

## 異常磁気能率を伴うディラック方程式

北大理 小栗栖 修 (Osamu Ogurisu)

## 1 荷電粒子と帯磁粒子の基底状態

1992 年に V. V. Semenov は [1] で次のように述べている：2次元の静電場において、異常磁気能率  $\mu$  をもつスピン  $1/2$  の電氣的に中性のディラック粒子はその基底状態において  $N - 1$  重の重複度をもつ；ここで  $N$  は、 $\mu$  と電場の全電荷  $Q$  との積の絶対値  $|\mu Q|$  を超えない最大の整数である。(後で証明するように、実際は、基底状態の重複度は  $2(N - 1)$  となる。Corollary 3.5、Remark 3.6 と Remark 3.7 を参照。) よく知られているように多くの量子力学のモデルの基底状態は1つであることが証明できるので、このこととの比較からも Semenov のあつまっているモデルは興味深いのだが、さらに Y. Aharonov と A. Casher が [2] で議論している現象に似ていると Semenov は指摘している。Aharonov らの述べている現象は“Aharonov-Casher の定理”と呼ばれ、スピン  $1/2$  の荷電粒子が磁場内を運動する場合にその基底状態が縮退し、その重複度が  $\tilde{N} - 1$  であるという主張である。ここで  $\tilde{N}$  は、粒子の電荷  $q$  と総磁束の大きさ  $\Phi$  との積の絶対値  $|q\Phi|$  を超えない最大の整数である。

以下の節では、Semenov が [1] で議論しているディラックのハミルトニアン  $H_D$  に、なぜ（偶数値の）縮退度  $2(N-1)$  の基底状態があるのかを明らかにしていく。結論を先に述べておくと、 $H_D$  がある 2 つのディラック-ワイル作用素の直和にユニタリ同値であることから説明される。このディラック-ワイル作用素のおのおのが Aharonov-Casher の定理にしたがって  $N-1$  重の縮退した基底状態をもっているのである。さらに、この同値性と、スピン  $1/2$  のシュレーディンガー作用素のスペクトルの分類に関する結果（重川 [3]）を用いて  $H_D$  のスペクトルの分類をおこなうことにする。

## 2 ユニタリ同値性

まず、2次元の静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_1(\mathbf{r}), E_2(\mathbf{r}))$ ,  $\mathbf{r} = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $E_1, E_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ , 内の異常磁気能率  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  をもちスピン  $1/2$  である中性粒子の量子系を考える。以下では、通常どおり、 $p_j = -i\partial/\partial x^j$ ,  $j = 1, 2$ , パウリのスピン行列を

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。さらに定数  $m > 0$  を粒子の質量とする。

ここで、ディラックのハミルトニアン  $H_D$  を [1, 4] に従い、次のように定義する：

$$H_D = \begin{pmatrix} m & A^* \\ A & -m \end{pmatrix}$$

ただし、 $H_D$  は  $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^4)$  に作用し、

$$A = \sum_{j=1,2} \sigma^j (p_j + i\mu E_j)$$

は  $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$  に作用する。ここで仮定により  $E_1, E_2$  は  $C^\infty$  の関数なので、Chernoff の定理 [5] により、 $H_D$  は  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^4)$  上で本質的に自己共役な作用素となる。以下では  $H_D \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^4)$  の閉包も同じ記号  $H_D$  で表すことにする。

次にディラック-ワイル作用素を定義しよう。 $\mathbf{A} = A_1 dx^1 + A_2 dx^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の実 1 形式とする。この  $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルを表す。この  $\mathbf{A}$  内を運動するスピン 1/2 で電荷  $q$  をもつ粒子を表すディラック-ワイル作用素  $D(q\mathbf{A})$  は次で定義される：

$$D(q\mathbf{A}) = \sum_{j=1,2} \sigma^j (p_j - qA_j)$$

この  $D(q\mathbf{A})$  は  $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$  に作用する。もし、 $A_1, A_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  ならば、この  $D(q\mathbf{A})$  も  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$  で本質的に自己共役となる [5]。この場合も、 $D(q\mathbf{A}) \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$  の閉包も同じ記号  $D(q\mathbf{A})$  で表すことにしよう。

最後に  $H_D$  と  $D(\pm q\mathbf{A})$  の直和とのユニタリ同値を与える  $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^4)$  上のユニタリ作用素  $U$  を

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する。

以上で、主定理を述べる準備ができた。

**Theorem 2.1** 実 1 形式  $\mathbf{A}$  を  $\mathbf{A} = E_2 dx^1 - E_1 dx^2$  と定義する。このとき、作用素としての等式

$$U^* H_D U = \begin{pmatrix} D(\mu\mathbf{A}) + m\sigma^3 & 0 \\ 0 & D(-\mu\mathbf{A}) - m\sigma^3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

が成立する。

*Proof:*  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^4)$  上では、直接計算により (1) が成り立つことを確かめられる。 $E_1, E_2$  が  $C^\infty$  の関数なので  $H_D$  と (1) の右辺は本質的自己共役であり [5]、ユニタリ作用素  $U$  は  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^4)$  上の全単射だから等式 (1) が閉包をとっても成立する。  $\square$

*Remark 2.2* C. R. Hagen [6] もここで扱っている粒子の同等性を議論している。彼はディラック行列の 2 次元の表現とスピンパラメーター  $s \in \{\pm 1\}$  を用いて議論しているが、それはわれわれとは異なる 4 次元の表現を用いていることと同等である。しかし、彼の議論では、変数変換を通して 2 つのディラック方程式の解が同じ形の微分方程式を満たすことを示すという手段で同等性を示しているので、2 つの方程式関係が十分に明らかになったとは言いがたい。

また、Hagen の選んだ (パラメーター  $s$  を含む) ディラックのハミルトニアンは、Aharonov と Casher が [7] で見いだした非相対論的ハミルトニアン  $H_{NR}$  との関係が自明でない。しかし、 $H_D$  と、ここで扱っている 2 種類の粒子の同等性に着目されるきっかけともなった  $H_{NR}$  との関係は軽視できない問題である。

一方、われわれがここで選んだ4次元表現のディラックのハミルトニアンは同値性がユニタリ変換で与えられるという明瞭さに加えて、次に説明するように  $H_{NR}$  が極限操作で得られるという利点をもっている。W. Hunziker [8] の示した定理により、われわれのハミルトニアン  $H_D$  の非相対論的極限  $c \rightarrow \infty$  ( $c$  は光速) は次の形である：

$$\lim_{c \rightarrow \infty} H_D = \begin{pmatrix} H_{NR} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$H_{NR} = \frac{1}{2m} A^* A$$

が作用素の等式として成り立つ。つまり、われわれのディラックのハミルトニアン  $H_D$  の非相対論的極限として、Aharonov 等の得た非相対論的ハミルトニアン  $H_{NR}$  が自然に現われる。なお、この文では自然単位系  $c = 1$  を取っている。

*Remark 2.3* Aharonov と Casher は [7] で異常磁気能率と電場の相互作用によって波動関数に位相のずれが生じることを論じている。これは有名な Aharonov-Bohm (AB) 効果に対応し、Aharonov-Casher (AC) 効果と呼ばれ実験的にも確認されている。この2つの効果の関係もユニタリ作用素  $U$  を用いることで説明が出来る。ただし、いずれの効果もポテンシャルに特異性があることに本質があり、ユニタリ同値性を示すときには定義域などに注意が必要である。

### 3 応用：基底状態、本質的スペクトルの分類

2次元の磁場内のスピン 1/2 の荷電粒子についての知識を援用することで、Theorem 2.1 の系として、 $H_D$  のスペクトルについて調べよう。その一つは、最初に述べたディラックのハミルトニアン  $H_D$  の基底状態の重複度に関する Semenov の定理を証明することである。また、スピン 1/2 の荷電粒子のスペクトルに関しての詳しい結果（重川 [3]）を用いて  $H_D$  の本質的スペクトルの分類ができる。以降、

$$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}), \quad \text{s.t.} \quad E_j = -\frac{\partial \phi}{\partial x^j}, \quad j = 1, 2.$$

となる関数  $\phi$  の存在を仮定する。この  $\phi$  はもちろんスカラーポテンシャルに対応する。さらに、この節を通じて  $\mathbf{A} = E_2 dx^1 - E_1 dx^2$  とおこう。このとき、 $d\mathbf{A} = \Delta\phi dx^1 \wedge dx^2$  であり、特に  $-\Delta\phi/4\pi$  が単位体積当たりの電荷密度を表すことを注意しておきたい。

超対称性を用いた次の補題があとで必要になる。

**Lemma 3.1 (Shigekawa, Proposition 2.5 [3])**  $H_1, H_2$  をヒルベルト空間、 $S : H_1 \rightarrow H_2$  を稠密な定義域を有する閉線形作用素、 $m$  を非負の定数とし、

$$T = \begin{pmatrix} m & S^* \\ S & -m \end{pmatrix}$$

で  $H_1 \oplus H_2$  に作用する作用素  $T$  を定義する。このとき、

$$\sigma(T) = \{\sqrt{m^2 + s}; s \in \sigma(S^*S)\} \cup \{-\sqrt{m^2 + s}; s \in \sigma(SS^*)\},$$

$$\sigma_{ess}(T) = \{\sqrt{m^2 + s}; s \in \sigma_{ess}(S^*S)\} \cup \{-\sqrt{m^2 + s}; s \in \sigma_{ess}(SS^*)\}$$

が成り立つ。ここで、 $\sigma(A)$  と  $\sigma_{ess}(A)$  でそれぞれ作用素  $A$  のスペクトルと本質的スペクトルを表す。

一般に次が成り立つことも注意しておこう。

**Lemma 3.2 (Deift, [9])**

$$\sigma(SS^*) \setminus \{0\} = \sigma(S^*S) \setminus \{0\},$$

$$\sigma_{ess}(SS^*) \setminus \{0\} = \sigma_{ess}(S^*S) \setminus \{0\}$$

以上で  $H_D$  の本質的スペクトルについての次の系が証明できる。

**Corollary 3.3** 簡単のため、 $\mu = 1$  とする。

(i) もし  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$  ならば、

$$\sigma(H_D) = \sigma_{ess}(H_D) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$$

である。

(ii) もし  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 1$  ならば、

$$\sigma_{ess}(H_D) = \{\pm\sqrt{2k+m^2}; k \in \mathbb{N}\} \cup \{m\}$$

であり、 $m$  は孤立点である。

(iii) もし  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$  ならば、 $\sigma(H_D)$  は  $m$  をのぞいて離散スペクトルであり、 $m$  は孤立点である。

*Proof:* まず、最初に (ii) を示そう。[3] の Example 4.1 とその証明から、

$$\sigma_{ess}(D(\pm\mathbf{A})^2) = \{2(k-1); k \in \mathbb{N}\}$$

であること、 $0$  が孤立点であること、さらに  $\ker D(\pm \mathbf{A}) \subset \ker(\sigma^3 \mp 1)$  であることがわかる。したがって、Lemma 3.1 を  $H_D = D(\pm \mathbf{A}) \pm m\sigma^3$  に適用することで、

$$\sigma_{\text{ess}}(D(\pm \mathbf{A}) \pm m\sigma^3) = \{+\sqrt{2k+m^2}, -\sqrt{2k+m^2}; k \in \mathbb{N}\} \cup \{m\}$$

であり、 $m$  が孤立した本質的スペクトルであるとわかる。したがって、Theorem 2.1 により望む結果を得る。(i) と (iii) の場合も同様にして証明できる。

□

*Remark 3.4* Corollary 3.3 の述べるところは、電荷密度の無限遠での漸近挙動によって  $H_D$  のスペクトルが分類できるということである。これは、スピン  $1/2$  の荷電粒子のスペクトルが磁場の無限遠での漸近挙動によって分類できる (cf. [3]) ことに対応し、これも荷電粒子と帯磁粒子のユニタリ同値性から導かれた対応である。

次に  $H_D$  の基底状態について調べよう。まず、符号関数を

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0 \\ -1, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

で定義する。

**Corollary 3.5**  $0$  でない極限  $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} e^{\phi(\mathbf{r})}/|\mathbf{r}|^{-\nu}$  が存在するような定数  $\nu \in \mathbb{R}$  があると仮定し、 $N$  を  $N < |\mu\nu|$  を満たす最大の整数とする。そのとき、

$$\dim \ker(H_D^2 - m^2) = \max\{2(N-1), 0\},$$

$$\ker(H_D^2 - m^2) = \ker(H_D - \epsilon(\mu\nu)m)$$



が成り立つ。

*Proof:* 一般に、自己共役作用素  $T$  にたいして  $\ker T^2 = \ker T$  が成り立つので、[10] の Theorem 3.1 と Theorem 3.2 により、

$$\dim \ker D(\pm\mu\mathbf{A}) = \dim \ker D(\pm\mu\mathbf{A})^2 = \max\{N - 1, 0\},$$

$$\ker D(\pm\mu\mathbf{A}) = \ker D(\pm\mu\mathbf{A})^2 \subset \ker(\sigma^3 \mp \epsilon(\mu\nu))$$

である。さらにパウリ行列の反可換性と Theorem 2.1 により

$$UH_D^2U = D(\mu\mathbf{A})^2 \oplus D(-\mu\mathbf{A})^2 + m^2$$

と計算できるので、望む結果を得る。  $\square$

*Remark 3.6* Corollary 3.5 は次のように言い換えられる:まず、恒に  $\sigma(H_D) \subset (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$  が成り立つことを注意しておく。

1. もし  $\epsilon(\mu\nu) = 1$  ならば、基底状態はエネルギー  $m$  をもち、その縮退は  $\max\{2(N - 1), 0\}$  である。
2. もし  $\epsilon(\mu\nu) = -1$  ならば、 $m$  は固有値ではないが、 $-m$  は重複度  $\max\{2(N - 1), 0\}$  の固有値である。

なお、 $m$  や  $-m$  は一般には孤立していない。

$$\sigma(H_D) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty) \quad (2)$$

が成り立つ場合もある。[10] の Remark 3.5 で与えられた例がその一例であり、電荷密度関数  $-\Delta\phi/4\pi$  が有界な台を持つような場合も Corollary 3.5 の条件を満たしながら (2) が成り立つ例となる。

*Remark 3.7* Section 1 でも述べたように Semenov も [1] で  $H_D$  の基底状態について調べている。しかし、基底状態の個数を調べるにあたって彼はスピン成分を数え落したようで、個数については “this particle has  $(N - 1)$ -fold degeneracy of the ground state” と述べてしまっている。

*Remark 3.8* 定数  $N$  はスカラーポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  の無限遠での漸近挙動によって決まっています、この定数  $N$  は電荷密度  $-\Delta\phi/4\pi$  の全平面での積分値、すなわち全電荷の大きさに対応する。詳細には述べなかったが、2次元の磁場内のスピン  $1/2$  の荷電粒子の基底状態の数  $n$  に関する Aharonov-Casher の定理でも、 $n$  は厳密には全磁束の大きさではなく、磁場（を与える補助スカラーポテンシャル）の無限遠での漸近挙動で決まっています。

#### 参考文献

- [1] V. V. Semenov. Ground state of spin-1/2 neutral particle with an anomalous magnetic in a two-dimensional electrostatic field. *J. Phys. A:Math. Gen.*, 25:L619–L621, 1992.
- [2] Y. Aharonov and A. Casher. Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field. *Phys. Rev. A*, 19(6):2461–2462, June 1979.
- [3] Ichiro Shigekawa. Spectral properties of Schrödinger operators with magnetic fields for a spin 1/2 particle. *J. Funct. Anal.*, 101:255–285, 1991.

- [4] W. J. Pauli. Relativistic field theories of elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 13:203–232, 1941.
- [5] Paul R. Chernoff. Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations. *J. Funct. Anal.*, 12:401–414, 1973.
- [6] C. R. Hagen. Exact equivalence of spin-1/2 Aharonov-Bohm and Aharonov-Casher effects. *Phys. Rev. Letters*, 64(20):2347–2349, 1990.
- [7] Y. Aharonov and A. Casher. Topological quantum effects for neutral particles. *Phys. Rev. Letters*, 53(4):319–321, 1984.
- [8] W. Hunziker. On the nonrelativistic limit of the Dirac theory. *Comm. Math. Phys.*, 40:215–222, 1975.
- [9] P. A. Deift. Applications of a commutation formula. *Duke Math. J.*, 45(2):267–310, 1978.
- [10] Osamu Ogurusu. Ground state of a spin 1/2 charged particle in an even-dimensional magnetic field. *Lett. Math. Phys.*, 29:249–257, December 1993.