

## Weak solutions of Sine-Gordon equation and their numerical analysis

神戸大学自然科学研究科 M. エルガマル (Mahmoud Elgamal)

神戸大学工学部 中桐信一 (Shin-ichi Nakagiri)

### 1 序論

最近、減衰項を持つ非線形双曲型偏微分方程式により記述される系に対して最適制御問題やパラメータ推定問題が研究されている。それらの問題の研究において、まずは制御項の入らない系の解の性質をよく知っておく必要がある。

ここでは、ヒルベルト空間上の次の2階の非線形発展方程式

$$\begin{cases} \ddot{y} + A_2(t)\dot{y} + A_1(t)y = f(t, y) & \text{in } (0, T), \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1 \end{cases}$$

を考え、まず解の存在と一意性の問題を Lions 流の変分法的枠組みのもとで、減衰項の微分のオーダーに関係しないような解析法で解く。ここで上式において、 $A_1(t)$  と  $A_2(t)$  は微分作用素、 $f$  は非線形項である。

この様な2階の方程式は、Sine-Gordon 方程式、Euler-Bernoulli beam 方程式、Kirchhoff 型非線形波動方程式および Klein-Gordon 方程式等の物理的に重要な方程式を含んでいる (cf. 文献 [1]-[6])。ここでは、これらのうち次の例に与えるような Sine-Gordon 方程式と Klein-Gordon 方程式に対する、有限要素法による数値解を求めるアルゴリズムとその Simulation 結果について報告したい。

以下の例において、 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  : 有界、 $\Gamma = \partial\Omega$  : 滑らかな境界、 $Q = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$  とする。

**EXAMPLE 1** (Sine-Gordon equation)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y + \gamma \sin y = f(t, x) & \text{in } Q, \\ y(t, x) = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} y(0, x) = y_1(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma$ は正の定数である。

**EXAMPLE 2** (Structural damped Sine-Gordon equation)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \alpha \Delta \frac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y + \gamma \sin y = f(t, x) & \text{in } Q, \\ y(t, x) = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} y(0, x) = y_1(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma$ は正の定数である。

**EXAMPLE 3** (Coupled Sine-Gordon equations)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} - \beta_1 \Delta y_1 + \gamma_1 \sin(y_1 + y_2) = f_1(t, x) & \text{in } Q, \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} - \beta_2 \Delta y_2 + \gamma_2 \sin(y_1 - y_2) = f_2(t, x) & \text{in } Q, \\ y_i(t, x) = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y_i(0, x) = y_0^i(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} y_i(0, x) = y_1^i(x) & \text{on } \Omega, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

ここで、 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ は正の定数である。

**EXAMPLE 4** (Another coupled Sine-Gordon equations)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} - \beta_1 \Delta y_1 + \gamma_1 \sin y_1 + k_1(y_1 - y_2) = f_1(t, x) & \text{in } Q, \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} - \beta_2 \Delta y_2 + \gamma_2 \sin y_2 + k_2(y_2 - y_1) = f_2(t, x) & \text{in } Q, \\ y_i(t, x) = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y_i(0, x) = y_0^i(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} y_i(0, x) = y_1^i(x) & \text{on } \Omega, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

ここで、 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, k_i$ は正の定数である。

**EXAMPLE 5** (Klein-Gordon equation)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y = |y|^\gamma y & \text{in } Q, \\ y(t, x) = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} y(0, x) = y_1(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma$ は正の定数である。

## 2 2階非線形発展方程式

### 2.1 方程式に関する仮定

減衰項をもつ非線形発展方程式の説明を与える。最初に方程式を定義するために必要な空間と双対性について個条書きで説明する。

- $H$  : Pivot ヒルベルト空間, i.e.,  $H \equiv H'$
- $V$  : 主要な微分作用素を定義するための可分なヒルベルト空間
- $V_2$  : 減衰項を定義するための可分なヒルベルト空間
- $X'$  は空間  $X$  の双対空間
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  は空間  $X$  と  $X'$  の間のスカラー積
- $(\cdot, \cdot)_X$  は空間  $X$  に於ける内積

次に  $V$  と  $V_2$  に Gelfand triple としての空間設定を与える。即ち,

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V' \Leftrightarrow I_d : V \rightarrow H \text{ なる単射は連続, } V \text{ は } H \text{ で dense,}$$

$$V_2 \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V_2' \Leftrightarrow I_d : V_2 \rightarrow H \text{ なる単射は連続, } V_2 \text{ は } H \text{ で dense,}$$

を仮定する。

微分作用素  $A_1(t), A_2(t)$  については、次の仮定をおく。まず  $V = V_1$  とおく。

(仮定 A)  $A_i(t) \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$ ,  $i = 1, 2$  について

$\forall t \in [0, T]$  に対し  $a_i(t, \phi, \varphi)$  は  $V_i \times V_i$  上で定義され、かつ次の4つの条件を満たす bilinear form であるとする。即ち,  $\forall t \in [0, T], \forall \phi, \varphi \in V_i$  に対して

$$(i) \quad a_i(t; \phi, \varphi) = a_i(t; \varphi, \phi),$$

$$(ii) \quad \exists c_{i1} > 0; \quad |a_i(t; \phi, \varphi)| \leq c_{i1} \|\phi\|_{V_i} \|\varphi\|_{V_i},$$

$$(iii) \quad \exists \alpha_i > 0, \lambda_i \in \mathbf{R}; \quad a_i(t; \phi, \phi) + \lambda_i |\phi|_H^2 \geq \alpha_i \|\phi\|_{V_i}^2,$$

(iv) 関数  $t \rightarrow a_i(t; \phi, \varphi)$  は  $[0, T]$  上で微分可能であり,

$$\exists c_{i2} > 0; \quad |\dot{a}_i(t; \phi, \varphi)| \leq c_{i2} \|\phi\|_{V_i} \|\varphi\|_{V_i}.$$

条件 (ii) より

$$a_i(t; \phi, \varphi) = \langle A_i(t)\phi, \varphi \rangle_{V_i', V_i}, \quad \forall \phi, \varphi \in V_i$$

が成り立つ様な作用素  $A_i(t) \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$  が決まり, また条件 (iv) より

$$\dot{a}_i(t; \phi, \varphi) = \langle \dot{A}_i(t)\phi, \varphi \rangle_{V_i', V_i}, \quad \forall \phi, \varphi \in V_i$$

が成り立つ様な作用素  $\dot{A}_i(t) \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$  が決まる。

最後に、基本的な仮定として我々は、 $V$  と  $V_2$  との間に、 $V \hookrightarrow V_2$  (連続的埋め込み) なる条件をおく。この時、先の二つ Gelfand triple から Gelfand fivefold

$$V \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V_2' \hookrightarrow V'$$

が得られる。この時、 $\forall x \in V$  に対し、

$$\langle x, y \rangle_{V, V'} = \langle x, y \rangle_{V_2, V_2'} \text{ if } y \in V_2', \quad \langle x, y \rangle_{V_2, V_2'} = \langle x, y \rangle_H \text{ if } y \in H$$

が成り立つ。

## 2.2 減衰項のある非線形方程式

我々は外力が非線形項となる次の形の非線形方程式を考える。

$$(EQ) \begin{cases} \ddot{y} + A_2(t)\dot{y} + A_1(t)y = f(t, y) \text{ in } (0, T), \\ y(0) = y_0 \in V, \\ \dot{y}(0) = y_1 \in H. \end{cases}$$

ここで、非線形関数  $f: [0, T] \times V_2 \rightarrow V_2'$  は次の条件

(F1)  $\forall x \in V, f(\cdot, x): [0, T] \rightarrow V_2'$  は可測関数,

(F2)  $\exists \beta \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+); \quad \|f(t, x) - f(t, y)\|_{V_2'} \leq \beta(t)\|x - y\|_{V_2}, \quad \forall x, y \in V_2,$

(F3)  $\exists \gamma \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+); \quad \|f(t, 0)\|_{V_2'} \leq \gamma(t)$

(F4)  $V_2 = V$  または 埋め込み  $V \hookrightarrow V_2$  がコンパクト

を満足していると仮定する。

次に (EQ) の弱い解の定義を与える。 $y$  が方程式 (EQ) の弱い解であるとは、 $y$  は、次の空間  $W(0, T)$

$$W(0, T) = \{y \in L^2(0, T; V) : \dot{y} \in L^2(0, T; V_2), \ddot{y} \in L^2(0, T; V')\}$$

の元であり、変分方程式

$$\begin{cases} \langle y''(\cdot), \phi \rangle_{V', V} + a_2(\cdot; y'(\cdot), \phi) + a_1(\cdot; y(\cdot), \phi) = \langle f(\cdot, y(\cdot)), \phi \rangle_{V_2', V_2} \\ \text{for all } \phi \in V \text{ in the sense of } \mathcal{D}'(0, T) \\ y(0) = y_0 \in V, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H. \end{cases}$$

を満足するときをいう。

この時、次の定理が得られる。

**THEOREM 1** 非線形系 (EQ) の弱い解  $y$  が空間  $W(0, T)$  内に一意的に存在する。さらに、この解  $y$  は正則性

$$y \in C([0, T]; V), \quad \dot{y} \in C([0, T]; H)$$

をもつ。

存在証明は Galerkin finite approximation を利用して実行する。解の一意性と正則性は次のエネルギー等式から導く。

$$\begin{aligned} & a_1(t; y(t), y(t)) + |\dot{y}(t)|_H^2 + 2 \int_0^t a_2(\sigma; \dot{y}(\sigma), \dot{y}(\sigma)) d\sigma \\ &= a_1(0; y_0, y_0) + |y_1|_H^2 + \int_0^t \dot{a}_1(\sigma; y(\sigma), y(\sigma)) d\sigma \\ & \quad + 2 \int_0^t \langle f(\sigma, y(\sigma)), \dot{y}(\sigma) \rangle_{V_2', V_2} d\sigma. \end{aligned}$$

### 3 Sine-Gordon 方程式への応用

#### 3.1 Sine-Gordon equation

**EXAMPLE 1** において、 $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $y_1 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(Q)$  とする。まず  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $V_2 = H = L^2(\Omega)$  とおく。次の2つの bilinear form を導入する。

$$a_1(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} \beta \nabla \phi \cdot \nabla \varphi dx, \quad \forall \phi, \varphi \in V = H_0^1(\Omega).$$

$$a_2(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} \alpha \phi \varphi dx, \quad \forall \phi, \varphi \in V_2 = L^2(\Omega).$$

ここで、 $\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)$  を表す。 $f(t, y) = -\gamma \sin y + f(t, x)$  とおくと、明らかにこの非線形項は仮定を満たす。従って弱い解が存在する。

#### 3.2 Structural damped Sine-Gordon equation

**EXAMPLE 2** において、 $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $y_1 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(Q)$  とする。この場合は、 $V = V_2 = H_0^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Omega)$  とおく。対応する次の2つの bilinear form は次の通りである。

$$a_1(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} \beta \nabla \phi \cdot \nabla \varphi dx, \quad \forall \phi, \varphi \in V = H_0^1(\Omega).$$

$$a_2(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} \alpha \nabla \phi \cdot \nabla \varphi dx, \quad \forall \phi, \varphi \in V = H_0^1(\Omega).$$

$f(t, y) = -\gamma \sin y + f(t, x)$  は、 $H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  なる写像として仮定を満たす。従って弱い解が存在する。

### 3.3 Coupled Sine-Gordon equations

**EXAMPLE 3** において、 $y_0^i \in H_0^1(\Omega), y_1^i \in L^2(\Omega), f_i \in L^2(Q), i = 1, 2$  とする。

$V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), V_2 = H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  とおく。次の2つの bilinear form を導入する。

$$\begin{aligned} a_1((\phi_1, \phi_2), (\varphi_1, \varphi_2)) &= \int_{\Omega} (\beta_1 \nabla \phi_1 \cdot \nabla \varphi_1 + \beta_1 \nabla \phi_2 \cdot \nabla \varphi_2) dx, \\ &\forall (\phi_1, \phi_2), (\varphi_1, \varphi_2) \in V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \\ a_2(\phi, \varphi) &= \int_{\Omega} (\alpha_1 \phi_1 \varphi_1 + \alpha_2 \phi_2 \varphi_2) dx, \\ &\forall (\phi_1, \phi_2), (\varphi_1, \varphi_2) \in V_2 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \end{aligned}$$

$f(t, (y_1, y_2)) = (-\gamma_1 \sin(y_1 + y_2) + f_1(t, x), -\gamma_2 \sin(y_1 - y_2) + f_2(t, x))$  とおくと、明らかにこの非線型項は仮定を満たす。従って弱い解が存在する。

**EXAMPLE 4** についても同様に弱い解が存在することが示される。

Klein-Gordon equation である **EXAMPLE 5** については、時間局所的な弱い解が存在する。

## 4 Sine-Gordon 方程式の数値解析

紙数の関係で、**EXAMPLE 1** のみ考える。以下  $\Omega = (0, l)$  とする。

$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = l$  を区間  $(0, l)$  の部分区間  $I_j = (x_{j-1}, x_j)$  への分割点とし  $h_j = x_j - x_{j-1}, j = 1, 2, \dots, N+1$  とおく。有限要素集合  $V_h$  を

$$V_h = \{y : y \text{ は各 } I_j \text{ 上で線形かつ } [0, l] \text{ 上で連続かつ } y(0) = y(l) = 0\}$$

により定義する。明らかに、 $V_h \subset H_0^1(0, l)$  である。 $V_h$  の基底関数  $\psi_i \in V_h, i = 1, 2, \dots, N$  を

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{at } x = x_j, \quad j = 0, 1, \dots, N+1, \\ \text{linear} & \text{at } x \neq x_j, \quad j = 0, 1, \dots, N+1. \end{cases} \quad (4.1)$$

により定義する。 $(\phi, \psi) = \int_0^l \phi(x) \psi(s) dx$  を  $L^2(0, l)$  の内積とする。方程式の近似解  $y_h(t, x)$  を、 $y_h(t, x) = \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \psi_i(x)$  の形で作る。ここで、 $y_h$  は、方程式

$$\begin{cases} (y_h'', \psi_j) + \alpha(y_h', \psi_j) + \beta(\nabla y_h, \nabla \psi_j) + \gamma(\sin y_h, \psi_j) = (f, \psi_j), \\ (y_h(0), \psi_j) = (y_0, \psi_j), \quad (y_h'(x), \psi_j) = (y_1, \psi_j), \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.2)$$

の解とする。この方程式 (4.2) は、 $\xi$  に関する方程式

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \xi_i''(t)(\psi_i, \psi_j) + \alpha \sum_{i=1}^N \xi_i'(t)(\psi_i, \psi_j) + \beta \sum_{i=1}^N \xi_i(t)(\nabla\psi_i, \nabla\psi_j) \\ \quad + \gamma(\sin y_h(t), \psi_j) = (f(t), \psi_j), \\ \sum_{i=1}^N \xi_i(0)(\psi_i, \psi_j) = (y_0, \psi_j), \quad \sum_{i=1}^N \xi_i'(0)(\psi_i, \psi_j) = (y_1, \psi_j). \end{cases} \quad (4.3)$$

に書きなおされる。今

$$\begin{aligned} \Psi &= (\psi_i, \psi_j)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N} \in M_{N \times N}(\mathbf{R}), \\ \Phi &= (\nabla\psi_i, \nabla\psi_j)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N} \in M_{N \times N}(\mathbf{R}), \\ G(t) &= [(\sin y_h(t), \psi_1), \dots, (\sin y_h(t), \psi_N)]^T \in M_{N \times 1}(\mathbf{R}), \\ F(t) &= [(f(t), \phi_1), \dots, (f(t), \psi_N)]^T \in M_{N \times 1}(\mathbf{R}), \\ \Xi(t) &= [\xi_i(t), \dots, \xi_N(t)]^T \in M_{N \times 1}(\mathbf{R}), \\ y_0 &= [(y_0, \psi_1), \dots, (y_0, \psi_N)]^T \in M_{N \times 1}(\mathbf{R}), \\ y_1 &= [(y_1, \psi_1), \dots, (y_1, \psi_N)]^T \in M_{N \times 1}(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

とおくと、(4.3) はベクトル方程式

$$\begin{cases} \Psi \Xi''(t) + \alpha \Psi \Xi'(t) + \beta \Phi \Xi(t) + \gamma G(t) = F(t) \\ \Psi \Xi(0) = y_0, \quad \Psi \Xi'(0) = y_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

になおる。 $\Psi^{-1}$  が存在すればこの方程式は

$$\begin{cases} \Xi''(t) + \alpha \Xi'(t) + \beta \Psi^{-1} \Phi \Xi(t) + \gamma \Psi^{-1} G(t) = \Psi^{-1} F(t) \\ \Xi(0) = \Psi^{-1} y_0, \quad \Xi'(0) = \Psi^{-1} y_1. \end{cases} \quad (4.5)$$

とかける。基底関数  $\psi_i$  は、

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi_i^+(x) = \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1}) & \text{on } [x_{i-1}, x_i], \\ \psi_i^-(x) = -\frac{1}{h_{i+1}}(x - x_{i+1}) & \text{on } [x_i, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (4.6)$$

と分解できる。これより  $i = 1, 2, \dots, N$  にたいして

$$\begin{aligned} (\psi_i, \psi_i) &= \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1}), \quad (\psi_{i+1}, \psi_i) = (\psi_i, \psi_{i+1}) = \frac{1}{6}h_{i+1}, \\ (\nabla\psi_i, \nabla\psi_i) &= \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}, \quad (\nabla\psi_{i+1}, \nabla\psi_i) = (\nabla\psi_i, \nabla\psi_{i+1}) = -\frac{1}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

がわかる。これより

$$\Psi = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} h_1 + h_2 & \frac{h_2}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{2} & h_2 + h_3 & \frac{h_3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{2} & h_3 + h_4 & \frac{h_4}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{N-2} + h_{N-1} & \frac{h_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h_{N-1}}{2} & h_{N-1} + h_N & \frac{h_N}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{h_N}{2} & h_N + h_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_3} & \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} & -\frac{1}{h_4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h_{N-2}} + \frac{1}{h_{N-1}} & -\frac{1}{h_{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_N} & -\frac{1}{h_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h_N} & \frac{1}{h_N} + \frac{1}{h_{N+1}} \end{bmatrix}$$

となる。次に非線型項を考える。まず  $\xi_0(t) = \xi_{N+1}(t) = 0, t \in [0, T]$  とおく。各  $i = 1, 2, \dots, N+1$  に対して,  $\xi_i - \xi_{i-1} \neq 0, t \in [x_{i-1}, x_i]$  かつ  $\xi_{i+1} - \xi_i \neq 0, t \in [x_i, x_{i+1}]$  ならば,

$$\begin{aligned} (\sin y_h(t), \psi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(\xi_{i-1}(t)\psi_{i-1}^-(x) + \xi_i(t)\psi_i^+(x))\psi_i^+(x)dx \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(\xi_i(t)\psi_i^-(x) + \xi_{i+1}(t)\psi_{i+1}^+(x))\psi_i^-(x)dx \\ &= \frac{h_i}{\xi_i(t) - \xi_{i-1}(t)} \left[ -\cos \xi_i(t) + \frac{\sin \xi_i(t) - \sin \xi_{i-1}(t)}{\xi_i(t) - \xi_{i-1}(t)} \right] \\ &\quad + \frac{h_{i+1}}{\xi_{i+1}(t) - \xi_i(t)} \left[ \cos \xi_i(t) - \frac{\sin \xi_{i+1}(t) - \sin \xi_i(t)}{\xi_{i+1}(t) - \xi_i(t)} \right]. \end{aligned}$$

がなりたつ。それ以外例えば,  $\xi_i - \xi_{i-1} = 0$  on  $[x_{i-1}, x_i]$  ならば、上式の第一項を極限形により修正する。

このようにして計算された  $N$  次方程式 (4.5) を 4 次の Runge-Kutta 法により解く。我々は、Mathematica をもちいてそのプログラムを作り数多くの Simulation をおこなった。

**EXAMPLE 2** から **EXAMPLE 5** についても同様の数値解析を行うことができる。



## 5 数値 Simulation 例

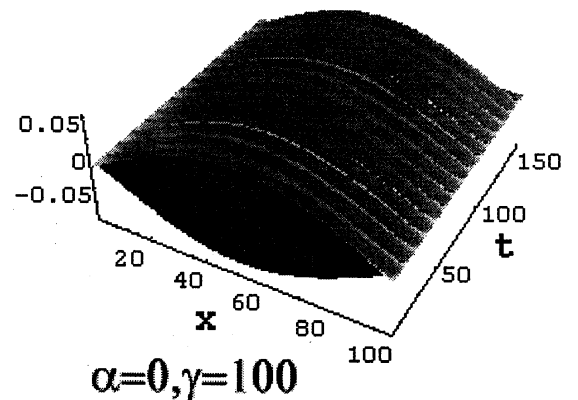
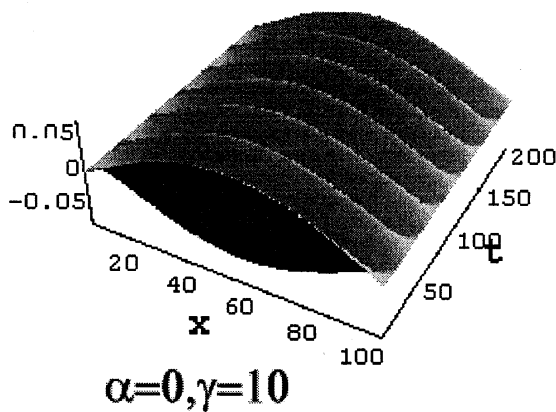
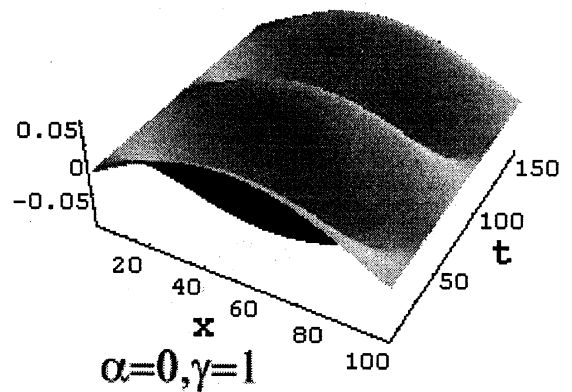
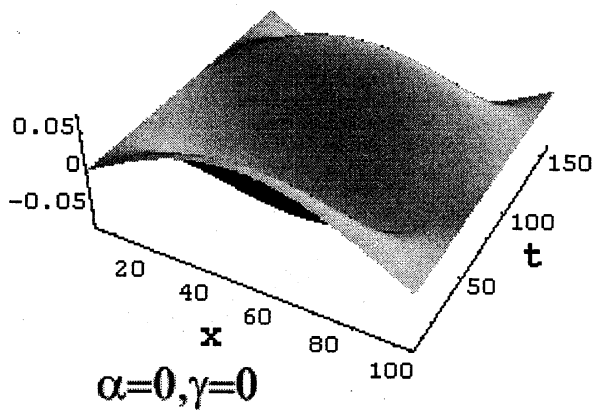
以下全ての例において,

$$f = f_1 = f_2 = 0, \quad y_0 = y_0^1 = y_0^2 = 10^{-1} \sin 10^{-2} \pi x, \quad y_1 = y_1^1 = y_2^1 = 0$$

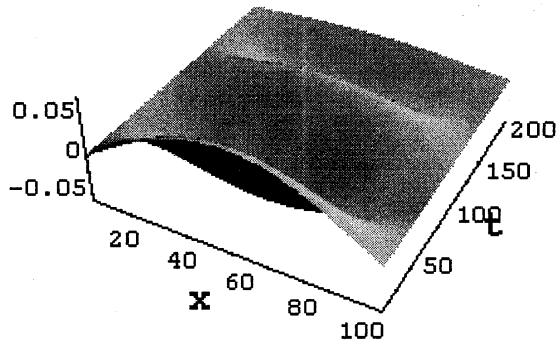
とする。 $\alpha, \beta, \gamma$  の値により解がどのように変化するかを見よう。

### EXAMPLE 1 (Sine-Gordon equation)

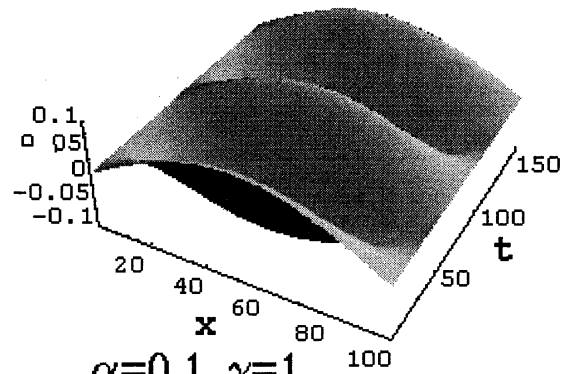
ここでは  $\beta = 0.1$  とする。まず、 $\alpha = 0$  と  $\beta$  の値の変化により解がどのように変化するかをみる。



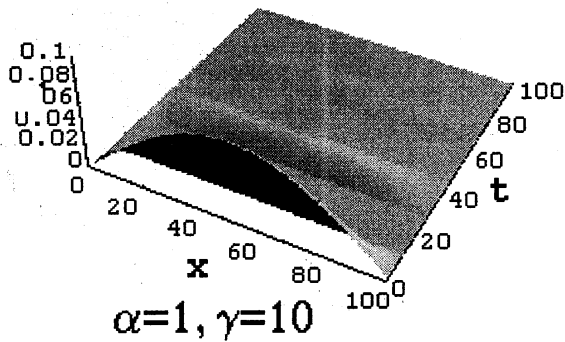
次に減衰のパラメータ $\alpha$ が大きくなる時、また非線型性のパラメータ $\gamma$ が大きくなる時の解の様子を見よう。



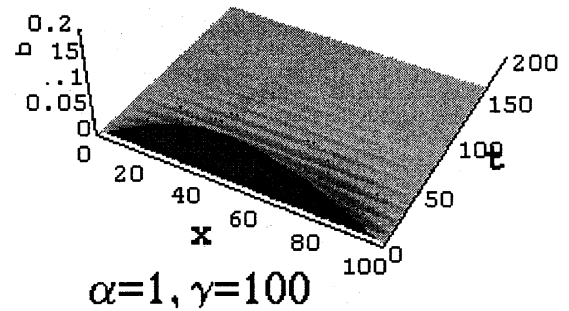
$\alpha=0.1, \gamma=0$



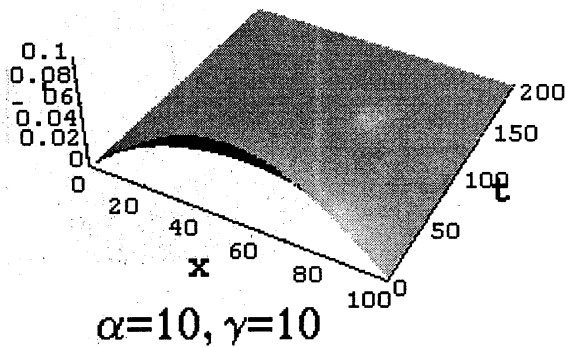
$\alpha=0.1, \gamma=1$



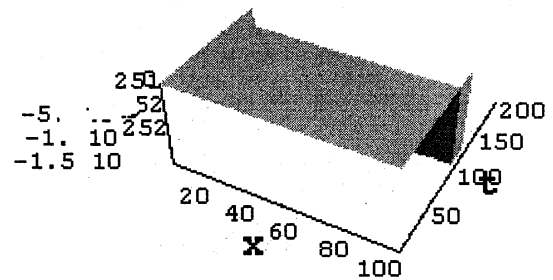
$\alpha=1, \gamma=10$



$\alpha=1, \gamma=100$



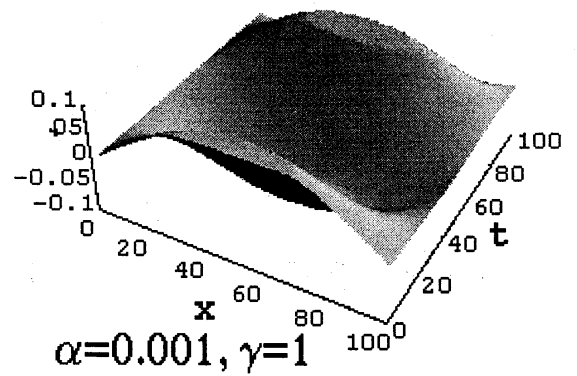
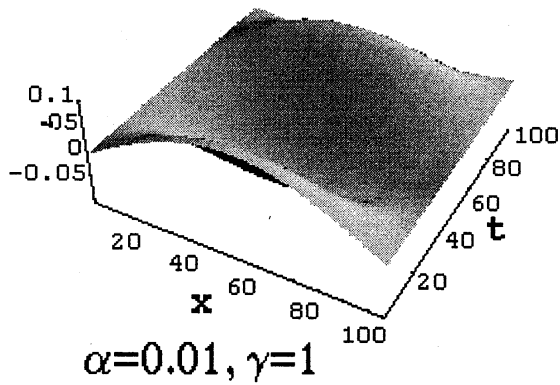
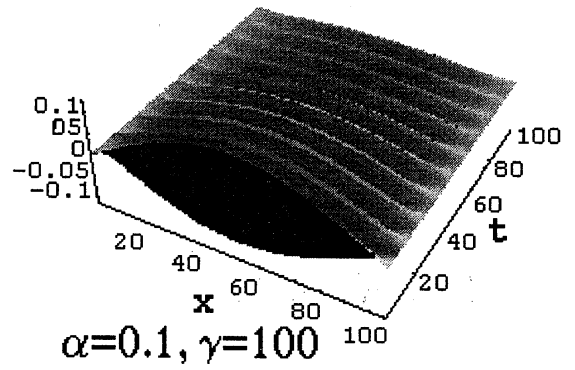
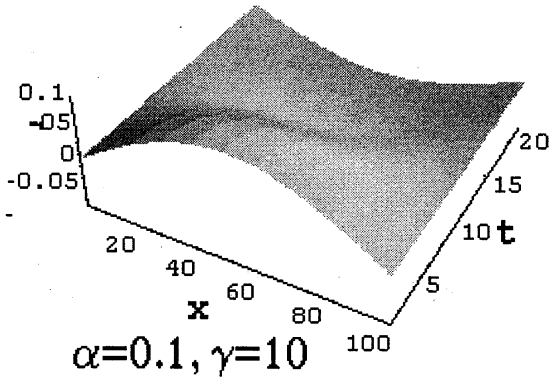
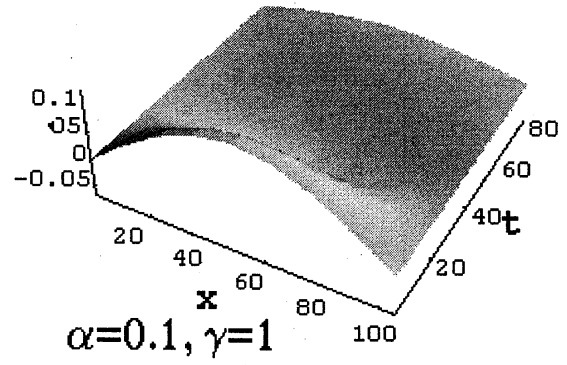
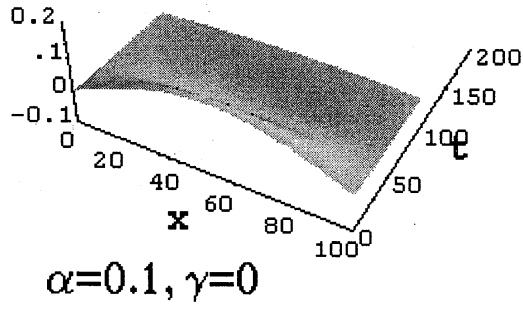
$\alpha=10, \gamma=10$



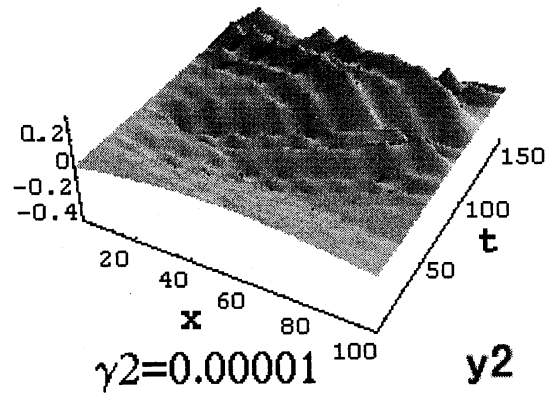
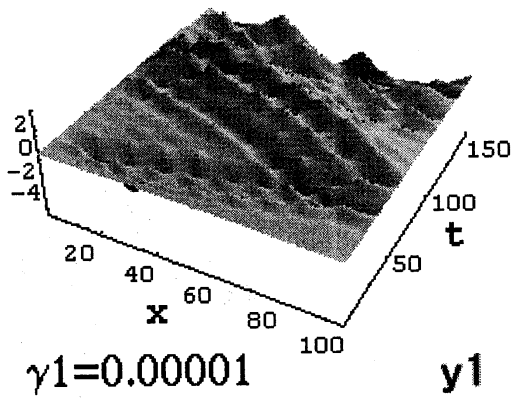
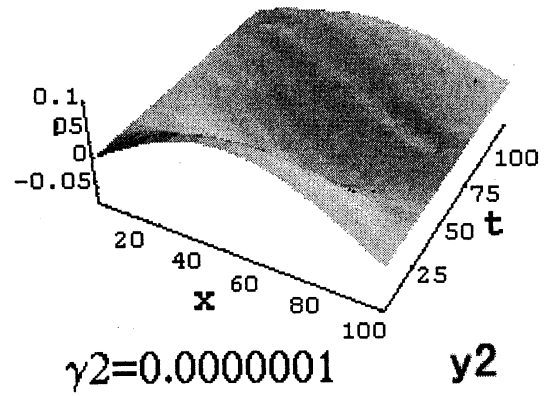
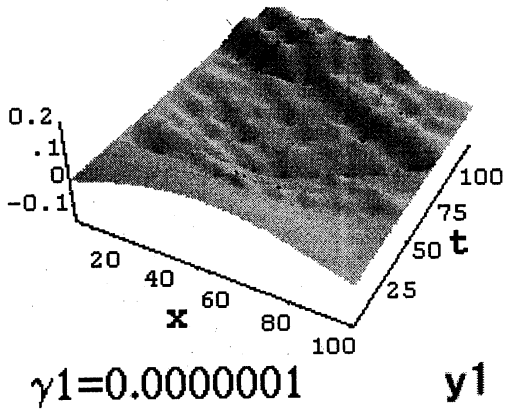
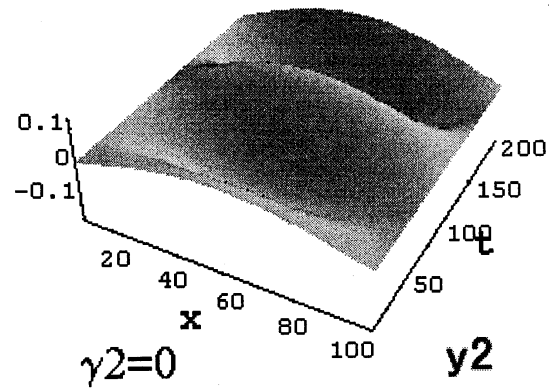
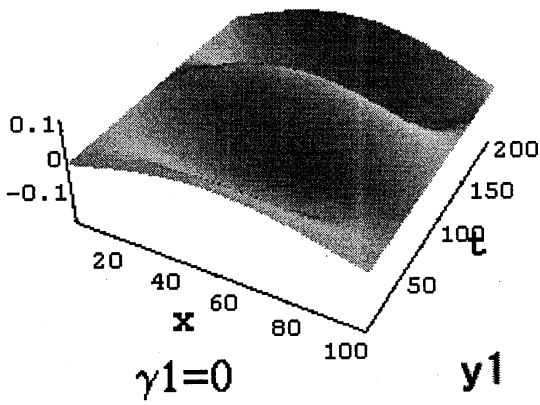
$\alpha=100, \gamma=100$

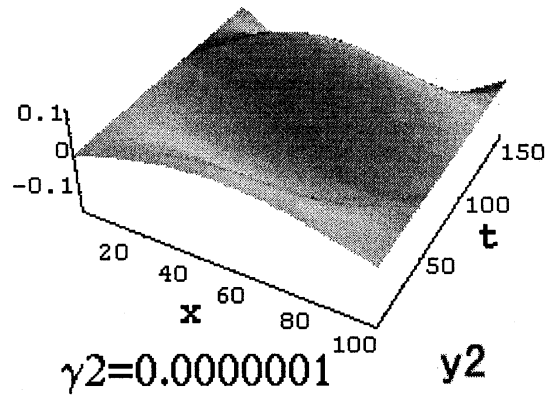
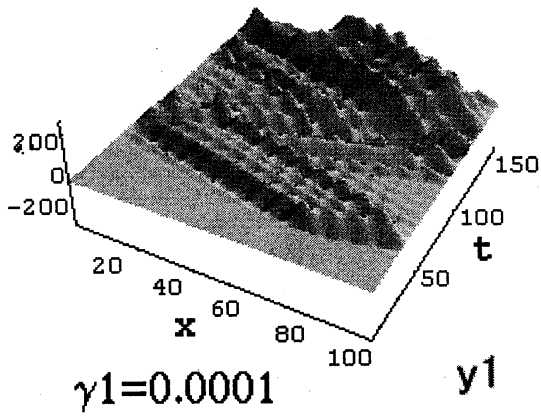
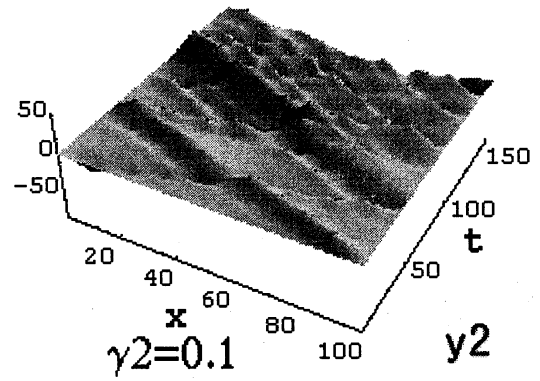
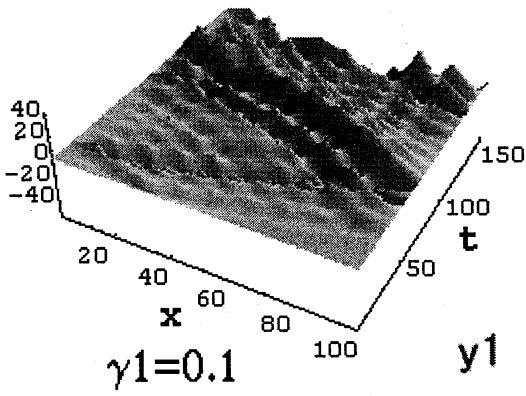
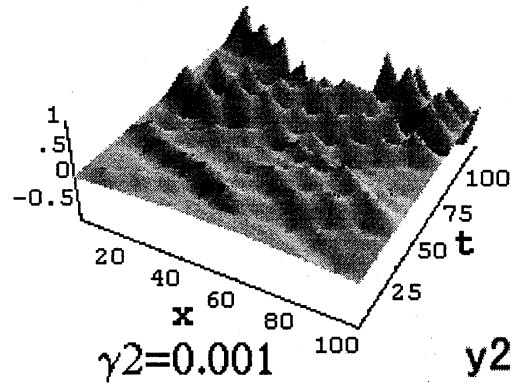
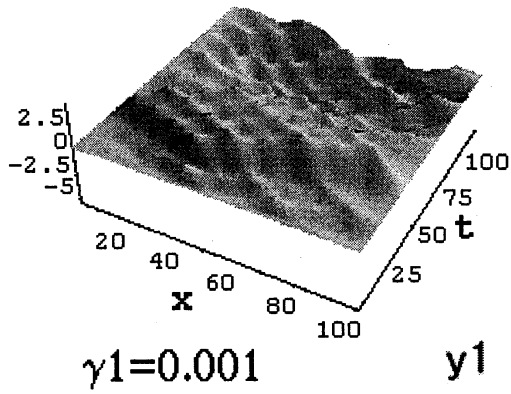
**EXAMPLE 2** (Structural damped Sine-Gordon equation)

この場合は、微少な $\alpha$ の値にたいしても、 $\gamma$ が大きくなると共に解の振動が多くなる。



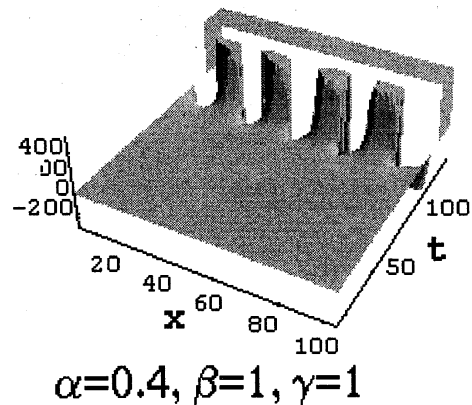
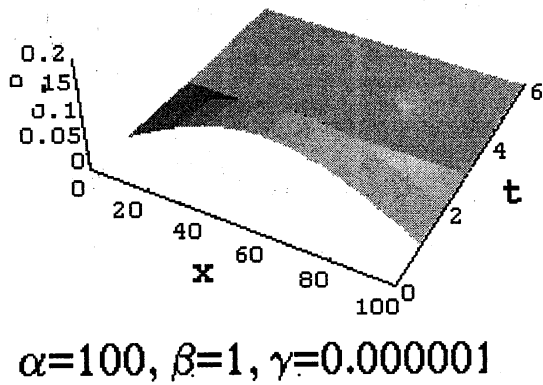
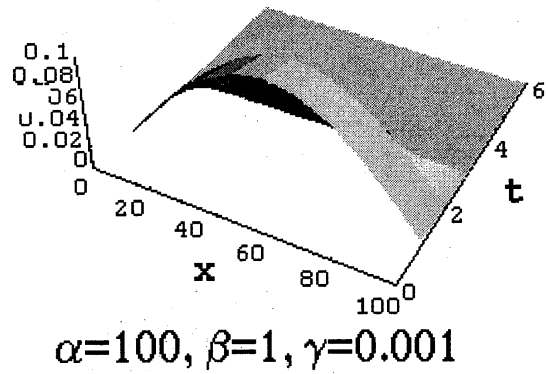
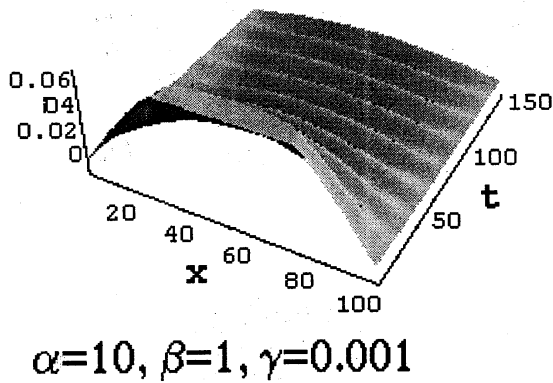
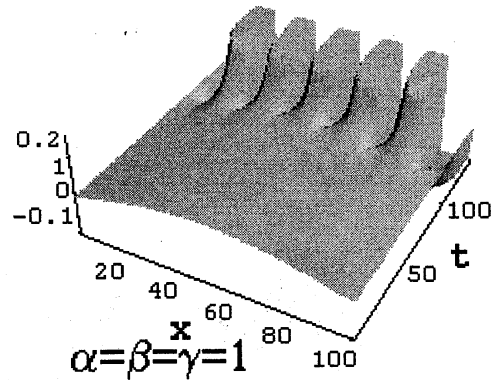
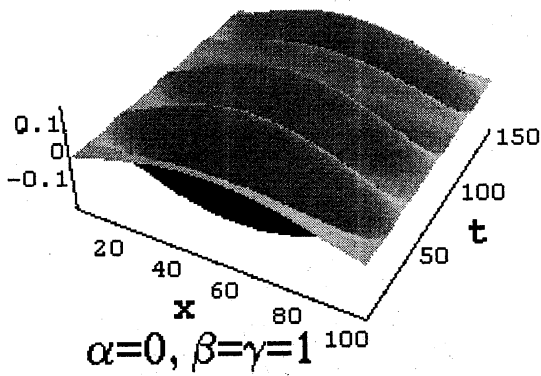
EXAMPLE 3 (Coupled Sine-Gordon equations)





**EXAMPLE 5** (Klein-Gordon equation)

$\gamma \neq 0$  ならば、一般に解は有限時間で爆発するが、小さい時間では、 $\alpha, \beta, \gamma$  の値により次の様な状況になっている。 $\gamma$  が 0 に近いときは、殆ど線形並みなので解は、小さい時間では 0 に近づく。



## 参考文献

- [1] R. Dautary and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 5, Evolution Problems I*, Springer-Verlag, 1992.
- [2] J. L. Lions, *Equations Differentielles, Operationnelles et problèmes aux limits*, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [3] J. L. Lions, *Quelques méthód des vésolution des problèmes aus limites non lineaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [4] J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [5] R. E. Showalter, *Hilbert Space Method for Partial Differential Equations*, Pitman, London, 1977.
- [6] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physis*, Applied Math. Sci. 68, Springer-Verlag, 1988.