

外力項をもつ 2 階半線形微分方程式について  
コメニウス大・物数・ヤロスラフ・ヤーロシュ (Jaroslav Jaroš)  
福岡大・理・草野 尚 (Kusano Takashi)

1. 序

二つの 2 階非線形常微分方程式

$$(p_1(t)|x'|^{\alpha-1}x')' + f(t, x) = h(t), \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

$$(p_2(t)|y'|^{\alpha-1}y')' + q(t)|y|^{\alpha-1}y = 0, \quad t \geq t_0 \tag{2}$$

を考える。ここで、 $\alpha$  は正の定数、 $p_1, p_2, q, h : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  と  $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続な関数で、 $p_1(t)$  と  $p_2(t)$  は  $[t_0, \infty)$  上で正であるとする。我々は方程式 (2) を半線形と呼ぶ。それは (二つの解の和は解, 解の定数倍は解) という同次線形微分方程式の性質のうちの半分 (解の定数倍は解) を (2) ( $\alpha \neq 1$ ) が持っている状況を表す用語である。

方程式 (1) の解とは、 $p_1|x'|^{\alpha-1}x'$  と共に連続微分可能な関数  $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  で、 $[t_0, \infty)$  の各点で (1) を満たすものを謂う。方程式 (2) の解も同様に定義される。以後自明な解は考察から除外される。

(1) の解が無限遠点 ( $t = \infty$ ) に発散する一列の零点をもつとき、その解は振動解と呼ばれる。そうでない解は非振動解と呼ばれる。(1) のすべての解が振動 [非振動] であるとき方程式 (1) は振動 [非振動] であると言われる。これらの定義は勿論方程式 (2) に対しても通用する。

連続関数  $h : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  に対して次の性質をもつ 2 点  $t_1, t_2 \in [t_0, \infty)$ ,  $t_1 < t_2$ , を  $h$  の隣り合う符号変更点と言う：

$$t \in [t_1, t_2] \Rightarrow h(t) \geq 0 \text{ (} h(t) \leq 0 \text{)},$$
$$\exists \varepsilon > 0 : t \in (t_1 - \varepsilon, t_1) \cup (t_2, t_2 + \varepsilon) \Rightarrow h(t) < 0, \text{ (} h(t) > 0 \text{)}$$

本論文の最初の結果は、外力項のない半線形方程式 (2) の振動性から外力項のある方程式 (1) の振動性を推論することを可能ならしめる Sturm 型の比較定理である。この定理によれば、例えば、振動方程式 (2) に外力項を付け加えたとき、それが振動でその隣り合う符号変更点の距離が (2) の任意の解の隣り合う零点の距離より大きいならば、(2) の振動性は変わらずに保存されるという事実が示される。

第二の結果は、振動を生成する外力項に関するもので、付加する外力項  $h$  が振動でその振幅が (後述の意味で) 十分に大きいならば、元々の外力項なしの方程式が振動であると非振動であることに拘らず、外力項が付け加えられた方程式は振動になることを主張するものである。

2. 主結果

$\alpha = 1$  の場合、方程式 (1) の主要部は線形微分作用素で、

$$(p_1(t)x')' + f(t, x) = h(t), \quad t \geq t_0 \tag{3}$$

となる. ここで  $p: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $h: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\int_{t_0}^{\infty} p^{-1}(t)dt = \infty$  で,  $f: [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は第二変数に関して単調非減少で  $xf(t, x) > 0$  ( $x \neq 0$ ) を満たす連続関数であるとす. この場合, 方程式 (3) が振動であるのは, (3) で  $h(t) \equiv 0$  とした方程式が振動であって,

$$(p_1(t)\rho'(t))' = h(t), \quad t \geq t_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0 \quad (4)$$

を満たす振動関数  $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  が存在するときしかもそのときに限るという事実が知られている. (例えば [8] 参照) このような考え方, 即ち,

$$(p_1(t)|\rho'(t)|^{\alpha-1}\rho'(t))' = h(t), \quad t \geq t_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$$

を満たす関数  $\rho$  を利用する方法は方程式 (1) ( $\alpha \neq 1$ ) に対しては適用出来ない. 何故ならば, 微分作用素  $L_\alpha[u] = (p_1(t)|u'|^{\alpha-1}u)'$ ,  $\alpha \neq 1$ , が加法性をもたないために, 関数  $z(t) = x(t) - \rho(t)$  は対応する外力項なしの方程式の解になり得ないからである.

我々は比較定理の証明に当たって別の方法を採用する. それは, 線形微分作用素について周知の Picone の等式を自己随伴半分線形微分作用素へ拡張した所謂一般化された Picone の等式を用いる方法である. 非線形微分作用素に対する Picone 型等式はこれ迄の文献には見当らず, 従って後述の等式は簡単ながら一つの発見であると思われる. 比較定理の証明の中で次の補題が必要になる. ([4] 参照).

**補題.**  $\alpha > 0, X \geq 0, Y \geq 0$  ならば

$$X^{\alpha+1} + \alpha Y^{\alpha+1} - (\alpha + 1)XY^\alpha \geq 0$$

である. 等号は  $X = Y$  のときしかもそのときに限って成り立つ.

**定理 1.** 次の仮定を置く:

$$p_2(t) \geq p_1(t), \quad t \geq t_0, \quad (5)$$

$$u[f(t, u) - q(t)|u|^{\alpha-1}u] \geq 0, \quad u \neq 0, \quad t \geq t_0. \quad (6)$$

但し,  $h(t) \equiv 0$  である任意の开区間で上で (5) と (6) の両方が同時に等式になることはないとする. 更に方程式 (2) は振動であると仮定する. このとき, もし外力項  $h(t)$  が振動で, その隣り合う符号変更点の距離が (2) の任意の解の隣り合う零点の距離より大きいならば, 方程式 (1) は振動である.

**証明.** 背理法に依る. 方程式 (1) が非振動解  $x(t)$  をもつと仮定する. 一般性を失うことなく,  $x(t)$  は区間  $[T_x, \infty)$ ,  $T_x \geq t_0$ , で正であるとしてよい.  $t_2 \geq t_1 \geq T_x$  を外力項  $h(t)$  の隣り合う符号変更点とし,  $h(t) \leq 0, t \in [t_1, t_2]$  とする. 半分線形微分方程式の解の存在と一意性に関する基本定理 ([1,6,7]) により, (2) の解  $y(t)$  で

$$y(t_1) = 0, \quad y'(t_1) > 0$$

を満たすものがある. 定理の仮定から  $y(t_3) = 0$  となる  $t_3 \in (t_1, t_2]$  が存在する.  $[t_1, t_2]$  において次の等式が成り立つことが容易に確かめられる.

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{y}{x^\alpha} [x^\alpha (p_2 |y'|^{\alpha-1} y') - y^\alpha (p_1 |x'|^{\alpha-1} x')] \right\}' \\ &= (p_2 - p_1) |y'|^{\alpha+1} + p_1 \left[ |y'|^{\alpha+1} + \alpha \left( \frac{y|x'|}{x} \right)^{\alpha+1} - (\alpha+1) |x'|^{\alpha-1} x' y' \left( \frac{y}{x} \right)^\alpha \right] \\ & \quad + \frac{y^{\alpha+1}}{x^\alpha} [f(t, x) - q(t)x^\alpha] - \frac{y^{\alpha+1}}{x^\alpha} h(t) \end{aligned} \quad (7)$$

これを (1) と (2) に対する一般化された Picone 等式と呼ぶ. 等式 (7) を区間  $[t_1, t_3]$  上で積分し,  $X = |y'|, Y = y|x'|/x$  として補題を用いると, 直ちに矛盾が得られる. (終)

注意 1. 定理 1 は  $\alpha = 1$  の場合を扱った [3] の結果を拡張したものである.

注意 2. 定理 1 においては半分線形方程式 (2) の任意の解の零点分布についての情報が予め必要である. 解の零点分布状況を詳らかにすることが出来る振動型半分線形方程式の例を二つ挙げる.

(1) 方程式 (2) において  $p_2(t) \equiv 1, q(t) \equiv \alpha$  としたもの

$$(|y'|^{\alpha-1} y')' + \alpha |y|^{\alpha-1} y = 0 \quad (8)$$

を考える. これを一般化された調和振動子と言う. この方程式の解で  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  を満たすものを  $S(t)$  と書き, 一般化された正弦関数と呼ぶ.  $S(t)$  はすべての  $t \in \mathbb{R}$  に対して

$$|S(t)|^{\alpha+1} + |S'(t)|^{\alpha+1} = 1, \quad S(t + \pi_\alpha) = -S(t)$$

を満たす周期  $2\pi_\alpha$  の周期関数である. ここで  $\pi_\alpha$  は次式で定義される定数である:

$$\pi_\alpha = \frac{2\pi}{\alpha+1} / \sin \frac{\pi}{\alpha+1} \quad (9)$$

$S(t)$  の零点は  $k\pi_\alpha, k \in \mathbb{Z}$ , である. ([1] 参照). 半分線形方程式に対する初期値問題の解の一意性を用いると, (8) の解はすべて  $cS(t - \tau)$  の形をしていることが示されるから, (8) の非自明解はすべて周期  $2\pi_\alpha$  の周期解であることが結論される.

(2) 方程式 (2) において  $p_2(t) \equiv 1$  としたもの

$$(|y'|^{\alpha-1} y')' + q(t) |y|^{\alpha-1} y = 0, \quad t \geq t_0 \quad (10)$$

を考える.  $q(t)$  に条件  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$  を課す. (10) は明らかに振動である.  $y(t)$  を (10) の任意の解とし, その零点を  $\{t_n\}$  とする. 任意の正数  $\varepsilon > 0$  に対して  $\mu > 0$  を十分大きく取って  $2\pi_\alpha/\mu < \varepsilon$  とする.  $q(t)$  に対する条件から,  $t \geq T_\mu \Rightarrow q(t) > \alpha\mu^{\alpha+1}$  となる  $T_\mu \geq t_0$  が存在する.  $[T_\mu, \infty)$  において方程式 (10) を次の方程式と比較する:

$$(|z'|^{\alpha-1} z')' + \alpha\mu^{\alpha+1} |z|^{\alpha-1} z = 0 \quad (11)$$

半分線形方程式に対する Sturm 型比較定理 ([1] 参照) を適用し,  $z = S(\mu t)$  (隣り合う零点の間隔は  $\pi_\alpha/\mu$ ) が (11) の解であることに気を付けると,  $[T_\mu, \infty)$  に含まれる  $y(t)$  の零点  $t_n$  は  $t_{n+1} - t_n < \varepsilon$  を満たすことが分かる. これは  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$  を示している. 従って, 我々の方程式 (10) の任意の解の隣り合う零点の距離は限りなく小さくなる.

例 1. 外力項  $h(t)$  が振動で, 隣り合う符号変更点の距離が  $\pi_\alpha$  より大ならば, 方程式

$$(|x'|^{\alpha-1}x')' + \alpha|x|^{\alpha-1}x = h(t), \quad t \geq t_0$$

は振動である. そのような  $h(t)$  の例として

$$\sin \beta t \quad (0 < \beta < \pi/\pi_\alpha), \quad \sin(\log t), \quad S(\gamma t) \quad (0 < \gamma < 1), \quad S(\log t)$$

を挙げておく.  $S(t)$  は一般化された正弦関数である.

例 2. 方程式

$$(|x'|^{\alpha-1}x')' + q(t)|x|^{\alpha-1}x = h(t), \quad t \geq t_0$$

を考える. ここで  $q(t)$  は条件  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$  を満たすと仮定する. もし外力項  $h(t)$  が“穏やかに振動する関数”ならば, 即ち,  $h(t)$  の隣り合う符号変更点の距離がある正の数より小さくなることはないならば, この方程式は振動である.

次に外力項によって生成される振動現象について考察する. (1) よりも幾らか一般的な外力項付きの方程式

$$(p(t)\phi(x'))' + f(t, x) = h(t), \quad t \geq t_0 \quad (12)$$

を考えることにする. (12) に対して以下の仮定を置く:

(a)  $p: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  は連続

(b)  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続, 狭義単調増加,  $\operatorname{sgn} \phi(u) = \operatorname{sgn} u$  かつ  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(c)  $f: [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続,  $t \geq t_0$  に対して  $f(t, v)$  は  $v$  に関して単調非減少かつ  $\operatorname{sgn} f(t, v) = \operatorname{sgn} v$

(d)  $h: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は連続かつ振動

下記の定理は, 方程式  $(p(t)\phi(y'))' + f(t, y) = 0$  が非振動である場合でも, 適当に大きい振動的な外力を加えればそれを振動させることが出来るであろうという自然な予想を正当化する.

定理 2. 十分大きなすべての  $T \geq t_0$  とすべての定数  $k > 0, l$  に対して

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left\{ k + \int_T^t \phi^{-1} \left[ \frac{1}{p(s)} \left( l + \int_T^s h(\sigma) d\sigma \right) \right] ds \right\} < 0 \quad (13)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ -k + \int_T^t \phi^{-1} \left[ \frac{1}{p(s)} \left( l + \int_T^s h(\sigma) d\sigma \right) \right] ds \right\} > 0 \quad (14)$$

が成り立つと仮定する. 但し  $\phi^{-1}$  は  $\phi$  の逆関数を表す. このとき方程式 (12) は振動である.

証明. 背理法に依る. (12) の非振動解を  $x(t)$  とする.  $x(t)$  は区間  $[t_1, \infty)$ ,  $t_1 \geq t_0$ , において正であると仮定してよい. (12) と (c) から

$$(p(t)\phi(x'(t)))' = h(t) - f(t, x(t)) \leq h(t), \quad t \geq t_0$$

が得られる. この不等式を  $t_1$  から  $t$  まで積分し

$$p(t)\phi(x'(t)) \leq c_1 + \int_{t_1}^t h(s)ds, \quad c_1 = p(t_1)\phi(x'(t_1))$$

更にこれを  $p(t)$  で割って再び  $t_1$  から  $t$  まで積分すると

$$x(t) \leq c_2 + \int_{t_1}^t \phi^{-1} \left[ \frac{1}{p(s)} \left( c_1 + \int_{t_1}^s h(\sigma)d\sigma \right) \right] ds, \quad t \geq t_1 \quad (15)$$

が得られる. ここで  $c_2 = x(t_1)$  である. (15) の両辺の  $t \rightarrow \infty$  のときの下極限を取り, (13) を使うと,  $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) < 0$  という結論が出るが, これは  $x(t) > 0, t \geq t_1$ , に反する.  $x(t) < 0, t \geq t_1$ , と仮定しても同様な論法で矛盾を引き出すことが出来る. (終)

例 3. 方程式

$$((x')^{1/3})' + q(t)x^{1/3} = t \sin t, \quad t \geq t_0 \quad (16)$$

を考える.  $q: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  は連続であるとする. (16) は (12) の特別な場合

$$p(t) \equiv 1, \quad \phi(u) = u^{1/3}, \quad f(t, v) = q(t)v^{1/3}, \quad h(t) = t \sin t$$

である. ((16) が (1) の特別な場合であることは勿論である.) 外力項に課す条件 (13), (14) を方程式 (16) に対して書けば

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left\{ k + \int_T^t \left( l + \int_T^s \sigma \sin \sigma d\sigma \right)^3 ds \right\} < 0$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ -k + \int_T^t \left( l + \int_T^s \sigma \sin \sigma d\sigma \right)^3 ds \right\} > 0$$

となるが, これらは実際満たされている. 任意の定数  $T \geq t_0, l$  に対して

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left( l + \int_T^s \sigma \sin \sigma d\sigma \right)^3 ds = -\infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left( l + \int_T^s \sigma \sin \sigma d\sigma \right)^3 ds = +\infty$$

が成り立つからである. 従って, 定理 2 によって,  $q(t)$  が何であっても方程式 (16) は振動である. (16) に付随する (外力項のない) 半分線形方程式

$$((y')^{1/3})' + q(t)y^{1/3} = 0$$

に対しては,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{1/3} \int_t^\infty q(s) > 3/4^{4/3} \text{ ならば振動}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{1/3} \int_t^\infty q(s) < 3/4^{4/3} \text{ ならば非振動}$$

であることが知られている. ([5,9] 参照).

付言. (2) の形の半分線形微分方程式の振動性の組織的研究は Elbert [1] に遡る. 彼の功績は, (2) は  $\alpha \neq 1$  のとき非線形であるが, その振動性は  $\alpha = 1$  の場合, 即ち線形の Sturm

Liouville 方程式

$$(p(t)y')' + q(t)y = 0 \quad (17)$$

の振動性と酷似しているという事実を発見したことである。その後 Elbert の路線に沿って半線形方程式と線形方程式との類似性をより深く追求しようという試みが一部でおこなわれている。([5,7,9,11,12] 参照)。Atkinson 以降, Emden-Fowler の方程式

$$(p(t)y')' + q(t)|y|^{\gamma-1}y = 0 \quad (\gamma > 0, \gamma \neq 1) \quad (18)$$

の振動性の研究が盛んに行われたが, (17) と (18) の振動性の関連を見れば, 同様な関連が半線形方程式 (2) と方程式

$$(p_2(t)|y|^{\alpha-1}y')' + q(t)|y|^{\beta-1}y = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (19)$$

の間に存在することが容易に予想される。その予想がある程度正しいことが最近の研究の結果明らかになっている。([2,6,10,11] 参照)。

#### References

- [1] Á. ELBERT, A half-linear second order differential equation. *Colloquia Mathematica Janos Bolyai 30 : Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged (1979)*, 153 - 180.
- [2] Á. ELBERT and T. KUSANO, Oscillation and nonoscillation theorems for a class of second order quasilinear differential equations. *Acta Mathematica Hungarica* **56** (1990), 325 - 336.
- [3] J.R. GRAEF, S.M. RANKIN and P.W. SPIKES, Oscillation results for nonlinear functional differential equations. *Funkcialaj Ekvacioj* **27** (1984), 255 - 260.
- [4] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD and G. POLYA, Inequalities. *Cambridge University Press* (1988).
- [5] H. HOSHINO, R. IMABAYASHI, T. KUSANO and T. TANIGAWA, On second-order half-linear oscillations. *Advances in Mathematical Sciences and Applications* (to appear).
- [6] M. KITANO and T. KUSANO, On a class of second order quasilinear ordinary differential equations. *Hiroshima Mathematical Journal* **25** (1995), 321 - 355.
- [7] T. KUSANO, Oscillation theory of second-order half-linear differential equations. *Lecture Notes at Fukuoka University* (1996) (in Japanese).
- [8] T. KUSANO and M. NAITO, Oscillation criteria for a class of perturbed Schrödinger equations. *Canadian Mathematical Bulletin* **25** (1982), 71 - 77.

- [9] T. KUSANO, Y. NAITO and A. OGATA, Strong oscillation and nonoscillation of quasilinear differential equations of second order. *Differential Equations and Dynamical Systems* **2** (1994), 1 – 10.
- [10] T. KUSANO, A. OGATA and H. USAMI, Oscillation theory for a class of second order quasilinear ordinary differential equations with application to partial differential equations. *Japanese Journal of Mathematics* **19** (1993), 131 – 147.
- [11] T. KUSANO and N. YOSHIDA, Nonoscillation theorems for a class of quasilinear differential equations of second order. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **189** (1995), 115 – 127.
- [12] H.J. LI, C.C. YEH, Sturmian comparison theorem for half-linear second order differential equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A* **125** (1995), 1193 – 1204.