数理解析研究所講究録
983 巻 1997 年 60-69

Regularity of solutions to characteristic initial boundary value problem for symmetric systems

阪大理　西谷達雄 (Tatsuo Nishitani)
阪大理　高山正宏 (Masahiro Takayama)

1 Introduction

$T>0$ とし, Ω を境界 $\partial\Omega$ が滑らかな $\mathbf{R}^n$ の有界開集合として, 次の初期境界値問題 (IBVP) を考える.

$$\begin{cases} Lu \equiv \sum_{j=0}^{n} A_j\partial_j u + Bu = f & \text{in} \quad (0,T)\times\Omega \\ u\in M & \text{at} \quad (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot)=u_0 & \text{on} \quad \Omega. \end{cases}$$

ここで $u=(u_1,\ldots,u_N)$ 及び $\partial_0=\partial/\partial t$, $\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\ldots,n$ と表わすことにする. また $\overline{T}>0$ として, $A_j(t,x), B(t,x)\in C^\infty(\mathbf{R}\times\overline{\Omega})$ は $|t|>\overline{T}$ で t に依らない行列関数で次を満たすものとする.

$$A_j^*(t,x)=A_j(t,x), \quad A_0(t,x) \text{ は } \mathbf{R}\times\overline{\Omega} \text{ 上で正定値.}$$

境界空間 $M(t,x)$, $(t,x)\in\mathbf{R}\times\partial\Omega$ は $\mathbf{C}^N$ の線形部分空間で, $|t|>\overline{T}$ で t に依らないものとする. また $M(t,x)$ は L に関して maximal positive という条件を満たすとする. 即ち各 $(t,x)\in\mathbf{R}\times\partial\Omega$ に対して, $\nu(x)=(\nu_1(x),\ldots,\nu_n(x))$ を $x\in\partial\Omega$ での Ω に対する単位外法線として

$$A_b(t,x)=\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)A_j(t,x)$$

で境界行列を表わすとき, 次の二つの条件が満たされるとする.

$$\langle A_b(t,x)v,v\rangle\geq 0, \quad \forall v\in M(t,x),$$
$$\dim M(t,x)=\#\{A_b(t,x) \text{ の重複度を込めた非負固有値 }\}.$$

ここでは, “ f, u_0 がある種の regularity をもつとき, 解 u は同様の regularity をもつか ? ” という問題について考えてみたい.

$A_b(t,x)$ の rank が $\mathbf{R}\times\partial\Omega$ 上で一定のときは既に多くの肯定的な結果が知られている. (例えば [8], [9], [11] などを参照のこと). この報告では, $A_b(t,x)$ の rank が $\mathbf{R}\times\partial\Omega$ 上で一定でないときとして, 次のような場合を考えてみる.

$$O^+(O^-)=\{(t,x)\in\mathbf{R}\times\partial\Omega; A_b(t,x) \text{ は正 (負) 定値}\}$$

として $\gamma^{\pm}$ で $O^{\pm}$ の境界を表わすとき, $\gamma=\gamma^{+}\cup\gamma^{-}$ が滑らかであって, $A_b(t,x)$ が $(\mathbf{R}\times\partial\Omega)\setminus\gamma$ 上で正則行列になっていて, 更に $M(t,x)$ は $(\mathbf{R}\times\partial\Omega)\setminus\gamma$ の各連結成分上滑らかであるという場合を考えることにする. 特にこのとき $M(t,x)$ は次を満たすことに注意しておく.

$$M(t,x)=\begin{cases}\mathbf{C}^N & \text{on} \quad O^{+}\\ \{0\} & \text{on} \quad O^{-}.\end{cases}$$

正確には次のような条件の下で考察を行なう. 各 $(\bar{t},\bar{x})\in\gamma$ に対して $(\bar{t},\bar{x})$ のある近傍 U が存在し, $\mathrm{Ker}A_b(t,x)$ が $\gamma\cap U$ 上 rank 一定の滑らか vector bundle をなすとする. $V(t,x)=(v_1(t,x),\ldots,v_p(t,x))$ をその滑らかな基底ベクトルを並べた行列とし, また $h(t,x)\in C^{\infty}(U)$ を $\gamma\cap U$ の定義関数とする. このとき $(V^{*}A_bV)(t,x)=0$ on $\gamma\cap U$ であるので次のようにできることに注意しておく.

$$(V^{*}A_bV)(t,x)=h(t,x)A_{(\bar{t},\bar{x})}(t,x) \quad \text{on} \quad (\mathbf{R}\times\partial\Omega)\cap U.$$

また次のように定める.

$$A_h(t,x)=\sum_{j=0}^{n}(\partial_j h)(t,x)A_j(t,x).$$

この報告では, 次の条件を仮定する:

$$A_{(\bar{t},\bar{x})}(t,x),\ (V^{*}A_hV)(t,x) \text{ は } \gamma\cap U \text{ 上で同じ definiteness をもつ.}$$

注意として, 上の条件は $V(t,x)$, $h(t,x)$ の選び方には依ってはいない.

以下ではこの条件の下で, (IBVP) の解の regularity について考察する.

2 Exsistence and uniqueness

解の regularity を議論する前に, この節で解の存在, 一意性についてを確かめておく. まず次のような関数を導入する.

$$\begin{aligned}\phi_{\pm}(t,x)&=\{r(x)^2+h_{\pm}(t,x)^2\}^{1/2}-h_{\pm}(t,x),\\ m(t,x)&=\{r(x)^2+h(t,x)^2\}^{1/2}.\end{aligned}$$

ここで $r(x)\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ は $\Omega=\{r(x)>0\}$ で $dr(x)\neq 0$ on $\partial\Omega$を満たすものとし, $h_{\pm}(t,x)\in C^{\infty}(\mathbf{R}\times\overline{\Omega})$ を $O^{\pm}=(\mathbf{R}\times\partial\Omega)\cap\{h_{\pm}(t,x)>0\}$ で, $dh_{\pm}(t,x)$, $\nu(x)$ は一次独立 on $\gamma^{\pm}$ となり, 更に $|t|>\overline{T}$ で t に依らないものとする. 同様に $h(t,x)\in C^{\infty}(\mathbf{R}\times\overline{\Omega})$ は γ を定めるものとする. このとき $\phi_{\pm}(t,x)$ は次を満たしていることに注意しておく.

$$\phi_{\pm}(t,x)>0 \quad \text{in} \quad (\mathbf{R}\times\overline{\Omega})\setminus(O^{\pm}\cup\gamma^{\pm}), \quad \phi_{\pm}(t,x)=0 \quad \text{on} \quad O^{\pm}\cup\gamma^{\pm}.$$

以下では $I=(0,T)$ と表わすことにし, また (t,x) の関数 $a(t,x)$ に対して $a(0,x)$, $a(T,x)$ という x の関数をそれぞれ単に $a(0)$, $a(T)$ で表わすことにする.

さて L の formal adjoint を L^{*} で表わす:

$$L^{*}u=-\sum_{j=0}^{n}\partial_j A_j u+B^{*}u.$$

このとき $u, v \in C^{0,1}(\overline{I} \times \overline{\Omega})$ に対して Green の公式から次が分かる.

$$\begin{aligned}(Lu, v)_{L^2(I\times\Omega)} &= (u, L^*v)_{L^2(I\times\Omega)} + \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} \langle A_b u, v\rangle d\sigma \\ &\quad + (A_0(T)u(T), v(T))_{L^2(\Omega)} - (A_0(0)u(0), v(0))_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

また $(t, x) \in \mathbf{R} \times \partial\Omega$ に対して $M(t, x)$ の共役境界空間を $M^*(t, x)$ で表わす:

$$M^*(t, x) = [A_b(t, x)M(t, x)]^{\perp}.$$

ここで特に $M^*(t, x)$ は次を満たすことに注意しておく.

$$M^*(t, x) = \begin{cases} \{0\} & \text{on} \quad O^+ \\ \mathbf{C}^N & \text{on} \quad O^-. \end{cases}$$

Definition 2.1 $\sigma, \tau \geq 0$ とする. $f \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau}L^2(I \times \Omega)$, $u_0 \in \phi_+(0)^{-\sigma}\phi_-(0)^{\tau}L^2(\Omega)$ に対して $u \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau}L^2(I \times \Omega)$ が (IBVP) の弱解であるということを次で定義する.

$$(u, L^*\psi)_{L^2(I\times\Omega)} = (f, \psi)_{L^2(I\times\Omega)} + (A_0(0)u_0, \psi(0))_{L^2(\Omega)}$$

for all $\psi \in C^{0,1}(\overline{I} \times \overline{\Omega})$ *with* $\psi \in M^*$ *at* $I \times \partial\Omega$, $\psi = 0$ *near* O^+ *and* $\psi(T) = 0$.

このとき, 次の二つの Proposition が分かる. これらはここでは証明を与えない.

Proposition 2.2 $\sigma, \tau \geq 1$ とする. このとき $f \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau}L^2(I\times\Omega)$, $u_0 \in \phi_+(0)^{-\sigma}\phi_-(0)^{\tau}L^2(\Omega)$ とすると, f, u_0 に対する (IBVP) の弱解 $u \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau}L^2(I \times \Omega)$ で

$$\|\phi_+^{\sigma}\phi_-^{-\tau}u\|_{L^2(I\times\Omega)} \leq C_1\{\|\phi_+^{\sigma}\phi_-^{-\tau}f\|_{L^2(I\times\Omega)} + \|\phi_+(0)^{\sigma}\phi_-(0)^{-\tau}u_0\|_{L^2(\Omega)}\}$$

を満たすものが存在する. ここで $C_1 = C_1(\sigma, \tau) > 0$ は f, u_0, u に依らない定数である.

Proposition 2.3 $\sigma, \tau \geq 1$ とする. このとき $f \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau}L^2(I\times\Omega)$, $u_0 \in \phi_+(0)^{-\sigma}\phi_-(0)^{\tau}L^2(\Omega)$ に対する (IBVP) の弱解 u で $u \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau}L^2(I \times \Omega)$ を満たすものは唯一つである.

3 Regularity

我々の興味は解の regularlity にある. そのために, $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ に対して次のように関数空間を導入する.

$$X^q_{(\sigma,\tau)}(I \times \Omega) = \bigcap_{j=0}^{q} \phi_+^{\sigma+q-j}\phi_-^{\tau+q-j}H^j(I \times \Omega),$$

$$X^q_{0(\sigma,\tau)}(\Omega) = \bigcap_{j=0}^{q} \phi_+(0)^{\sigma+q-j}\phi_-(0)^{\tau+q-j}H^j(\Omega).$$

ここで $H^j(I \times \Omega)$, $H^j(\Omega)$ は標準的な Sobolev 空間である. 同様にして上において $H^j(I \times \Omega)$ の代わりに, 境界 $I \times \partial\Omega$ に conormal な Sobolev 空間 $H^j(I \times \Omega; I \times \partial\Omega)$ を用いたもの

を $X^q_{(\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)$ で表わすことにする. (これらの空間の詳しい性質については [6] を参照のこと).

さて $q\in\mathbf{Z}_+$, $q\geq 1$ 及び $\sigma,\tau\geq 0$ とし, $f\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)$, $u_0\in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ とする. ここで $u^{(k)}$, $k=0,\ldots,q-1$ を次によって帰納的に定める. $k=0$ のとき $u^{(0)}=u_0$. $k-1$ のときまで定まったとして k のときを次のように定める.

$$u^{(k)}=(\partial_0^{k-1}A_0^{-1}f)(0)-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}K_iu^{(k-1-i)}.$$

但し, $K_i=\sum_{j=1}^n(\partial_0^iA_0^{-1}A_j)(0)\partial_j+(\partial_0^iA_0^{-1}B)(0)$. このとき $u^{(k)}$, $k=0,\ldots,q-1$ に対して次が分かる.

$$u^{(k)}\in X^{q-k}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)\hookrightarrow X^1_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)\hookrightarrow(\phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau})(0)H^1(\Omega).$$

これより $(\phi_+^{\sigma}\phi_-^{-\tau})(0)u^{(k)}\in L^2(\partial\Omega)$ に注意しておく.

“整合条件を満たす” ということを定義するために, $\delta>0$ を十分小なるものとして, $P(t,x)\in C^\infty((-\delta,\delta)\times\partial\Omega;M_N(\mathbf{C}))$ を次を満たすように選ぶ.

$$\text{各 }(t,x)\in(-\delta,\delta)\times\partial\Omega\text{ に対して}\quad v\in M(t,x)\iff P(t,x)v=0.$$

Definition 3.1 $q\in\mathbf{Z}_+$, $q\geq 1$ 及び $\sigma,\tau\geq 0$ とし, $f\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)$, $u_0\in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ とする. また $u^{(i)}$, $i=0,\ldots,q-1$ を上で定めたものとする. f, u_0 が $q-1$ 次までの整合条件を満たすということを次で定義する.

$$(\phi_+^{\sigma}\phi_-^{-\tau})(0)\{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\partial_0^iP)(0)u^{(k-i)}\}=0\quad on\quad\partial\Omega,\quad k=0,\ldots,q-1.$$

解の regularlity に関しては次の結果が得られた.

Theorem 3.2 $q\in\mathbf{Z}_+$, $q\geq 1$ に対して次を満たす $\Sigma(q)>0$ が選べる: $\sigma,\tau>\Sigma(q)$ とする. $f\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)$ が $(\partial_0^kf)(0)=0$, $k=0,\ldots,q-1$ を満たすとき, f 及び $u_0=0$ に対する (IBVP) の弱解 $u\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)$ で

$$\|u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)}\leq C_1\|f\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)}$$

を満たすものが存在する. ここで $C_1=C_1(q,\sigma,\tau)>0$ は f,u に依らない定数である.

Theorem 3.3 $q\in\mathbf{Z}_+$, $q\geq 1$ に対して次を満たす $\Sigma(q)>0$ が選べる: $\sigma,\tau>\Sigma(q)$ とする. $f\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)$, $u_0\in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ が $q-1$ 次までの整合条件を満たすとき, f,u_0 に対する (IBVP) の弱解 $u\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)$ で

$$\|u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)}\leq C_1\{\|f\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)}+\|u_0\|_{X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)}\}$$

を満たすものが存在する. ここで $C_1=C_1(q,\sigma,\tau)>0$ は f,u_0,u に依らない定数である.

また次の Proposition も示せる.

Proposition 3.4 $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma, \tau \geq 0$ とする．このとき $u \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega; I \times \partial\Omega)$, $Lu \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$ とすると，$u \in m^{-q} X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$ で

$$\|m^q u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)} \leq C_1\{\|u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega;I\times\partial\Omega)} + \|Lu\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)}\}$$

が成り立つ．ここで $C_1 = C_1(q, \sigma, \tau) > 0$ は u に依らない定数である．

上の Theorem 3.3, Proposition 3.4 から次の結果も得られる．

Theorem 3.5 $q \in \mathbf{Z}_+$, $q \geq 1$ に対して次を満たす $\Sigma(q) > q$ が選べる: $\sigma, \tau > \Sigma(q)$ とする．$f \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$, $u_0 \in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ が $q-1$ 次までの整合条件を満たすとき，f, u_0 に対する (IBVP) の弱解 $u \in m^{-q} X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$ で

$$\|m^q u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)} \leq C_1\{\|f\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)} + \|u_0\|_{X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)}\}$$

を満たすものが存在する．ここで $C_1 = C_1(q, \sigma, \tau) > 0$ は f, u_0, u に依らない定数である．

この報告の結果は $O^+, O^- = \emptyset$ の場合にも適用することができる．この場合 $A_b(t, x)$ は $\mathbf{R} \times \partial\Omega$ 上で正則行列となっていて [9] で既に扱われているが，そこでの結果と上の Theorem 3.5 は同じ結果を表わしている．

また Proposition 2.3, Theorem 3.5 及び Sobolev の埋め込み定理から次が従う．

Corollary 3.6 $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して次を満たす $\Sigma(q) > 0$ が選べる: $\sigma, \tau > \Sigma(q)$ とする．$f \in X^{q+[n/2]+1}_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$, $u_0 \in X^{q+[n/2]+1}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ が $q + [n/2]$ 次までの整合条件を満たすとし，また $u \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau} L^2(I \times \Omega)$ が f, u_0 に対する (IBVP) の弱解とする．このとき $u \in m^{q+[n/2]+1}\phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau} C^q(\overline{I} \times \overline{\Omega})$ が成り立つ．

4 Proof of Theorem 3.2

次の Proposition は [6] の Theorem 2.1 の議論をそのままでえることができる．

Proposition 4.1 $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して次を満たす $\Sigma(q) > 0$ が選べる: $\sigma, \tau > \Sigma(q)$ とし，$\lambda \in \mathbf{C}$ を $\mathrm{Re}\lambda$ が十分大なるものとする．このとき $f \in e^{\lambda t} X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R} \times \Omega; \mathbf{R} \times \partial\Omega)$ に対して，境界値問題 $Lu = f$ in $\mathbf{R} \times \Omega$, $u \in M$ at $\mathbf{R} \times \partial\Omega$ の弱解 $u \in e^{\lambda t} X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R} \times \Omega; \mathbf{R} \times \partial\Omega)$ で

$$\|e^{-\lambda t} u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R}\times\Omega;\mathbf{R}\times\partial\Omega)} \leq C_1 \|e^{-\lambda t} f\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R}\times\Omega;\mathbf{R}\times\partial\Omega)}$$

を満たすものが存在する．ここで $C_1 = C_1(q, \sigma, \tau, \lambda) > 0$ は f, u に依らない定数である．

したがって $f \in e^{\lambda t} X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R} \times \Omega; \mathbf{R} \times \partial\Omega)$ について $\mathrm{supp} f \subset \{(t, x);\ t \geq 0\}$ のとき Proposition 4.1 の $u \in e^{\lambda t} X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R} \times \Omega; \mathbf{R} \times \partial\Omega)$ に対して $\mathrm{supp} u \subset \{(t, x);\ t \geq 0\}$ が示されれば，Theorem 3.2 は証明できる．

そのために次の Lemma を用いる．証明は，[6] の Proposition 5.2 を参照すれば難しくはない．

Lemma 4.2 $\sigma, \tau \geq 1$ とする．このとき $\Lambda(\sigma, \tau) \in \mathbf{R}$ を適当に選ぶと，$u \in C_0^{0,1}(\mathbf{R} \times \overline{\Omega})$ で $u \in M$ at $\mathbf{R} \times \partial\Omega$ 及び $u = 0$ near O^- なるものに対して次が成り立つ．

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma,\tau))\|\phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} u\|^2_{L^2((-\infty,0)\times\Omega)} \leq C_1 \|\phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} Lu\|^2_{L^2((-\infty,0)\times\Omega)}.$$

ここで $C_1 > 0$ は σ, τ, λ, u に依らない定数である．

さて Theorem 3.2 を示そう．$f \in e^{\lambda t} X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R} \times \Omega; \mathbf{R} \times \partial\Omega)$ を $\mathrm{supp} f \subset \{(t,x);\ t \geq 0\}$ なるものとし，$u \in e^{\lambda t} X^q_{(-\sigma,\tau)}(\mathbf{R} \times \Omega; \mathbf{R} \times \partial\Omega)$ をこの f に対する Proposition 4.1 のものとする．このとき次を満たすような $\{u_\epsilon\} \subset C_0^{0,1}(\mathbf{R} \times \overline{\Omega})$ が選べる．

$$\begin{array}{rlll}
u_\epsilon \in M & \text{at} & \mathbf{R} \times \partial\Omega, & u_\epsilon = 0 \quad \text{near} \quad O^-, \\
\phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} u_\epsilon \to \phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} u & \text{in} & L^2(\mathbf{R} \times \Omega) & \text{as} \quad \epsilon \downarrow 0, \\
\phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} Lu_\epsilon \to \phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} f & \text{in} & L^2(\mathbf{R} \times \Omega) & \text{as} \quad \epsilon \downarrow 0.
\end{array}$$

この u_ϵ に対して Lemma 4.2 を適用し，$\epsilon \downarrow 0$ とすることで次が分かる．

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma,\tau))\|\phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} u\|^2_{L^2((-\infty,0)\times\Omega)} \leq C_1 \|\phi_+^\sigma \phi_-^\tau e^{-\lambda t} f\|^2_{L^2((-\infty,0)\times\Omega)} = 0.$$

これより $\mathrm{supp} u \subset \{(t,x);\ t \geq 0\}$ が従う．

5 Proof of Theorem 3.3

いま (IBVP) の解 u に対して，次のような a priori 評価が得られることは認めておく．([6] の Proposition 10.1 を参照のこと)．

Proposition 5.1 $q \in \mathbf{Z}_+$, $q \geq 1$ に対して次を満たす $\Sigma(q) > 0$ が選べる: $\sigma, \tau > \Sigma(q)$ とする．$u \in C^{q+1}(\overline{I} \times \overline{\Omega})$ で $u \in M$ at $\mathbf{R} \times \partial\Omega$ 及び $u = 0$ near $O^+ \cup O^-$ なるものが (IBVP) の弱解とすると，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega; I\times\partial\Omega)} \leq\ & C_1\{\|mLu\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)} \\
& + \sum_{k=0}^{q-1} \|(\partial_0^k Lu)(0)\|_{X^{q-1-k}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)} + \|u(0)\|_{X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)}\}
\end{aligned}$$

ここで $C_1 = C_1(q, \sigma, \tau) > 0$ は u に依らない定数である．

さて Theorem 3.3 を証明するために次の Proposition を用いることにする．

Proposition 5.2 $q \in \mathbf{Z}_+$, $q \geq 1$, $\sigma, \tau \geq 0$ とし，$f \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$, $u_0 \in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ が $q-1$ 次までの整合条件を満たすとする．このとき，任意の $q' \in \mathbf{Z}_+$, $q' \geq q$ に対して次を満たす $\{f_\epsilon\} \subset H^{q'}(I \times \Omega)$, $\{u_{0\epsilon}\} \subset H^{q'}(\Omega)$ が選べる: $f_\epsilon = 0$ near $O^+ \cup O^-$ 及び $u_{0\epsilon} = 0$ near $O^+ \cup O^-$ で，$f_\epsilon, u_{0\epsilon}$ は $q'-1$ 次までの整合条件を満たし，更に $\epsilon \downarrow 0$ のとき次の収束が成り立つ．

$$\begin{array}{cclll}
mf_\epsilon & \to & mf & in & X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega), \\
(\partial_0^k f_\epsilon)(0) & \to & (\partial_0^k f_\epsilon)(0) & in & X^{q-1-k}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega), \quad k = 0, \ldots, q-1, \\
u_{0\epsilon} & \to & u_0 & in & X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega).
\end{array}$$

この証明は次節で与えることにする.

この Proposition を認めて Theorem 3.3 を示そう.Proposition 5.1 及び Proposition 5.2 より, $q' \in \mathbf{Z}_+$, $q' \geq q$ を適当なものとして, $f_\epsilon \in H^{q'}(I \times \Omega)$, $u_{0\epsilon} \in H^{q'}(\Omega)$ で $f = 0$ near $O^+ \cup O^-$, $u_0 = 0$ near $O^+ \cup O^-$ であり, 更に f, u_0 が $q' - 1$ 次までの整合条件を満たすという場合について Theorem 3.3 を示せば十分であることが分かる.

さて $q' = 2q + [n/2]$ ととっておくことにする. このとき [9] の Lemma 3.1 の議論と同様にして, $w \in H^{q+[n/2]+1}(I \times \Omega)$ で次を満たすものが選べる.

$$
\begin{gathered}
w \in M \ \text{ at } \ I \times \partial\Omega, \quad w = 0 \ \text{ near } \ O^+ \cup O^-, \\
w(0) = u_0, \quad (\partial_0^k(Lw - f))(0) = 0, \quad k = 0, \ldots, q-1.
\end{gathered}
$$

この w に対して $g = Lw$ とおき, 次の初期境界値問題を考える.

$$
\begin{cases}
Lv = f - g & \text{in} \quad I \times \Omega \\
v \in M & \text{at} \quad I \times \partial\Omega \\
v(0) = 0 & \text{on} \quad \Omega.
\end{cases}
$$

ここで $g \in H^q(I \times \Omega)$ で $g = 0$ near $O^+ \cup O^-$ であることから $g \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$ であることに注意し, また w の選び方から結局次が分かる.

$$
f - g \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega), \quad (\partial_0^k(g - f))(0) = 0, \quad k = 0, \ldots, q-1.
$$

したがって Theorem 3.2 より, 上の初期境界値問題は弱解 $v \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega; I \times \partial\Omega)$ をもつことが従う. これより $u = v + w$ とおくと, この u は望むべき f, u_0 に対する (IBVP) の弱解であることが分かる.

6 Proof of Proposition 5.2

まず次の Lemma を認めて Proposition 5.2 を証明し, しかる後にこれを示すことにする.

Lemma 6.1 $q \in \mathbf{Z}_+$, $q \geq 1$ 及び $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ とし, u_k, $k = 0, \ldots, q-1$ を $u_k \in X^{q-k}_{0(\sigma,\tau)}(\Omega)$ なるものとする. このとき $u \in X^q_{(\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$ で $(\partial_0^k u)(0) = u_k$, $k = 0, \ldots, q-1$ を満たすものが存在する.

Proposition 5.2 を三段に分けて証明しよう.

第一段　$f \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$, $u_0 \in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ が $q-1$ 次までの整合条件を満たすとする. ここで $u^{(k)}$, $k = 0, \ldots, q-1$ を第 3 節で定めたものとすると, $u^{(k)} \in X^{q-k}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ であることから, Lemma 6.1 より $(\partial_0^k u)(0) = u^{(k)}$, $k = 0, \ldots, q-1$ を満たす $u \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I \times \Omega)$ が存在する. さて $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ を $\chi = 1$ near 0 を満たすものとして, $\epsilon > 0$ に対して次のように定める.

$$
\begin{aligned}
\alpha_\epsilon(t,x) &= 1 - \chi(\epsilon^{-1} m(t,x)), \\
f_\epsilon(t,x) &= \alpha_\epsilon(t,x) f(t,x) + \textstyle\sum_{j=0}^n (\partial_j \alpha_\epsilon)(t,x) A_j(t,x) u(t,x), \\
u_{0\epsilon}(x) &= \alpha_\epsilon(0,x) u_0(x).
\end{aligned}
$$

このとき $f_\epsilon \in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)$, $u_{0\epsilon}\in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ で, $f_\epsilon = 0$ near γ 及び $u_{0\epsilon}=0$ near γ であることが分かる. また $f_\epsilon, u_{0\epsilon}$ は $q-1$ 次までの整合条件を満たし, 更に $\epsilon\downarrow 0$ のとき次の収束が成り立つことも分かる.

$$\begin{array}{ccccl} mf_\epsilon & \to & mf & \text{in} & X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega), \\ (\partial_0^k f_\epsilon)(0) & \to & (\partial_0^k f_\epsilon)(0) & \text{in} & X^{q-1-k}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega), \quad k=0,\dots,q-1, \\ u_{0\epsilon} & \to & u_0 & \text{in} & X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega). \end{array}$$

第二段　$f\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)$, $u_0\in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ で $f_\epsilon=0$ near γ 及び $u_{0\epsilon}=0$ near γ なるものが $q-1$ 次までの整合条件を満たすとする. ここで $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ を同様に $\chi=1$ near 0 を満たすものとして, $\epsilon>0$ に対して次のように定める.

$$\begin{aligned} \alpha_\epsilon(t,x) &= 1-\chi(\epsilon^{-1}\phi_+(t,x)\phi_-(t,x)), \\ f_\epsilon(t,x) &= \alpha_\epsilon(t,x)f(t,x), \\ u_{0\epsilon}(x) &= \alpha_\epsilon(0,x)u_0(x). \end{aligned}$$

このとき $f_\epsilon\in X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega)$, $u_{0\epsilon}\in X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega)$ で, $f_\epsilon=0$ near $O^+\cup O^-$ 及び $u_{0\epsilon}=0$ near $O^+\cup O^-$ であることが分かる. これより特に $f_\epsilon\in H^q(I\times\Omega)$, $u_{0\epsilon}\in H^q(\Omega)$ であることに注意しておく. また $f_\epsilon, u_{0\epsilon}$ は $q-1$ 次までの整合条件を満たし, 更に $\epsilon\downarrow 0$ のとき次の収束が成り立つことも分かる.

$$\begin{array}{ccccl} mf_\epsilon & \to & mf & \text{in} & X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega), \\ (\partial_0^k f_\epsilon)(0) & \to & (\partial_0^k f_\epsilon)(0) & \text{in} & X^{q-1-k}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega), \quad k=0,\dots,q-1, \\ u_{0\epsilon} & \to & u_0 & \text{in} & X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega). \end{array}$$

第三段　$f\in H^q(I\times\Omega)$, $u_0\in H^q(\Omega)$ で $f_\epsilon=0$ near $O^+\cup O^-$ 及び $u_{0\epsilon}=0$ near $O^+\cup O^-$ なるものが $q-1$ 次までの整合条件を満たすとする. このとき $A_b(t,x)$ は $(I\times\Omega)\cap\mathrm{supp}f$ 上で正則行列であることから [9] の Lemma 3.3 の議論を用いることで, 任意の $q'\in\mathbf{Z}_+$, $q'\geq q$ に対して次を満たす $\{f_\epsilon\}\subset H^{q'}(I\times\Omega)$, $\{u_{0\epsilon}\}\subset H^{q'}(\Omega)$ が選べることが分かる: $\delta>0$ を ϵ に無関係なものとして $\mathrm{supp}f_\epsilon\subset(\overline{I}\times\overline{\Omega})\cap\{\phi_+>\delta,\ \phi_->\delta\}$ 及び $\mathrm{supp}u_{0\epsilon}\subset\overline{\Omega}\cap\{\phi_+(0)>\delta,\ \phi_-(0)>\delta\}$ が成り立ち, $f_\epsilon, u_{0\epsilon}$ は $q'-1$ 次までの整合条件を満たし, 更に $\epsilon\downarrow 0$ のとき次の収束が成り立つ.

$$f_\epsilon\to f \quad \text{in} \quad H^q(I\times\Omega), \quad u_{0\epsilon}\to u_0 \quad \text{in} \quad H^q(\Omega).$$

この $\{f_\epsilon\}$, $\{u_{0\epsilon}\}$ について, support の関係から $\epsilon\downarrow 0$ のとき次の望むべき収束が得られる.

$$\begin{array}{ccccl} mf_\epsilon & \to & mf & \text{in} & X^q_{(-\sigma,\tau)}(I\times\Omega), \\ (\partial_0^k f_\epsilon)(0) & \to & (\partial_0^k f_\epsilon)(0) & \text{in} & X^{q-1-k}_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega), \quad k=0,\dots,q-1, \\ u_{0\epsilon} & \to & u_0 & \text{in} & X^q_{0(-\sigma,\tau)}(\Omega). \end{array}$$

以上の三段をふまえることで Proposition 5.2 が証明できた.

次に, この節の冒頭で認めた Lemma 6.1 を示そう. この Lemma は $\sigma,\tau=-q$ のときに示されれば十分である. 実際, この場合が示されたとして一般の $\sigma,\tau\in\mathbf{R}$ について考える場合は, $u=\phi_+^{\sigma+q}\phi_-^{\tau+q}v$ として $v\in X^q_{(-q,-q)}(I\times\Omega)$ を適当に選ぶことで示すことができる.

したがって $\sigma,\tau=-q$ とする. 局所的に考えることで次のように仮定してよい.

$$\Omega=\mathbf{R}^n_+=\{x;\ x_1>0\}, \quad r=x_1, \quad \mathrm{supp}u_k\subset\{x;\ |x|<1, x_1>0\}.$$

さて, 望むべき $u \in X^q_{(-q,-q)}(I \times \mathbf{R}^n_+)$ を次の形で求めることにする.

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=0}^{q-1} w_k(t,x), \\ w_k(t,x) &= \psi(t)t^k\chi(t(\phi_+\phi_-)(t,x)) \int v_k(x+ty)\rho(y)dy. \end{aligned}$$

但し $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は次を満たすものとする.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{supp}\psi \subset \{t;\ |t| < \delta\}, & \psi = 1 \quad \text{near} \quad 0, \\ \mathrm{supp}\chi \subset \{s;\ |s| < 1\}, & \chi(0) = 1, \\ \mathrm{supp}\rho \subset \{y;\ |y| < \epsilon, y_1 > \epsilon/2\}, & \int \rho(y)dy = 1. \end{array}$$

ここで $\delta, \epsilon > 0$ は十分小なるものとする. また v_k, $k = 0, \ldots, q-1$ は次を満たすものとする.

$$v_k \in X^{q-k}_{0(-q,-q)}(\mathbf{R}^n_+), \quad \mathrm{supp}v_k \subset \{x;\ |x| < 1, x_1 > 0\}.$$

このとき w_k, $k = 0, \ldots, q-1$ について次が成り立つことが分かる.

$$\begin{array}{c} w_k \in X^q_{(-q,-q)}(I \times \mathbf{R}^n_+), \quad (\partial_0^k w_k)(0) = v_k, \\ k \geq 1 \quad \text{のとき} \quad (\partial_0^i w_k)(0) = 0, \quad i = 0, \ldots, k-1. \end{array}$$

これより v_k, $k = 0, \ldots, q-1$ を適当に選ぶことで Lemma 6.1 を示すことができる.

References

[1] K.O.Friedrichs, *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 132–151.

[2] K.O.Friedrichs, *Symmetric positive linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 333–418.

[3] L.Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.

[4] P.D.Lax and R.S.Phillips, *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 427–455.

[5] T.Nishitani and M.Takayama, *A characteristic initial boundary value problem for a symmetric positive system*, Hokkaido Math. J. **25** (1996), 167–182.

[6] T.Nishitani and M.Takayama, *Regularity of solutions to characteristic boundary value problem for symmetric systems*, to appear in "Geometrical optics and related topics" eds. F.Colombini and N.Lerner, Birkhauser.

[7] M.Ohno, Y.Shizuta and T.Yanagisawa, *The initial boundary value problems for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary*, Proc. Japan Acad. **67** (1991), 191–196.

[8] J.Rauch, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 167–187.

[9] J.Rauch and F.Massey III, *Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 303–318.

[10] D.Tartakoff, *Regularity of solutions to boundary value problems for first order systems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 1113–1129.

[11] T.Yanagisawa and A.Matsumura, *The fixed boundary value problems for the equations of ideal Magneto-Hydrodynamics with a perfectly conducting wall condition*, Comm. Math. Phys. **136** (1991), 119–140.