数理解析研究所講究録
984巻 1997年 71-74

関数微分方程式 $x'(t)=A(t)x(t-r(t,x_t))$ の一様安定性について

大阪府大工 西平 慎太郎 (Shintaro Nishihira)
大阪府大工 米山 俊昭 (Toshiaki Yoneyama)

本講演では、次の関数微分方程式

$$(DDE) \qquad x'(t)=A(t)x(t-r(t,x_t))$$

の零解の一様安定性 (US) について得られた結果を述べる. ここで $A(t)$ は $t\geqq 0$ で定義された $n\times n$ 関数行列,$q\geqq 0$,$r:[0,\infty)\times C_n^q\to[0,q]$ は連続汎関数である. また,C_n^qは連続関数 $\varphi:[-q,0]\to R^n$の空間とする.

(DDE) の零解の一様漸近安定性 (UAS) については, 常微分方程式

$$(LE) \qquad x'(t)=A(t)x$$

に関する定数変化法を用いて, 次の結果が得られている.

Theorem A. (T.YONEYAMA,1991) *(LE)* の零解は一様漸近安定であると仮定する. つまり,

$$\exists K>0,\ \exists\lambda>0,\ |X(t)X^{-1}(s)|\leqq Ke^{-\lambda(t-s)},\ t\geqq s\geqq 0$$

であるとする. ここで $X(t)$ は *(LE)* の基本行列である. このとき,

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+q}|A(s)|ds<\left(\frac{\lambda q}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ならば,*(DDE)* の零解は *(UAS)* である.

同様の方法によって, 一様安定性及び漸近安定性 (AS) に関する結果を得た.

Theorem 1. *(LE)* の零解が一様安定であると仮定し,

$$(C) \qquad \int_q^\infty|A(s)|\alpha(s)ds<\infty, \quad \alpha(s)=\int_{s-q}^s|A(u)|du$$

を満たすとする. このとき *(DDE)* の零解は *(US)* である.
さらに *(LE)* の零解が漸近安定であると仮定すると *(DDE)* の零解は *(AS)* である.

Proof.
$x(t)$ を $x_{t_0}=\phi(t_0\geqq 0,\phi\in C_n^q)$ に対する (DDE) の解とする. このとき,

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^t A(s)x(s-r(s,x_s))ds,\ t\geqq t_0$$

であるから,

$$|x(t)| \leqq \|\phi\| + \int_{t_0}^{t} |A(s)| \|x_s\| ds.$$

Gronwall の不等式より

$$|x(t)| \leqq \|\phi\| \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} |A(s)| ds \right\}.$$

よって,(DDE) の解は全区間で存在することが分かる. また,

$$x'(t) = A(t)x(t) - A(t) \int_{t-r(t,x_t)}^{t} A(s)x(s - r(s, x_s))ds \quad (t \geqq t_0 + q)$$

となるから,(LE) に対する定数変化法によって

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)A(s) \int_{s-r(s,x_s)}^{s} A(u)x(u - r(u, x_u))duds.$$

$$|x(t)| \leqq |X(t)X^{-1}(t_0)| \|\phi\| + \int_{t_0}^{t} |X(t)X^{-1}(s)||A(s)| \int_{s-q}^{s} |A(u)||x(u - r(u, x_u))|duds.$$

(LE) の零解は (US) であるから

$$\exists K > 0, \quad |X(t)X^{-1}(s)| \leqq K \quad for \quad t \geqq s \geqq 0.$$

したがって,

$$|x(t)| \leqq K\|\phi\| + \int_{t_0}^{t} |A(s)| \int_{s-q}^{s} |A(u)||x(u - r(u, x_u))|duds.$$

ここで

$$y(t) = \sup_{s \in [t-2q, t]} |x(s)|, \ (t \geqq t_0 + q)$$

とおくと,

$$y(t) \leqq K\|\phi\| + K \int_{t_0}^{t} |A(s)| \int_{s-q}^{s} |A(u)|du y(s) ds.$$

Gronwall の不等式より

$$y(t) \leqq K\|\phi\| \exp\left\{ K \int_{t_0}^{t} |A(s)| \int_{s-q}^{s} |A(u)|duds \right\}.$$

よって

$$|x(t)| \leqq K\|\phi\| \exp\left\{ K \int_{t_0}^{t} |A(s)| \int_{s-q}^{s} |A(u)|duds \right\}, \ (t \geqq t_0 + q).$$

ゆえに条件 (C) より (DDE) の零解は (US) であることがわかる.

次に,(LE) の零解が漸近安定であると仮定すると,

$$X(t) \longrightarrow 0.$$

いま, 零解は (US) であるから $\exists \delta > 0, \ \forall t_0 \geqq 0, \ \|\phi\| < \delta$ ならば

$$\forall t \geqq t_0 - q : |x(t)| < 1.$$

よって

$$|x(t)| \leqq |X(t)||X^{-1}(t_0)|||\phi|| \; + \; |X(t)|\left|\int_{t_0}^{T} X^{-1}(s)A(s)\int_{s-r(s,x_s)}^{s} A(u)x(u-r(u,x_u))duds\right| \\ + \; K\int_T^t |A(s)|\int_{s-q}^{s}|A(u)|duds.$$

$T>0$ を十分大きくとっておけば,$\forall\varepsilon>0$ に対して

$$\int_T^t |A(s)|\int_{s-q}^{s}|A(u)|duds < \frac{\varepsilon}{K}$$

とできる. よって

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leqq |X(t)||X^{-1}(t_0)|||\phi|| \\ &+ |X(t)|\left|\int_{t_0}^{T} X^{-1}(s)A(s)\int_{s-r(s,x_s)}^{s} A(u)x(u-r(u,x_u))duds\right| + \varepsilon \\ &< 3\varepsilon \quad (for\ large\ t). \end{aligned}$$

ゆえに

$$x(t) \to 0 \quad (t \to \infty). \qquad Q.E.D.$$

次の Lemma は条件 (C) について考察したものである.

Lemma 1.

$$a \in C([0,\infty) \to [0,\infty)),\ a(t) = O(t^{-p}).$$

$$p > \frac{1}{2} \Longrightarrow \int_q^\infty a(s)\alpha(s)ds < \infty \text{ ここで } \alpha(s) = \int_{s-q}^{s} a(u)du$$

Proof.

$$\exists K>0,\ \exists T>0,\ \forall t \geqq T-q : a(t) \leqq Kt^{-p}$$

$$\begin{aligned} \int_T^\infty a(s)\alpha(s)ds &= K^2\int_T^\infty s^{-p}\int_{s-q}^{s} u^{-p}duds \\ &\leqq K^2\int_T^\infty (s-q)^{-2p}ds \\ &< \infty. \end{aligned} \qquad Q.E.D.$$

まず, 1 次元の場合について例をあげる.

(DDE) $\quad x'(t) = a(t)x(t-r(t,x_t)),\ a \in C([0,\infty) \to R)$

Example 1.

$$a(t) = \frac{\sin t}{t+1} \Longrightarrow (DDE) \text{ の零解は } (US)$$

Example 2.

$$a(t) = \frac{-1}{t+1} \Longrightarrow (DDE) \text{ の零解は } (US) \text{ かつ } (AS)$$

次に2次元の場合についての例をあげる.

$$(DDE) \qquad x'(t) = A(t)x(t - r(t, x_t)), \ a, b \in C([0, \infty) \to R)$$

Example 3.

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix}$$

$$a(t) = \frac{\sin t}{t+1}, \ b(t) = \frac{\cos t}{t+1} \Longrightarrow (DDE) \text{ の零解は } (US)$$

$$a(t) = \frac{-1}{t+1}, \ b(t) = \frac{\cos t}{t+1} \Longrightarrow (DDE) \text{ の零解は } (US) \text{ かつ } (AS)$$