数理解析研究所講究録
985巻 1997年 1-6

下半連続関数の epi-convergence に対する特徴づけ

東工大 大学院情報理工学研究科 木村 泰紀 (Yasunori Kimura)

1 はじめに

距離空間 X から $[-\infty,+\infty]$ への下半連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. 関数のエピグラフに対して集合の収束の概念を適用することで, 関数の epi-convergence を定義することができる. 本研究では特に集合の収束として Painlevé-Kuratowski 収束を考え, 可分な距離空間上の関数列の収束に対する同値条件を与えた Beer, Rockafellar, Wets の結果を可分でない空間上で考えた場合にどうなるのかを考察した.

1992 年に Beer, Rockafellar, Wets によって以下の定理が証明された [4].

定理 X を可分な距離空間とし, $f, f_1, f_2, \ldots$ を X から $[-\infty,+\infty]$ への下半連続関数の列とする. このとき以下は同値である:

(i) $\operatorname{epi} f = \text{K-}\lim_{n\to\infty} \operatorname{epi} f_n$;

(ii) 任意の実数 α に対して α に収束する実数列 $\{\alpha_n\}$ が存在して

$$\operatorname{slv}(f,\alpha) = \text{K-}\lim_{n\to\infty} \operatorname{slv}(f_n,\alpha_n)$$

をみたす.

ただし $\operatorname{slv}(f,\alpha) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ である.

同じ論文で, 連続体仮説を仮定した場合に, 可分でない距離空間では二つの命題が同値にならない例が存在することも示されている. したがって, 可分でない距離空間で考える場合には epi-convergence の同値条件として上記のものとは別のものを考える必要がある. 本研究ではレベルセットを構成する実数列 $\{\alpha_n\}$ のかわりに, コンパクト集合上で一様収束する関数の列を用いることで同値条件となることを証明した.

2 準備と補題

距離空間 Xの部分集合の列 $\{A_n\}$ を考える．十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in A_n$であるような $x \in X$に収束する点列が存在するとき，x は $\{A_n\}$ の**極限点**であるという．また，自然数の増加列 $\{n_k\}$ と，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n_k} \in A_{n_k}$をみたす $y \in X$への収束点列が存在するとき，yは $\{A_n\}$ の**収積点**であるという．

以下は集合の収束の定義である [5]．

定義 $\{A_n\}$ を距離空間 Xの集合の列とする．このとき，$\{A_n\}$ の極限点，収積点の全体をそれぞれ $\mathrm{Li}_n A_n$, $\mathrm{Ls}_n A_n$ であらわす．さらに，$\mathrm{Li}_n A_n = \mathrm{Ls}_n A_n = A$ が成り立つとき $\{A_n\}$ は A に **Painlevé-Kuratowski 収束**するといい，$A = \mathrm{K}\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n$とあらわす．

距離空間の部分集合 A と $r > 0$ に対し，$S_r(A)$ で A からの距離が rより小さい点の全体をあらわす．すなわち $S_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$ である．また，A が一点集合 $\{x\}$ のときは，$S_r(\{x\})$ のかわりに $S_r(x)$ ともあらわす．

関数 $f : X \to [-\infty, +\infty]$ に対し，$\{(x, \alpha) : f(x) \leq \alpha\} \subset X \times \mathbb{R}$ なる集合を fの**エピグラフ**といい，$\mathrm{epi}\, f$であらわす．同様にして，$\{(x, \alpha) : f(x) \geq \alpha\} \subset X \times \mathbb{R}$ を**ハイポグラフ**といい，$\mathrm{hypo}\, f$であらわす．また，$A \subset X \times Y$のとき，A の Xへの射影を$\pi_X(A)$ であらわす．

以下に，主定理を証明するのに必要な補題を述べる．

補題 1 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$を距離空間 Xから実数への同程度連続な関数の族で任意の $x \in X$に対して $\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) < +\infty$ をみたすものとする．このとき

$$f(x) = \sup_{\lambda} f_\lambda(x)$$

で定義された関数 fは Xで連続である．

証明 $\{f_\lambda\}$ が同程度連続なので，任意の $x \in X$と$\epsilon > 0$ に対してある$\delta > 0$があり，$|f_\lambda(x) - f_\lambda(w)| < \epsilon/2$ が任意の $w \in S_\delta(x)$ と$\lambda \in \Lambda$に対して成り立つ．$f(w_0) - f(x) \geq \epsilon$となるような $S_\delta(x)$ が存在したと仮定すると，fの定義より $f(w_0) - f_{\lambda_0}(w_0) < \epsilon/2$ なる$\lambda_0 \in \Lambda$が存在する．このとき

$$\begin{aligned} f_{\lambda_0}(x) - f(x) &\geq f_{\lambda_0}(x) - f(w_0) + \epsilon \\ &> f_{\lambda_0}(x) - f_\lambda(w_0) - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \\ &> -\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon = 0. \end{aligned}$$

これは矛盾である．よって $f(w) - f(x) < \epsilon$が任意の $w \in S_\delta(x)$ について成り立つ．次に $f(x) - f(w_1) \geq \epsilon$となる $w_1 \in S_\delta(x)$ が存在したとしよう．このとき任意の$\lambda \in \Lambda$に対して $f(x) - f_\lambda(w_1) \geq \epsilon$なので

$$\begin{aligned} f(x) - f_\lambda(x) &= f(x) - f_\lambda(w_1) + f_\lambda(w_1) - f_\lambda(x) \\ &\geq \epsilon + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

が任意の$\lambda\in\Lambda$で成り立つ．よって$f(x)>f(x)+\epsilon$となり矛盾．したがって，任意の$w\in S_\delta(x)$に対して$|f(x)-f(w)|<\epsilon$が成り立ち．fは連続であることが示された． □

補題 2 hを距離空間X上の有界な関数とする．このとき任意の$r>0$に対してX上の連続な関数fで

$$\mathrm{hypo}\,h\subset\mathrm{hypo}\,g\subset S_r(\mathrm{hypo}\,h)$$

をみたすものが存在する．

証明 hは有界なので，ある正の実数Mが存在して任意の$x\in X$に対して$|h(x)|-r/2>-M$をみたしている．各$x\in X$に対して$a_x:X\to\mathbb{R}$を

$$a_x(w)=h(x)+\frac{r}{2}-\frac{4M}{r}d(x,w)$$

で定義する．明らかに$\{a_x\}_{x\in X}$は同程度連続なので，補題 1 より

$$g:X\ni w\mapsto\sup_{x\in X}a_x(w)\in\mathbb{R}$$

は連続であり，さらにfは$\mathrm{hypo}\,h\subset\mathrm{hypo}\,g$もみたしている．$\mathrm{hypo}\,g\subset S_r(\mathrm{hypo}\,h)$を示す．任意の$w\in X$に対して$g(w)-r/2<a_x(w)$をみたす$x\in X$が存在する．$d(x,w)<r/2$のときは$a_x(w)\le a_x(x)=h(x)+r/2$より

$$d((w,a_x(w),\mathrm{hypo}\,h)\le d((w,a_x(w)),(x,a_x(w)-r/2))=\frac{r}{2}.$$

また，$d(x,w)\ge r/2$のときは

$$a_x(w)\le h(x)+\frac{r}{2}-2M<-M<h(w).$$

よって$d((w,a_x(w)),\mathrm{hypo}\,h)=0$．したがって

$$\begin{aligned}d((w,g(w)),\mathrm{hypo}\,h)&\le d((w,g(w)),(w,a_x(w)))+d((w,a_x(w)),\mathrm{hypo}\,h)\\&=g(w)-a_x(w)<\frac{r}{2}.\end{aligned}$$

これで$\mathrm{hypo}\,g\subset S_r(\mathrm{hypo}\,h)$が示された． □

補題 3 $f,f_1,f_2,f_3,\ldots$を距離空間Xから$[-\infty,+\infty]$への下半連続関数列とし，$g_1,g_2,g_3,\ldots$をXから$\mathbb{R}$への関数で$\alpha\in\mathbb{R}$にコンパクト集合上で一様収束する列とする．このとき$\mathrm{Ls}_n\,\mathrm{epi}\,f_n\subset\mathrm{epi}\,f$ならば

$$\mathop{\mathrm{Ls}}_n\pi_X(\mathrm{epi}\,f_n\cap\mathrm{hypo}\,g_n)\subset\mathrm{slv}(f,\alpha).$$

証明 $x\in\mathrm{Ls}_n\,\pi_X(\mathrm{epi}\,f_n\cap\mathrm{hypo}\,g_n)$をとると，自然数の列$\{n_i\}$と$\{x_{n_i}\in\pi_X(\mathrm{epi}\,f_{n_i}\cap\mathrm{hypo}\,g_{n_i})\}$が存在して$x_{n_i}\to x$とできる．$f_{n_i}(x_{n_i})\le g_{n_i}(x_{n_i})$なので$(x_{n_i},g_{n_i}(x_{n_i}))\in\mathrm{epi}\,f_{n_i}$．$\{g_{n_i}\}$は$\alpha$に収束するので$(x_{n_i},g_{n_i}(x_{n_i}))\to(x,\alpha)\in\mathrm{Ls}_n\,\mathrm{epi}\,f_n\subset\mathrm{epi}\,f$となり，$f(x)\le\alpha$を得る．これは$x\in\mathrm{slv}(f,\alpha)$となることを示している． □

補題 4 $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ を距離空間 X から $[-\infty, +\infty]$ への下半連続関数列とする．任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して X 上の連続関数列 $\{g_n\}$ が存在して

(i) $\{g_n\}$ はコンパクト集合上で α に一様収束する；

(ii) $\mathrm{slv}(f, \alpha) = \mathrm{K}\text{-}\lim_{n\to\infty} \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n)$;

をみたすならば, $\mathrm{epi}\, f = \mathrm{K}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathrm{epi}\, f_n$ である．

証明 $(x, \alpha) \in \mathrm{epi}\, f$ をとると，これは $x \in \mathrm{slv}(f, \alpha)$ を意味するので, 補題の仮定をみたす連続関数列 $\{g_n\}$ がある．よって, $x_n \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n)$ をみたす X の点列 $\{x_n\}$ が存在して $x_n \to x$ とすることができる．ここで, $(x_n, g_n(x_n)) \in \mathrm{epi}\, f_n$ であり, $(x_n, g_n(x_n)) \to (x, \alpha)$ であるから, $(x, \alpha) \in \mathrm{Li}_n\, \mathrm{epi}\, f_n$. よって $\mathrm{epi}\, f_n \subset \mathrm{Li}_n\, \mathrm{epi}\, f_n$ である．

次に $\mathrm{Ls}_n\, \mathrm{epi}\, f_n \subset \mathrm{epi}\, f$ を背理法で示す．$(x, \beta) \in \mathrm{Ls}_n\, \mathrm{epi}\, f_n \setminus \mathrm{epi}\, f \neq \emptyset$ をとることができると仮定しよう．すると $\beta < f(x)$ であり, さらに自然数の増加列 $\{n_i\}$ と $(x_{n_i}, \beta_{n_i}) \in \mathrm{epi}\, f_{n_i}$ なる (x, β) への収束列がとれる．$\beta < \alpha < f(x)$ なる α に対して補題の仮定をみたすような $\{g_n\}$ を考えると, $g_{n_i}(x_{n_i}) \to \alpha$ なので, 十分大きな $i \in \mathbb{N}$ に対して $\beta_{n_i} < g_{n_i}(x_{n_i})$ となる．このことから $x_{n_i} \in \pi_X(\mathrm{epi}\, f_{n_i} \cap \mathrm{hypo}\, g_{n_i})$ が成り立ち, $x \in \mathrm{slv}(f, \alpha)$ を得るが, これは $\alpha < f(x)$ に矛盾．よって補題は成立した．□

3 epi-convergence の同値条件

定理 $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ を距離空間 X から $[-\infty, +\infty]$ への下半連続関数の列とする．このとき, 以下は同値である:

(i) $\mathrm{epi}\, f = \mathrm{K}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathrm{epi}\, f_n$;

(ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, コンパクト集合上で一様に α に収束する連続関数列 $\{g_n\}$ が存在して

$$\mathrm{slv}(f, \alpha) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{K}\text{-}\lim}\, \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n)$$

をみたす．

証明 (ii) を仮定して (i) がいえることはすでに補題 4 で示した．(i) を仮定して (ii) がいえることを証明する．

補題 3 より, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と α にコンパクト集合上で一様収束する連続関数列 $\{g_n\}$ に対して

$$\underset{n}{\mathrm{Ls}}\, \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n) \subset \mathrm{slv}(f, \alpha)$$

が成立する．したがって, そのような $\{g_n\}$ のなかで

$$\mathrm{slv}(f, \alpha) \subset \underset{n}{\mathrm{Li}}\, \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n)$$

をみたすものが存在すればよい．

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\{S_{1/k}(x)\}_{x \in \mathrm{slv}(f,\alpha)}$ は $\mathrm{slv}(f,\alpha)$ の開被覆となる．距離空間はパラコンパクトなので，これの細分で局所有限な開被覆がとれる．これを $\{U^{(k,\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda^k}$ とする．以上の操作を各 $k \in \mathbb{N}$ について同様に繰り返すことで局所有限な $\mathrm{slv}(f,\alpha)$ の開被覆の列を得る．各 $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Lambda^k$ に対し $(x^{(k,\lambda)}) \in U^{(k,\lambda)} \cap \mathrm{slv}(f,\alpha)$ をとると $(x^{(k,\lambda)}, \alpha) \in \mathrm{epi}\, f$ であることと定理の仮定から，点列 $\{(x_n^{(k,\lambda)}, \alpha_n^{(k,\lambda)}) \in \mathrm{epi}\, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$\lim_{n \to \infty} (x_n^{(k,\lambda)}, \alpha_n^{(k,\lambda)}) \to (x^{(k,\lambda)}, \alpha)$$

をみたすものが存在する．以上のようにして，各 $U^{(k,\lambda)}$ に対応する点列 $\{x_n^{(k,\lambda)}\}$ をとることができた．

任意の $r > 0$ に対し，$N^{(k,\lambda)}(r) \in \mathbb{N}$ を

$$(x_n^{(k,\lambda)}, \alpha_n^{(k,\lambda)}) \in U^{(k,\lambda)} \times [\alpha - r, \alpha + r]$$

が任意の $n \geq N^{(k,\lambda)}(r)$ で成り立つように定義する．これを用いて $X \times \mathbb{R}$ の部分集合の列 $\{H_n\}, \{\hat{H}_n\}$ を次のように定義する：

$$H_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(x_l^{(k,\lambda)}, \alpha_l^{(k,\lambda)}) : l = n, l \geq N^{(k,\lambda)}(1/k), \lambda \in \Lambda^k\};$$

$$\hat{H}_n = H_n + (\{0\} \times [0, -\infty[);$$

さらに，$h_n : X \to [-\infty, +\infty]$ を $\mathrm{epi}\, h_n = \hat{H}_n$ なる関数とする．補題 2 より，各 h_n に対して

$$\mathrm{hypo}\, h_n \subset \mathrm{hypo}\, g_n \subset S_{1/n}(\mathrm{hypo}\, h_n)$$

なる連続関数 g_n が存在する．ここで，$\{g_n\}$ が α にコンパクト集合上で一様収束すること，すなわち任意の $x \in X$ と $\epsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ と $\delta > 0$ が存在して，$n \geq N$ かつ $d(x,w) < \delta$ ならば $|\alpha - g_n(w)| < \epsilon$ であることを証明する．いま，x, ϵ を固定し，$k' = 2/\epsilon$ をとる．$j = 1, 2, 3, \ldots, k'$ に対する $\{U^{(j,\lambda)}\}$ の局所有限性を用いると，x のある近傍 U_0 をとって U_0 と共通部分を持つ $U^{(k,\lambda)}$ が有限個しか存在しないようにできる．ここで U_0 と共通部分を持つものを $\{U^{(k_i,\lambda_i)}\}_{i=1}^{m}$ とかく．自然数 N' を

$$N' = \max\{N^{(k_i,\lambda_i)}(\epsilon/2) : i = 1, 2, 3, \ldots, m\}$$

とする．すると，H_n と N' の定義から

$$|\alpha_n^{(k_i,\lambda_i)} - \alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が任意の $n \geq N'$ と $(x_n^{(k,\lambda)}, \alpha_n^{(k,\lambda)}) \in H_n \cap (U_0 \times \mathbb{R})$ で成り立つ．このことから

$$|h_n(w) - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

が任意の $n \geq N'$ と $w \in U_0$ でいえることがわかる．さらに $0 < \delta < \epsilon/2$ かつ $S_{2\delta}(x) \subset U_0$ をみたす δ をとり，$N = \max\{1/\delta, N'\}$ とすると $S_\delta(x) \cap S_\delta(U_0^c) = \emptyset$ であり，$n \geq N$ ならば

$$\mathrm{hypo}\, g_n \subset S_{1/n}(\mathrm{hypo}\, h_n) \subset S_{1/N}(\mathrm{hypo}\, h_n) \subset S_\delta(\mathrm{hypo}\, h_n)$$

である．よって

$$|h_n(w) - g_n(w)| < \delta < \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

が任意の $n \geq N$ と $w \in S_\delta(x)$ で成り立つ．(1) と (2) より，

$$|\alpha - g_n(w)| < \frac{\epsilon}{2}$$

が任意の $n \geq N$ と $w \in S_\delta(x)$ で成り立つので $\{g_n\}$ がαにコンパクト集合上で一様収束することが証明された．

h_n, g_nの定義より，$n \leq N^{(k,\lambda)}(1/k)$ ならば $x_n^{(k,\lambda)} \in \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n)$ である．これは $x^{(k,\lambda)} \in \mathrm{Li}_n\, \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n)$ を意味する．$\{x^{(k,\lambda)} : k \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda^k\}$ は，対応する開被覆の定義から，$\mathrm{slv}(f, \alpha)$ で稠密なので

$$\mathrm{slv}(f, \alpha) \subset \mathop{\mathrm{Li}}_n \pi_X(\mathrm{epi}\, f_n \cap \mathrm{hypo}\, g_n)$$

となる．これで (ii) が示された．　□

参考文献

[1] G. Beer, *More on convergence of continuous functions and topological convergence of sets*, Canad. Math. Bull. **28** (1985), 52–59.

[2] ———, *On the Fell topology*, Set-Valued Anal. **1** (1993) 69–80.

[3] ———, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[4] G. Beer, R. T. Rockafellar, and R. Wets, *A characterization of epi-convergence in terms of convergence of level sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 753–761.

[5] K. Kuratowski, *Topology*, vol. 1, Academic Press, New York, 1966.