

SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE
BOUNDED SYMMETRIC DOMAIN OF *AIII* TYPE
AND THE PENROSE TRANSFORM

(*AIII* 型有界対称領域上の偏微分方程式系
— ペンローズ変換による大域解の構成)

神戸大学理学部 関口英子 (HIDEKO SEKIGUCHI)

ABSTRACT.

この報告集で述べた主定理では $U(n, n)$ の無限次元表現の二つの異なる幾何的实现, すなわち, 非コンパクト複素等質多様体上の Dolbeault コホモロジー群から *AIII* 型の有界対称領域上の正則関数の空間の間の intertwining operator としてペンローズ変換を構成した。ペンローズ変換の像は $k+1$ 次の偏微分方程式系 (\mathcal{M}_k) を満たすことを証明する。逆に, 微分方程式系 (\mathcal{M}_k) の任意の解は, ペンローズ変換の像として一意的に得られることも概均質ベクトル空間の理論を使って証明した。さらに, 微分方程式系 (\mathcal{M}_k) を用いて, 青本-Gelfand の超幾何微分方程式系の高階の系への拡張を与え, 有界対称領域上のすべての正則解を構成し, 大域解の有限次元定理を証明する。

§1. 主結果の説明

はじめに複素グラスマン多様体 $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ の幾何を復習しよう。複素ベクトル空間 \mathbb{C}^{2n} の k 次元部分空間全体は $k(2n-k)$ 次元のコンパクトな複素多様体である。これをグラスマン多様体 $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ と表す。一般線型群 $GL(2n, \mathbb{C})$ は \mathbb{C}^{2n} に線型に作用するので, k 次元部分空間を k 次元部分空間に移す。すなわち, $GL(2n, \mathbb{C})$ はグラスマン多様体に作用する。この作用は推移的であり, 従ってグラスマン多様体 $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ は, $GL(2n, \mathbb{C})$ の等質多様体となる。 k 次元部分空間 $W := \sum_{j=1}^k \mathbb{C}e_j$ を保つ $GL(2n, \mathbb{C})$ の部分群を $Q(k)$ とすると,

$$Gr_k(\mathbb{C}^{2n}) \simeq GL(2n, \mathbb{C})/Q(k) =: G_{\mathbb{C}}/Q(k)$$

と表せる。ここで,

$$Q(k) := \{g = (g_{ij}) \in GL(2n, \mathbb{C}) : g_{ij} = 0, k+1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq k\}$$

である。 $Q(k)$ は $GL(k, \mathbb{C}) \times GL(2n-k, \mathbb{C})$ を Levi 部分群とする $GL(2n, \mathbb{C})$ の極大放物型部分群である。

次に、 \mathbb{C}^{2n} に符号 (n, n) の不定値エルミート形式

$$(z, y)_{n,n} := z_1 \overline{y_1} + \cdots + z_n \overline{y_n} - z_{n+1} \overline{y_{n+1}} - \cdots - z_{2n} \overline{y_{2n}}$$

を入れる。この不定値エルミート形式 $(,)_{n,n}$ を不変にする $GL(2n, \mathbb{C})$ の部分群を $G := U(n, n)$ とする。すなわち、 $U(n, n)$ は

$$G := U(n, n) = \left\{ g \in GL(2n, \mathbb{C}) : g^* \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \right\}$$

で与えられる簡約リー群である。

整数 k を $0 \leq k \leq n$ ととる。さて、 k 次元部分空間にこの不定値エルミート形式を制限したとき、正定値になるような k 次元部分空間全体の集合は $Gr_k(\mathbb{C}^{2n})$ の開集合となる。 $W = \sum_{j=1}^k \mathbb{C}e_j$ に上の不定値エルミート形式を制限すると、 $0 \leq k \leq n$ のとき正定値なので、この開集合は空ではない。この開集合には $U(n, n)$ が作用し、かつ、この作用が推移的であることは線型代数の簡単な議論で分かる。 $W = \sum_{j=1}^k \mathbb{C}e_j (\in Gr_k(\mathbb{C}^{2n}))$ における $U(n, n)$ の固定部分群を $L(k) = U(k) \times U(n-k, n)$ と書く。すなわち、 $L(k) = G \cap Q(k)$ である。従って、この開集合は $G/L(k) = U(n, n)/U(k) \times U(n-k, n)$ と表される。このようにして、

$$G/L(k) \subset G_{\mathbb{C}}/Q(k)$$

という open embedding ができる。これはエルミート対称空間に関する Borel embedding の一般化である。(今の場合、 $G/L(k)$ は不定値エルミート計量をもつ半単純対称空間になっている。)

特に, $n = k = 1$ の場合はよく知られた埋め込み

$$\begin{array}{ccc}
 U(1,1)/U(1) \times U(1) \subset GL(2, \mathbb{C}) / \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} & & \\
 \simeq || & & || \simeq \\
 \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} & & P^1\mathbb{C} \\
 \text{単位円板} & & \text{ガウス球面}
 \end{array}$$

となる。

$G_{\mathbb{C}}/Q(k)$ の開集合として複素構造を $G/L(k)$ に定義すると, この複素構造は G -不変である。このようにして非コンパクトな複素等質多様体 $G/L(k)$ が得られた。

次に $L(k)$ の 1 次元表現を定義する。 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して,

$$\nu_m^{(k)}: L(k) \simeq U(k) \times U(n-k, n) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto (\det a)^m$$

とする。但し, $a \in U(k)$, $d \in U(n-k, n)$ である。簡単のため, この一次元表現 $(\nu_m^{(k)}, \mathbb{C})$ を \mathbb{C}_m と書くことにする。

主定理.

i) G の作用と可換な連続写像

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \rightarrow \mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k)$$

が構成される。

ii) \mathcal{R} は単射である。

iii) $\text{Image}(\mathcal{R}) \subset \text{Sol}(\mathcal{M}_k)$. ここで, $\text{Sol}(\mathcal{M}_k)$ は以下で定義する偏微分方程式系の
大域解の空間である。

iv) $\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)_K \rightarrow \text{Sol}(\mathcal{M}_k)_K$ は全単射写像を与える。

注意. (iv) の結果より,

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \simeq \text{Sol}(\mathcal{M}_k)$$

なる全単射が得られる (Schmid の maximal globalization の結果を使う)。

§2. 歴史

有界対称領域や最高ウェイト加群自身についてはいろいろな文献があるが、ここでは幾何的実現を結び付ける intertwining operator であるペンローズ変換に関連したいろいろな人の結果を簡単に紹介する。

重力場のない場の方程式についてペンローズは, twistor construction といわれる方法で, 一気に多くの解を見つけた ([P])。

定式化

ペンローズの構成を数学的に整備したのが, Eastwood-Penrose-Wells ([EPW]) でこれは今回の主結果の $n = 2, k = 1$ の場合, すなわち, $G = U(2, 2), L = U(1) \times U(1, 2)$ の場合となる。最近のサーベイでは, Eastwood の [E] がある。

ペンローズ変換に関する文献の多くは, ペンローズ変換が単射かどうか, 像がどのような微分方程式を満たすかについてであり, 全射性, すなわち, 与えられた微分方程式の解の全てがペンローズ変換の像として書けることを証明している文献はあまりないようである。

単射性

単射性は先の [EPW], [Ma1], [Gi] が示している。また, [P-R] は代数幾何的な証明で小平 - Spencer の変形理論を用いた証明をしているようである。

像の満たす微分方程式系

ペンローズ変換の像がある微分方程式を満たしているという証明は, 先の [EPW] がある。また, Mantini の一連の論文 ([Ma1], [Ma3]) では, 最高ウェイトベクトルのペンローズ変換の像の積分公式等を用いて示し, Gindikin は積分幾何的な手法で示している ([Gi])。

全射性

ペンローズ変換の全射性については, 次元の低い場合, すなわち, $n = 2, k = 1$ の場

合に 2 通りの証明が知られている。その 1 つは Eastwood-Penrose-Wells の結果で相対コホモロジーを用いるものであり ([EPW]), もう 1 つは Gindikin の積分幾何の手法で逆変換を構成するものである ([Gi])。

§3. ペンローズ変換の定義

非コンパクトな複素多様体 $G/L(k)$ は, コンパクトな複素多様体であるグラスマン多様体 $K/L(k) \cap K$ を部分多様体として含む。この埋め込み写像を

$$i: K/L(k) \cap K \rightarrow G/L(k), \quad x(L(k) \cap K) \mapsto xL(k)$$

と名付けよう。各 $g \in G$ に対して左移動

$$l_g: G/L(k) \rightarrow G/L(k) \quad xL(k) \mapsto gxL(k)$$

と定義する。このとき, 写像 $\tilde{\mathcal{R}}$ を

$$\tilde{\mathcal{R}}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n) \times G \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K_{L(k) \cap K} \times \mathbb{C}_n) \quad ([\omega], g) \mapsto [i^* l_g^* \omega]$$

で定義する。この写像は, $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)}$ の代表元 ω をとって, $g \in G$ の左移動で引き戻し, コンパクト部分多様体に制限してコホモロジークラスをとるというものである。この ω が $\bar{\partial}$ -closed ならば, $i^* l_g^* \omega$ も $\bar{\partial}$ -closed, また ω が $\bar{\partial}$ -exact ならば, $i^* l_g^* \omega$ も $\bar{\partial}$ -exact である。従って, $\tilde{\mathcal{R}}$ はコホモロジーの空間 $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)}$

からコホモロジーの空間 $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K_{L(k) \cap K} \times \mathbb{C}_n)$ への写像として well-defined である。

$\tilde{\mathcal{R}}$ は見方を変えてみると, コホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times \mathbb{C}_n)_{L(k)}$ から G 上の

$H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K_{L(k) \cap K} \times \mathbb{C}_n)$ -値の関数としてみなすことができる。 $\tilde{\mathcal{R}}$ は右からの K の

作用を次の意味で保つ:

$$\tilde{\mathcal{R}}([\omega], gh) = h^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{R}}([\omega], g) \quad (h \in K).$$

ここで, $h^{-1} \cdot (\cdot)$ は K の $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K_{L(k) \cap K} \times \mathbb{C}_n)$ への自然な作用である。すなわち,

$\tilde{\mathcal{R}}([\omega], \cdot)$ は $G \times_K \mathbb{C}_k \rightarrow G/K$ の切断を与える。従って,

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \rightarrow \mathcal{E}(G \times_K H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K_{L(k) \cap K} \times \mathbb{C}_n)) \quad [\omega] \mapsto \tilde{\mathcal{R}}([\omega], \cdot)$$

が定義された。

$H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n)$, $\mathcal{E}(G \times_K H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K_{L(k) \cap K} \times \mathbb{C}_n))$ はそれぞれ自然に G の表現空間となっているが, 定義より \mathcal{R} は G -intertwining operator であることが容易に分かる。

またコンパクト群に関する Borel-Weil-Bott の定理より $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(K_{L(k) \cap K} \times \mathbb{C}_n)$ は $K = U(n) \times U(n)$ の表現として, $(\det)^k \boxtimes 1 \equiv (\nu_k^{(n)}, \mathbb{C}): U(n) \times U(n) \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$ という 1 次元表現と同型である。この表現は \mathbb{C}_k と略記するという約束だったので, この記法を使うと **Penrose** 変換

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_{L(k)} \mathbb{C}_n) \rightarrow \mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k)$$

が定義された。

§4. $Sol(\mathcal{M}_k)$ の定義

$G/K = U(n, n)/U(n) \times U(n)$ は有界対称領域として

$$G/K \simeq D := \{Z \in M(n, \mathbb{C}) : I_n - Z^*Z \gg 0\}$$

と表される。 $n = k = 1$ の場合は,

$$U(1, 1)/U(1) \times U(1) \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

となるので一般の場合は $n = k = 1$ の高次元化となっている。 $G/K \simeq D$ の作用を

$$G \curvearrowright D \simeq G/K$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: Z \mapsto (c + dZ)(a + bZ)^{-1}$$

G/K はユークリッド空間と微分同相なので、 G/K 上の直線束は global に自明化できる。実際、 G/K と有界対称領域 D を先に同一視したやり方は、Bruhat 分解を用いて、 G/K から複素リー環のべき零リー環への切断によって定義したが、この写像によって直線束 $G \times_K \mathbb{C}_k$ は D 上自明化することができる。自明化は正則なカテゴリーで行われるので、 C^∞ -切断、正則切断のそれぞれについて

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k) &\simeq C^\infty(D) \\ \cup &\quad \cup \\ \mathcal{O}(G \times_K \mathbb{C}_k) &\simeq \mathcal{O}(D) \end{aligned}$$

という函数空間の同一視を行うことができる。 G -共変な直線束 $G \times_K \mathbb{C}_k \rightarrow G/K$ の C^∞ -切断の空間 $\mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k)$ には、 G が函数の引き戻しとして作用する。同型写像 $\mathcal{E}(G \times_K \mathbb{C}_k) \simeq C^\infty(D)$ を通じて、この作用を $C^\infty(D)$ に定義すると、 $g^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(n, n) \text{ に対して}$$

$$\tilde{\pi}_{n,k}(g)F(Z) = \det(a + bZ)^{-k} F((c + dZ)(a + bZ)^{-1})$$

となる。このようにして、 $G = U(n, n)$ の無限次元表現 $(\tilde{\pi}_{n,k}, C^\infty(D))$ が $k \in \mathbb{Z}$ に対して定義された ($k \in \mathbb{C}$ では、 $U(n, n)$ の普遍被覆群の表現としては、定義される。なお、以下では $k = 0, \dots, n$ を主に扱う)。

D の global な座標を $(z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする。 $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ をそれぞれ $k+1$ 個の元からなる部分集合とすると D 上の $k+1$ 階の偏微分作用素 $P(I, J)$ を

$$P(I, J) = \det \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)_{i \in I, j \in J}$$

で定義する。更に、 $F \in C^\infty(D)$ に対し、微分方程式系 (\mathcal{M}_k) を

$$(\mathcal{M}_k) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} F(Z) = 0 & (1 \leq i, j \leq n) & (\mathcal{M}_{k-1}) \\ P(I, J)F(Z) = 0 & I, J \subset \{1, \dots, n\} \quad |I| = |J| = k+1 & (\mathcal{M}_{k-2}) \end{cases}$$

と定義する。最初の偏微分方程式は Cauchy-Riemann の微分方程式なので, (\mathcal{M}_k) の解は D 上の正則関数であることに注意しよう。

注意. 定義で $k = 0, n$ の両極端な場合を考えよう。

f が (\mathcal{M}_n) を満たす。 $\Leftrightarrow f$ は正則関数。

f が (\mathcal{M}_0) を満たす。 $\Leftrightarrow f$ は定数。

(\mathcal{M}_k) を満たす解の空間を

$$\text{Sol}(\mathcal{M}_k) := \{F \in C^\infty(D) : F \text{ は } (\mathcal{M}_k) \text{ の解}\} \subset \mathcal{O}(D)$$

とする。

注意. Laplace の展開公式より次の包含関係が分かる。

$$\mathbb{C} = \text{Sol}(\mathcal{M}_0) \subset \text{Sol}(\mathcal{M}_1) \subset \cdots \subset \text{Sol}(\mathcal{M}_n) = \mathcal{O}(D)$$

注意. $n = 2, k = 1$ のとき, 簡単のために $\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書けば,

$$(\mathcal{M}_1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial d} - \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \right) F = 0$$

なる微分方程式となる。

注意. $k = 1$ の場合, (\mathcal{M}_1) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{il} \partial z_{jm}} - \frac{\partial^2}{\partial z_{im} \partial z_{jl}} \right) F = 0 \quad (1 \leq i, j, l, m \leq n)$$

となり, これは 青本 -Gelfand の超幾何微分方程式の主要部分を形作っている。

§5. 解の有限次元性定理

§4 で定義した微分方程式系は, ほぼ青本 -Gelfand の超幾何微分方程式を与えている。正確には, G の Cartan 部分群の指標を一つ定め, それに従う解 (この条件

は容易に一階の微分方程式, すなわち, オイラーの微分方程式で表される) を (\mathcal{M}_k) につけ加えることにより, 本来の形の Gelfand の超幾何微分方程式が得られる。Penrose 変換は G -共変なので, 我々の主定理より, すべての解は同じ指標に従う Dolbeault コホモロジーの空間の Penrose 変換の像として得られる。 k が 1 より大きいときは, Gelfand の超幾何微分方程式よりさらに一般の微分方程式系になるが, その大域解の空間は有限次元であることを証明しよう。このために次のユニタリ表現論の結果を復習する。

次の設定を考える:

G : 線型簡約 Lie 群

G' : G における簡約な閉部分群

π : G のユニタリ表現.

このとき, 一般に $\pi|_{G'}$ は G' の表現として既約ではなく, G' の既約表現の直積分 (連続和と離散和) として表される。連続和が現れないような制限 $\pi|_{G'}$ の理論が小林俊行氏によって展開され ([Ko4], [Ko5]), 特に次の形の条件が与えられた。

Fact ([Ko4] Theorem 4.1). $\text{Cone}(\pi)$ を G のユニタリ表現 π によって定義される閉錐, $\text{Subset}(G')$ を G で簡約な閉部分群 G' で定義される部分集合とする。(それぞれ同じ Cartan subalgebra の部分集合として定義される。)

$$\text{Cone}(\pi) \cap \text{Subset}(G') = \{0\}$$

ならば,

$$\text{制限 } \pi|_{G'} \simeq \sum_{\tau \in \widehat{G'}}^{\oplus} n(\tau)\tau \text{ は離散直和に分解され,}$$

$$\text{重複度 } n(\tau) = \dim \text{Hom}_{G'}(\tau, \pi|_{G'}) < \infty \quad (\forall \tau \in \widehat{G'}) \text{ が成り立つ.}$$

$\mathfrak{h} := \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{C}E_{ii}$ とおくと, \mathfrak{h} は $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n, n)$ の fundamental Cartan subalgebra である。 \mathfrak{h} を Lie 環とする $U(n, n)$ の Cartan 部分群を H と表すことにす

る。 H の任意の指標は次の形で書くことができる: $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ に対して,

$$\chi_\nu: H \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \exp\left(\sum_{i=1}^{2n} \sqrt{-1} t_i E_{ii}\right) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^{2n} \sqrt{-1} \nu_i t_i\right).$$

また, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ に対して

$$\begin{aligned} H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_L \mathbb{C}_n)(\nu) &:= \{v \in H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_L \mathbb{C}_n) : \pi_{n,k}(h)v = \chi_\nu(h)v \ (h \in H)\}, \\ \text{Sol}(k)(\nu) &:= \{F \in \text{Sol}(\mathcal{M}_k) : \tilde{\pi}_{n,k}(h)F = \chi_\nu(h)F \ (h \in H)\} \end{aligned}$$

と定義する。 Penrose 変換は $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_L \mathbb{C}_n)$ から $\text{Sol}(\mathcal{M}_k)$ への全単射な intertwining operator であるので (§1 の主定理, 注意を参照), $\nu \in \mathbb{Z}^{2n}$ に対して次の全単射が得られる:

$$\mathcal{R}: H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_L \mathbb{C}_n)(\nu) \simeq \text{Sol}(k)(\nu).$$

[Se1], Lemma 6.1 より,

$$\text{Sol}(k)(\nu) = \{F \in \mathcal{O}(D) : F \text{ は } (\widetilde{\mathcal{M}}_k) \text{ を満たす}\}.$$

ここで微分方程式系 $(\widetilde{\mathcal{M}}_k)$ を次のように定義する:

$(\widetilde{\mathcal{M}}_k)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(I, J)F(Z) = 0 \text{ for any } I, J \subset \{1, 2, \dots, n\} \text{ with } |I| = |J| = k + 1, \\ \sum_{i=1}^n z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} F(Z) = (\nu_j - k)F(Z) \quad (1 \leq j \leq n), \\ \sum_{j=1}^n z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} F(Z) = -\nu_{n+i}F(Z) \quad (1 \leq i \leq n). \end{array} \right.$$

$k = 1$ の場合, この微分方程式系 $(\widetilde{\mathcal{M}}_k)$ は青本, I. M. Gelfand によって導入された一般超幾何微分方程式 (Gauss の超幾何微分方程式を多変数化したもの) である。
 $k \geq 2$ のとき $(\widetilde{\mathcal{M}}_k)$ は青本-Gelfand の超幾何微分方程式系の高階 ($k + 1$ 階) への拡張であるといえる。

D は $M(n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ の有界対称領域であったことを思いだそう。 $(\widetilde{\mathcal{M}}_k)$ の D 上定義された大域解の空間の次元が有限であることを示すのが、この節の目標である。

$$H_1 := \sum_{i=1}^n E_{ii} - \sum_{i=n+1}^{2n} E_{ii},$$

$$H_2 := \sum_{i=k+1}^n E_{ii},$$

$$\mathfrak{t}'_0 := \sqrt{-1}\mathbb{R}H_1 + \sqrt{-1}\mathbb{R}H_2 \subset \mathfrak{h},$$

$$\mathfrak{t}' := \mathfrak{t}'_0 \otimes \mathbb{C},$$

$$T' := \exp(\mathfrak{t}'_0) \subset K \subset G$$

とおく。このとき、 $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_L \mathbb{C}_n)$ は T' -admissible であることが Fact より分かる。さらに $T' \subset H$ であるので、 $H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_L \mathbb{C}_n)$ は H -admissible でもある ([Ko4], Theorem 1.2 参照)。admissibility の定義より、任意の $\nu \in \mathbb{Z}^{2n}$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{\bar{\partial}}^{k(n-k)}(G \times_L \mathbb{C}_n)(\nu) < \infty$$

が成立する。従って、次の定理が証明された:

定理. 任意の $\nu \in \mathbb{Z}^{2n}$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Sol}(k)(\nu) < \infty.$$

§6. 主定理の意味

この講究録で述べた定理の意味をいくつかの側面から眺めてみよう。

1)

Dolbeault コホモロジーによる実現

… 特異な無限小指標をもつ既約ユニタリ最高ウェイト表現

↓

有界対称領域上の正則直線束の正則切断の空間

… 既約とは限らない表現

定理では、上の2つの表現の幾何的実現を結びつける写像を具体的に構成したことになる。

2) パラメータをもつ微分方程式系 — 特異パラメータにおける Schmid operator を補う微分作用素

Schmid あるいは 堀田先生-Parthasarathy らの結果によって、離散系列表現はリーマン対称空間上の G -共変なベクトル束の切断に作用する一階の楕円型微分方程式の解の空間として実現される。しかし離散系列のパラメータをずらしていった、パラメータを limit of discrete series よりもっと特異なところにもっていくと、対応する表現空間はそれにつれて小さくなると期待される。従って、そこに属する関数はよりたくさんの微分方程式を満たすようになると期待される。この報告集で述べた主定理は、極めて特別な場合ではあるが、この現象を具体的な方程式で定式化したと解釈できる。すなわち、ペンローズ変換の像の満たす微分方程式のうち、

Cauchy-Riemann 方程式 … Schmid operator

偏微分方程式系 (\mathcal{M}_{k-2}) … Schmid operator を補う微分方程式

となっている。

表現論的に言うと正則離散系列の coherent family を考えて、パラメータが limit of discrete series よりもっと特異になっても、そのパラメータに対応する表現はしばらくはユニタリ化可能になることが知られている。このパラメータは Wallach

set と呼ばれている。今扱っている設定ではペンローズ変換の像として表される表現が Wallach set に対応するユニタリ表現である、ということを主張している。

3) 偏微分方程式の解の構成

積分変換を使って偏微分方程式のすべての解を構成することは大域解析における基本問題である。この問題は積分幾何における主たる問題の一つであった。1938 ([J]) に, F. John は ultra-hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial d} - \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} = 0$$

のすべての解を積分変換

$$f(x, y, z) \mapsto F_f(a, b, c, d) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, at + b, ct + d) dt$$

の像として構成した。

リーマン対称空間 G/K に対する Poisson 変換は hyperfunction 値の spherical principal series (すなわち “境界” 上の函数) から G/K 上の偏微分方程式のすべての解の空間の上への積分変換であるという別の例になっている。

上で述べた例は積分変換によって

{多様体 N 上の 全ての 函数}

→ {多様体 M 上の偏微分方程式の 全ての 解}

の全単射を与えていることに注目しよう。この定式化では、次元に関する不等式 $\dim N < \dim M$ が自然に要請されている。

この論文では、上の定式化に沿って言えば古典型有界対称領域 $AIII$

$$M := \{Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n, \mathbb{C}) : I_n - Z^* Z \gg 0\}$$

上の偏微分方程式系 (\mathcal{M}_k) の 全ての 解を構成する積分変換の一つの例を与える。

実際, $0 \leq k \leq n$ となる整数 k を 1 つ選び, 偏微分方程式系 (\mathcal{M}_k)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} F(Z) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (\mathcal{M}_{k-1}) \\ \det \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)_{i \in I, j \in J} F(Z) = 0 \quad I, J \subset \{1, \dots, n\} \quad |I| = |J| = k+1 \quad (\mathcal{M}_{k-2}) \end{array} \right.$$

を考えたのであった。 $k = 1$ のとき, $(\mathcal{M}_{k-2}) = (\mathcal{M}_{1-2})$ は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{il} \partial z_{jm}} - \frac{\partial^2}{\partial z_{im} \partial z_{jl}} \right) F(Z) = 0$$

という形の微分方程式系である。このような系に群作用で定義される簡単な一階の微分作用素をつけ加えたものは Gelfand による“多変数超幾何函数”の関係で最近集中的に研究されている。 $k \geq 2$ ならば, Gelfand の超幾何函数の高次元化と解釈できる。従って, 我々の主定理は, 系 (\mathcal{M}_k) の全ての解の積分変換による構成法を与えたと解釈することもできる。

REFERENCES

- [BE] R. J. Baston, M. G. Eastwood, *The Penrose Transform; its Interaction with Representation Theory*, Oxford University Press, 1989.
- [BB] A. Beilinson and J. Bernstein, *Localisation de \mathfrak{g} -modules*, C. R. Acad. Sci. Paris (1981), 15-18.
- [E] M. Eastwood, *Introduction to Penrose transform*, Contemp. Math. **154** (1993), 71-75.
- [EPW] M. Eastwood, R. Penrose, R. O. Wells, Jr., *Cohomology and massless fields*, Comm. Math. Phys. **78** (1981), 305-351.
- [Gi] S. Gindikin, *Lectures on integral geometry and the Penrose transform* (at University of Tokyo) (1994).
- [Hel] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, vol. 80, Academic Press, 1978.
- [J] F. John, *The ultra hyperbolic differential equation with four independent variables*, Duke Math. J. **4** (1938), 300-322.
- [Ko1] T. Kobayashi, *Singular Unitary Representations and Discrete Series for Indefinite Stiefel Manifolds $U(p, q; \mathbb{F})/U(p-m, q; \mathbb{F})$* , vol. 462, Memoirs A. M. S., 1992.
- [Ko2] ———, *Lectures on spherical functions* (1991); *Lectures on cohomologies of Lie algebras and the Borel-Weil-Bott-Kostant theorem* (1992) (at University of Tokyo).
- [Ko3] ———, 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現論, 数学 **46** (1994), 岩波書店, 124-143.
- [Ko4] ———, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math. **117** (1994), 181-205.
- [Ko5] ———, *The restriction of $A_q(\lambda)$ to reductive subgroups I, II*, Proc. Acad. Japan **69** (1993), 262-267; **71** (1995) 24-26.
- [Ma1] L. Mantini, *An integral transform in L^2 -cohomology for the ladder representations of $U(p, q)$* , J. Funct. Anal. **60** (1985), 211-242.
- [Ma2] ———, *An L^2 -cohomology analogue of the Penrose transform for the oscillator representation*, Contemporary Mathematics **63** (1987), 221-243.
- [Ma3] ———, *An L^2 -cohomology construction of negative spin mass zero equations for $U(p, q)$* , J. Mathematical Analysis and Applications **136** (1988), 419-449.

- [Ma4] ———, *An L^2 -cohomology construction of unitary highest weight modules for $U(p, q)$* , Trans. A. M. S. **323** (1991), 583-603.
- [P-R] C. M. Patton, H. Rossi, *Unitary structures on cohomology*, Trans. of A. M. S. **290** (1985), 235-258.
- [P] R. Penrose, *Twistor algebra*, J. Math. Phys. **8** (1967), 345-366.
- [Sa] 佐藤幹夫, 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み **15-1** (1970), 85-156.
- [Sch1] W. Schmid, *Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups*, ph.D. Thesis, U.C.Berkeley (1967).
- [Sch2] ———, *Boundary value problems for group invariant differential equations*, Société Mathématique de France Astérisque, Numéro Hors Série (1985), 311-321.
- [Sel] H. Sekiguchi, *The Penrose Transform for certain non-compact homogeneous manifolds of $U(n, n)$* , ph.D. Thesis, Univ. of Tokyo (1995 January) (to appear).
- [Se2] ———, $U(n, n)$ のある既約ユニタリ表現の幾何的実現とペンローズ変換, 数理解析研究所講究録 **929** (1995), 62-75.
- [Vo] D. Vogan, *Unitary Representations of Reductive Lie Groups*, Ann. Math. Stud. **118**, Princeton U.P., 1987.
- [Wal] N. R. Wallach, *The analytic continuation of the discrete series. I, II*, Trans. A. M. S. **251** (1979), 1-17, 19-37.
- [We1] R. O. Wells, Jr., *Complex manifolds and mathematical physics*, Bull. A. M. S. (New Series) **1-2** (1979), 296-336.
- [We2] ———, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, G. T. M., vol. 65, Springer-Verlag, 1980.
- [Wo] H. Wong, *Dolbeault cohomologies and Zuckerman modules associated with finite rank representations*, ph.D. dissertation, Harvard University (1991).