点である。)

この条件付期待値 $\varepsilon_{k]}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}_{k]}$ を用いると C^*確率空間 $(\mathcal{A},\phi)$ 上でマルチンゲールの概念を以下のように自然に定義することができる。作用素 A が <u>k-adapted</u> であるとは $A\in\mathcal{A}_{k]}$ であることをいい、また、A が <u>k-previsible</u> であるとは $A\in\mathcal{A}_{k-1]}$ であることをいう。作用素過程 $\{A_k\}_{k\in T}$ が<u>適合過程 (adapted process)</u>であるとは、各時刻 k で A_k が k-adapted であることをいい、また、$\{A_k\}_{k\in T}$ が <u>previsible process</u> であるとは、各時刻 k で A_k が k-previsible であることをいう。作用素過程 $\{M_k\}_{k\in T}$ が<u>マルチンゲール</u>であるとは、(1) 適合過程であり、かつ、(2) 射影性 ($\varepsilon_{j]}(M_k)=M_j$ $(j\leq k)$) を有することをいう。生成過程 $D_k^+=\delta_1^++\delta_2^++\cdots+\delta_k^+$、消滅過程 $D_k^-=\delta_1^-+\delta_2^-+\cdots+\delta_k^-$、正準過程 $Q_k=q_1+q_2+\cdots+q_k$、$P_k=p_1+p_2+\cdots+p_k$ はいずれもマルチンゲールの例である。実は次に示されるように単調 Fock 空間 Φ 上の任意のマルチンゲールは生成・消滅過程を用いて標準的に展開できることがわかる。

定理 3.3 (可予測表現定理). 単調 Fock 空間 Φ 上の任意のマルチンゲール $\{M_k\}_{k\in T}$ は次の形に一意に展開できる。

$$M_k=mI+\sum_{j=1}^{k}\delta_j^+u_j^\circ\delta_j^-+\sum_{j=1}^{k}\delta_j^+u_j^++\sum_{j=1}^{k}u_j^-\delta_j^-,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

ここで、m は複素数であり、$\{u_k^\circ\}$、$\{u_k^+\}$、$\{u_k^-\}$、は previsible process である。

可予測表現定理に現れる作用素の積和は、連続時間では確率積分に相当すべきはずのものである。u で表されている部分が integrand に、そして、δ で表されている部分が integrator に相当する。

4. Ito 公式の離散アナローグ

この節では、Ito 公式の離散アナローグを単調 Fock 空間上で考えてみよう。量子確率解析において、量子 Ito 公式と呼ばれているものは、2つの確率積分 X_t、Y_t の積 X_tY_t を計算するための公式であり、微分形で表現すると、積の確率微分

$$d(X_tY_t)=(dX_t)Y_t+X_t(dY_t)+(dX_t)(dY_t)$$

において出現するおつりの項 $(dX_t)(dY_t)$ を計算するための公式ととらえられる。可換確率解析（= Ito calculus）における基本公式 $(dB(t))^2 = dt$ の量子版が量子 Ito 公式であり、生成・消滅過程の確率微分 dA_t^+、dA_t^-、保存過程の確率微分 $d\Lambda_t$、及び、時刻の微分 dt の間の乗法表 (quantum Ito table) として表される。

Ito 公式の離散時間版は、“確率和分”の乗法公式、もしくは、“確率差分”の乗法公式であると考え、それを単調 Fock 空間上で調べよう。２つの“確率和分” X_k、Y_k の積の“確率差分”（要するに増分）は、$\xi_k = X_{k+1} - X_k$、$\eta_k = Y_{k+1} - Y_k$ を用いて

$$X_{k+1}Y_{k+1} - X_kY_k = \xi_kY_k + X_k\eta_k + \xi_k\eta_k$$

と書ける。おつりの項 $\xi_k\eta_k$ を計算するための公式を乗法表としてまとめればよい。ここでは簡単のため次の形の“確率和分” X_k、Y_k を考える。（これは、一般にマルチンゲールとはならない。）

$$\begin{aligned} X_k &= X_0 + \sum_{j=1}^{k} \delta_j^+ u_j^\circ \delta_j^- + \sum_{J=1}^{k} \delta_j^+ u_j^+ + \sum_{j=1}^{k} u_j^- \delta_j^- + \sum_{j=1}^{k} u_j^\bullet \delta_j^\bullet, \\ Y_k &= Y_0 + \sum_{j=1}^{k} \delta_j^+ v_j^\circ \delta_j^- + \sum_{J=1}^{k} \delta_j^+ v_j^+ + \sum_{j=1}^{k} v_j^- \delta_j^- + \sum_{j=1}^{k} v_j^\bullet \delta_j^\bullet. \end{aligned}$$

但し、$X_0, Y_0 \in \mathbb{C}I$ とし、作用素過程 u_j°、u_j^+、u_j^-、$u_j^\bullet$、v_j°、v_j^+、v_j^-、$v_j^\bullet$ は皆 previsible process であるとする。作用素過程 X_k、Y_k のそれぞれにおいて、最初の３つの“確率和分”はマルチンゲールであり、期待値 0 である。このとき、“量子 Ito 公式”を“確率差分”の乗法公式と考えれば、それは次の quantum Ito table（のアナローグ）にまとめられる。

定理 4（quantum Ito table のアナローグ）

	$\delta_j^+ v_j^\circ \delta_j^-$	$\delta_j^+ v_j^+$	$v_j^- \delta_j^-$	$v_j^\bullet \delta_j^\bullet$
$\delta_j^+ u_j^\circ \delta_j^-$	$\delta_j^+ (u_j^\circ v_j^\circ) \delta_j^-$	$\delta_j^+ (u_j^\circ v_j^+)$	0	0
$\delta_j^+ u_j^+$	0	0	$\delta_j^+ (u_j^+ v_j^-) \delta_j^-$	$\delta_j^+ (u_j^+ v_j^\bullet)$
$u_j^- \delta_j^-$	$(u_j^- v_j^\circ) \delta_j^-$	$(u_j^- v_j^+) \delta_j^\bullet$	0	0
$u_j^\bullet \delta_j^\bullet$	0	0	$(u_j^\bullet v_j^-) \delta_j^-$	$(u_j^\bullet v_j^\bullet) \delta_j^\bullet$

ランダムウォークからブラウン運動へと、即ち、離散過程から連続過程へと極限移行すると、連続時間単調 Fock 空間の quantum Ito's formula が得られるものと期待している。

5. 量子力学的半群の Stochastic Dilation

Parthasarathy の本 [Par] を見ると、量子確率解析を作った目的の１つは、量子確率微分方程式の理論を整備し、その応用として量子力学的半群（quantum dynamical semigroup）の stochastic dilation を行うことにあるらしい。もし、単調 Fock 空間上に量子確率解析と呼べるものが構成できるのなら、それは当然、量子力学的半群の stochastic dilation を実

現できるようなものでなければならない。連続時間単調 Fock 空間上の量子確率解析に向けて、今、それの離散アナローグを考えているわけであるが、離散時間の場合には量子力学的半群の stochastic dilation は以下の設定ではきわめて単純な問題であることがわかる。

複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を用意し、これを初期空間と呼ぶ。初期空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ （初期代数と呼ぶ）において量子力学的半群 $\{T_k\}_{k\geq 0}$ が与えられているとする。即ち、T_k は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ からそれ自身への線形写像であり、

(1) $T_{k+l} = T_k T_l$ $(k, l \geq 0)$、
(2) T_k は完全正写像であり、かつ、$T_k(I) = I$、

を満たすとする。初期空間にテンソルすべきノイズ空間として単調 Fock 空間 Φ を採用する。量子力学的半群 $T_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を、初期空間 $\mathcal{H}$ とノイズ空間 Φ の合成系 $\mathcal{H} \otimes \Phi$ 上の代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi)$ における自己同型群 $\hat{T}_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi)$ に、持ち上げること（dilation）という問題を考えてみる。但し、ここでは dilation を確率論的に構成したい（stochastic dilation)。自己同型群、つまり、可逆な時間発展を記述するため、ここでは時刻の集合を $T := \mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ とし、整数の集合上に単調 Fock 空間 Φ を作っておく。(作り方は $T := \mathbb{N}$ の場合と同様である。）そして、簡単のため、単調 Fock 空間 Φ 上の生成・消滅作用素 δ_j^+, δ_j^- から自然に定まる合成系上の作用素 $I \otimes \delta_j^+, I \otimes \delta_j^-$ を同じ記号 δ_j^+, δ_j^- で表すことにする。

初期系 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の合成系 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi)$ への埋め込みを

$$i : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi) : X \mapsto \hat{X} = X \otimes I$$

とし、合成系 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi)$ から初期系 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への射影を

$$\tilde{P}_0 : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : X \otimes A \mapsto \phi(A) X$$

により定める。(ここで、ϕ はノイズ系 $\mathcal{B}(\Phi)$ における真空状態である。）初期代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上で与えられた半群 $\{T_k\}_{k\geq 0}$ に対して、代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi)$ 上の自己同型群 $\{\hat{T}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ であって、等式

$$\tilde{P}_0 \hat{T}_k(\hat{X}) = T_k(X), \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

を満たすもの、即ち、図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi) \arrow[r, "\hat{T}_k"] & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi) \arrow[d, "\tilde{P}_0"] \\
\mathcal{B}(\mathcal{H}) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "T_k"'] & \mathcal{B}(\mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

を可換にするものを構成しよう。Hudson-Parthasarathy の量子確率解析では、（連続時間の、適当な正則性を持つ）量子力学的半群 $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ の dilation $\{\hat{T}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ を量子確率微分

方程式の解を通して構成している。これを離散時間でまねると"量子確率差分方程式"を通して dilation $\{\hat{T}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を作れば良いということになる。そこで次の差分方程式を考える：

$$U_{k+1} - U_k = U_k(\delta_k^+ A \delta_k^- + \delta_k^+ B + C\delta_k^- + D\delta_k^\bullet) \qquad (*)$$

ここで、係数 A, B, C, D は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の元とする。これは [KuS] で扱われている量子確率微分方程式をまねたものである。この差分方程式 $(*)$ の解 $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ がユニタリ過程であるための必要十分条件は係数 A, B, C, D を並べてできる行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ がユニタリであることである。単調 Fock 空間 Φ におけるシフト作用素 $S_n : \Phi \to \Phi$ を、基底ベクトル e_σ への作用により、

$$S_n e_{(i_1 > i_2 > \cdots > i_r)} = e_{(i_1 - n > i_2 - n > \cdots > i_r - n)}$$

と定める。そして $I \otimes S_n$ を再び S_n と書く。差分方程式 $(*)$ の解 $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ がユニタリ過程であるとき、それはシフト作用素 $\{S_n\}$ に関してユニタリ・コサイクルであること：

$$U_{n+k} = U_n S_n^{-1} U_k S_n \qquad (n, k \geq 0)$$

が直ちにわかる。よって、作用素 $\hat{T}_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi)$ を

$$\hat{T}_k(Z) = U_n S_n^{-1} Z S_n U_n^* \qquad (Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi))$$

とおくと、$\{\hat{T}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\Phi)$ の自己同型半群であり、更に、自己同型群に拡張されることがわかる。以上の考察から次を得る。

命題 5. 半群 $\{T_k\}$ が差分方程式 $(*)$ による stochastic dilation を持つための必要十分条件は次を満たすことである：

(1) $\exists C, \exists D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $s.t.$ $T_1(X) = CXC^* + DXD^*$ $(X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

(2) 更に、$\exists A, \exists B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $s.t.$ $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$:ユニタリ行列.

離散時間で考えているので、$\{T_k\}$ は完全正写像 T_1 から決まるが、一般に、単位元を保つ完全正写像 $T_1 : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は、適当な有界作用素 $\{W_i\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\sum_i W_i W_i^* = I$, を用いて

$$T_1(A) = \sum_i W_i A W_i^* \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

と書けることがわかっている。よって命題 5 によれば、差分方程式 $(*)$ で stochastic dilation 可能であるものはごく一部の半群であるということになる。

むすび 連続時間単調 Fock 空間の離散モデル（ランダムウォーク-モデル）である離散時間単調 Fock 空間において量子確率解析の離散アナローグをある程度展開できることがわかっ

た。連続時間単調 Fock 空間における非可換ブラウン運動は、離散時間単調 Fock 空間における非可換ランダムウォークの自然な極限と考えられるので、連続時間単調 Fock 空間において“量子確率解析”を展開できるものと期待される。

参考文献

[ApH] D. B. Applebaum and R. L. Hudson, *Fermion Ito's formula and stochastic evolution*, Commun. Math. Phys. **96** (1986), 473-496.

[BSW] C. Barnett, R. F. Streater and I. F. Wilde, *The Ito-Clifford integral*, J. Funct. Anal., **48** (1982), 172-212.

[HuP] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Quantum Ito's formula and stochastic evolution*, Commun. Math. Phys., **93** (1984), 301-323.

[KuS] B. Kümmerer and R. Speicher, *Stochastic integration on the Cuntz-algebra* $\mathcal{O}_\infty$, J. Funct. Anal., **103** (1992), 372-408.

[Mey] P. A. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Springer LNM, vol. 1538, 1993.

[Mur1] N. Muraki, *A new example of noncommutative "de Moivre-Laplace theorem,"* preprint.

[Mur2] N. Muraki, *Noncommutative Brownian motion in the monotone Fock space*, preprint.

[Oba] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space*, Springer LNM, vol. 1577, 1994.

[OhP] M. Ohya and D. Petz, *Quantum Entropy and Its Use*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Par] K. R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhaüser, Basel, 1992.

[Spe] R. Speicher, *A new example of 'independence' and 'white noise,'* Prob. Th. Rel. Fields, **84** (1990), 141-159.

[Ume] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebra*, Tôhoku Math. J., **6** (1954), 177-181.

[VDN] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema and A. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Series, AMS, 1992.

DEPARTMENT OF APPLIED SCIENCE,
FACULTY OF ENGINEERING,
YAMAGUCHI UNIVERSITY,
UBE CITY, YAMAGUCHI 755, JAPAN
E-mail address: `muraki@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp`