数理解析研究所講究録
985巻 1997年 79-93

On characterizations of K-weakly precompact sets in Banach spaces

静岡大学　理　松田　稔 (Minoru Matsuda)

§1. 序. 我々は、最近の論文 [11], [12] において、「バナッハ空間の共役空間の弱*コンパクト集合 K が与えられた時、バナッハ空間の有界集合 A が K に関して弱プレコンパクトである(これを、A は K-weakly precompact set であるという)ための種々の必要十分条件」を与えた。本報告は "K-weakly precompact set A" の紹介とともに、我々の視点、方法の活用によりこれらの中で得られた "K-weakly precompact set A" の様々な特徴付けを述べることを目的として構成されたものである。

この報告を通して X を実バナッハ空間、その位相的共役を X^* とし、B(X) は X の閉単位球とする。(I, Λ, λ) は I $(= [0,1])$ 上のルベーグ測度空間とし、$\Lambda^+ = \{ A \in \Lambda : \lambda(A) > 0 \}$ であり、$L_1 = L_1(I, \Lambda, \lambda)$, $L_\infty = L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ とする。各 $E \in \Lambda^+$ に対して $\Delta_E = \{ \chi_F / \lambda(F) : F \subset E,\ F \in \Lambda^+ \}$ とする。我々は以後、I 上には Λ と λ が備わっているものと考える。X^{**} (: X^* の位相的共役、topological bidual of X) の部分集合 C に対して、関数 $f : I \to X^*$ が C-可測であるとは、各 $x^{**} \in C$ について $(x^{**}, f(t))$ が λ に関して可測(即ち、λ-可測)であることをいい、特に $C = X$ (resp. $C = X^{**}$) である時、f は弱*可測 (resp. 弱可測) であるという。$f : I \to X^*$ が weak* scalarly null とは、各 $x \in X$ に対して $(x, f(t)) = 0$ λ-a.e. であることをいい、$f : I \to X^*$ が C-可測関数 $g : I \to X^*$ と weak*-equivalent であるとは、$f - g$ が weak* scalarly null であることをいう。有界な値域を持つ弱*可測関数 $f : I \to X^*$ が与えられた時、我々は $T_f(x) = x \circ f$ $(x \in X)$ により定義される有界線形写像 $T_f : X \to L_1$ を持つ。その時、この共役作用素を T_f^* (: $L_\infty \to X^*$) と表す。X の有界集合 A について、$\overline{A}^*$ は A の X^{**} における $\sigma(X^{**}, X^*)$-closure (即ち、弱*閉包) を表す。又、X^* の部分集合 H に対して、$\overline{co}^*(H)$ は H の弱*閉凸包を表す。以後、X^* の弱*コンパクト集合上には常に、弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ が備わっているものと考える。

さて過去において我々は、M. Talagrand[16] により以下のように定義され、その基本的特徴付けが与えられたペッティス集合 (Pettis set) に関して、さらなる一連の特徴付けを与えてきた(例えば、[7], [8], [9], [10] 等を参照)。

定義 1. X^* の弱*コンパクト集合 K がペッティス集合であるとは、恒等写像 $i : K \to X^*$ が universally scalarly measurable である時をいう。

即ち、$B(X^{**})$ $(= \sigma(X^{**}, X^*)$-closure of $B(X))$ の各元 x^{**} 毎に定義される実数値関

数 (x^{**}, x^*) が、 K 上の関数として universally measurable である時、K をペッティス集合というのである。その時、M. Talagrand[16]（あるいは、L.H. Riddle and E. Saab[13]）により与えられたペッティス集合に関する基本的特徴付けを、ここで注意しよう。それは、「K がペッティス集合 $\Leftrightarrow$ $\overline{co}^*(K)$ が弱ラドン－ニコディム集合（weak Radon-Nikodym set） $\Leftrightarrow$ B(X) の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は K 上の各点で収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k\geq 1}$ を持つ $\Leftrightarrow$ $\forall x^{**} \in B(X^{**})$ と $\forall$ M : weak* compact subset of K について $x^{**}|M$（x^{**} の M 上への制限）は連続点を持つ」である。

これから示唆され、我々は実バナッハ空間における局所化された弱プレコンパクト性の概念を次のように定義する（[6] あるいは [1] を参照)。

定義 2. X^* の弱*コンパクト集合 K について、 X の有界集合 A が K-weakly precompact（あるいは、A が K に関して weakly precompact）であるとは、 A の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が K 上の各点で収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k\geq 1}$ を持つ時をいう。

特に、 $K = B(X^*)$ であるならば、このような集合 A は（単に）weakly precompact といわれ、これは H. Rosenthal[14] により、l_1 を含まない実バナッハ空間を特徴付けるべく考察された概念である。又、上述のペッティス集合に関する特徴付けから、X^* の弱*コンパクト集合 K について「K がペッティス集合 $\Leftrightarrow$ B(X) が K-weakly precompact」である。その上、本質的にはこのことから「$\bar{A}^*$ の各元 x^{**} 毎に定義される実数値関数 (x^{**}, x^*) が、 K 上の関数として universally measurable である $\Leftrightarrow$ A が K-weakly precompact」であることが得られることを注意しよう。

この概念（これは今注意したように、一方では weakly precompact set の一般化であり、他方では Pettis set の一般化にあたる概念である）について、E.M. Bator and P.W. Lewis[1] は系統的な研究を行い、S.P. Fitzpatrick[2], E. Saab and P. Saab[15] 等との類似性（その方法や、得られた結果）の中で、K が非凸の場合や、凸の場合のこの“K-weakly precompact set A”の様々な特徴付けを与えた。ところで我々は、[7] で得られた関数を活用することで（先に述べたように）一連のペッティス集合に関する特徴付けを与えてきた。その際いつも実感したことは、非ペッティス集合 K について得られた K-値関数があらゆる場合に重要な役割を演じていることであった。従って、“K-weakly precompact set A”の解析においても又、これと同様の視点が採り得るのではないかと期待するのは自然であろう。実にこのことが、以下において具体化され得る。即ち、我々は“non-K-weakly precompact set A”において、非ペッティス集合 K の場合と同様の役割を演じる、或る K-値関数を獲得し、その性質を適切、効果的に調べることにより“K-weakly precompact set A”の一連の具体的解析を可能とするのである。

一方我々は、“K-weakly precompact set A”の解析には E.M. Bator and P.W. Lewis [1] で導入された次の概念（X^* の部分集合に関する 1 つの幾何的性質）も、M. Girardi and J.J. Uhl[4] と同等の視点で眺めることにより、さらに非常に有用なものであることに気付く。

定義 3. X^* の有界集合 H について、H の weak*-open slice (resp. weak* slice) であるとは次の形の集合をいう。

$$S(x, \alpha, H) = \{ x^* \in H : (x, x^*) > \sup_{y^* \in K} (x, y^*) - \alpha \}.$$

$$(\text{resp. } \bar{S}(x, \alpha, H) = \{ x^* \in H : (x, x^*) \geqq \sup_{y^* \in K} (x, y^*) - \alpha \})$$

但し、$x \in X$, $\alpha > 0$.
次に、 C を X^{**} の部分集合とする時、H が weak*-C-dentable であるとは、任意の正数 ε と任意の $x^{**} \in C$ について、 H の weak*-open slice S (= $S(x, \alpha, H)$) を適当にとれば

$$O(x^{**}|S)\ (= \sup \{|(x^{**}, x^*) - (x^{**}, y^*)| : x^*, y^* \in S \}, \text{ the oscillation of } x^{**} \text{ on } S) < \varepsilon$$

とできる時をいう。
特に、 C = $B(X^{**})$ である時、このような性質を持つ集合 H は weak*-scalarly dentable であるといわれる。

この定義から容易に生じる次のことを注意しよう。「集合 H が weak*-C-dentable ⇔ 任意の正数 ε と任意の $x^{**} \in C$ について、 H の weak* slice $\bar{S}$ (= $\bar{S}(x, \alpha, H)$) を適当にとれば

$$O(x^{**}|\bar{S})\ (= \sup \{|(x^{**}, x^*) - (x^{**}, y^*)| : x^*, y^* \in \bar{S}\}, \text{ the oscillation of } x^{**} \text{ on } \bar{S}) < \varepsilon$$

とできる」($\because$ $\bar{S}(x, \alpha/2, H) \subset S(x, \alpha, H) \subset \bar{S}(x, \alpha, H)$, $\forall x \in X$, $\forall \alpha > 0$)。
さらに、"K-weakly precompact set A"を特徴付けるために必要とされる概念（測度論的性質）を定義しよう ([12] を参照のこと)。

定義 4. C を X^{**} の部分集合（但し、$X \supsetneq C$）とし、$f : I \to X^*$ は有界弱*可測関数とする。その時、 f が C-Pettis integrable であるとは、次の 2 つの条件が満たさ

れる時をいう。

(1) f は C-可測である。

(2) 各 $E \in \Lambda$ について

$$(x^{**},\ T_f{}^*(\chi_E)) = \int_E (x^{**},\ f(t))d\lambda(t)$$

が、任意の $x^{**} \in C$ について成り立つ。

特に、 $C = B(X^{**})$ である時、このような性質を持つ有界な弱*可測関数 $f : I \to X^*$ は Pettis integrable（ペッティス積分可能）な関数といわれる。即ち、次の性質を持つものである。

(3) f は弱可測である。

(4) 各 $E \in \Lambda$ について、X^* の元 $x_E{}^*$ が唯 1 つ存在し

$$(x^{**},\ x_E{}^*) = \int_E (x^{**},\ f(t))d\lambda(t)$$

が、任意の $x^{**} \in X^{**}$ について成り立つ。

これを用いて、有界な弱*可測関数 $f : I \to X^*$ の C-Pettis decomposability を次のように定義しよう。

定義 5. C を X^{**} の部分集合（但し、$X \ntrianglerighteq C$）とし、$f : I \to X^*$ は有界弱*可測関数とする。その時、 f が C-Pettis decomposable（C-ペッティス分解可能)であるとは、f が C-Pettis integrable である有界弱*可測関数 g と weak* scalarly null である関数 h との和、即ち、 $f = g + h$ と表され得る時をいう。

最後に、もう 1 つの幾何的性質（tree に関わる）として、δ-Rademacher tree の一般化である次の概念を定義しよう。

定義 6. X^* の 1 つの系 $\{ x^*(n,k) : n = 0, 1, \cdots , k = 1, \cdots , 2^n \}$ が tree であるとは、 $x^*(n,k) = \{ x^*(n+1,2k-1) + x^*(n+1,2k) \}/2$ が、 $n = 0, 1, \cdots , k = 1, \cdots , 2^n$ に対して満たされることをいう。

X の有界集合 A について、 X^* の tree $\{ x^*(n,k) : n = 0, 1, \cdots , k = 1, \cdots , 2^n \}$ が A-δ-Rademacher tree であるとは

$$\sup_{x \in A} |(x,\ \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (x^*(n,2k-1) - x^*(n,2k))|$$

$$\geqq 2^n \delta$$

が、任意の自然数 n に対して満たされることをいう。

特に、$A = B(X)$ である時、この性質を満たす tree は δ-Rademacher tree であるといわれる。

さて、以上の概念を用いて“K-weakly precompact set A”の種々の特徴付けを与える次の定理を示そう。その際、lifting theory ([5]), weak*-$\overline{\Lambda}^{*}$-dentability, 及び「A が non-K-weakly precompact である時得られる K-値弱*可測関数」が非常に効果的に利用される。

定理. A を X の有界集合とし、K を X^* の弱*コンパクト集合とする時、次の A と K に関する各陳述は同値である。

(a) 集合 A は K-weakly precompact である。

(b) 任意の弱*可測関数 $f : I \to K$ と任意の $E \in \Lambda^+$ について、集合 $\overline{co}^*(T_f{}^*(\Delta_E))$ は weak*-$\overline{\Lambda}^{*}$-dentable である。

(c) 任意の弱*可測関数 $f : I \to K$ は、$\overline{\Lambda}^{*}$-Pettis decomposable である。

(d) 任意の弱*可測関数 $f : I \to K$ は、或る $\overline{\Lambda}^{*}$-可測関数 $g : I \to \overline{co}^*(K)$ と weak*-equivalent である。

(e) 任意の弱*可測関数 $f : I \to K$ について、集合 $T_f(A)$ は relatively norm compact である。

(f) 任意の弱*可測関数 $f : I \to K$ について、

$$\inf_{n \geq 1}\{\sup_{x \in A}|(x,\ T_f{}^*(r_n))|\} = 0$$

が成り立つ。但し、ここで r_n は nth Rademacher function である。

(g) 任意の弱*可測関数 $f : I \to K$ について、$T_f{}^*(\Delta_I)$ は A-δ-Rademacher tree を含まない。

この定理において強調したい点は、陳述 (a), (b), (c), (d) の同値性である (特に (b) ⇒ (c), (d) ⇒ (a) である)。「(b) ⇒ (c)」の証明は自然であり、その際、Girardi and Uhl と同様の視点及び、lifting theory が効果的に用いられる。又、証明「(d) ⇒ (a)」は、A が non-K-weakly precompact である時構成される K-値弱*可測関数 h の性質の解析から得られる。即ち、ここで構成される弱*可測関数 $h : I \to K$ は、どんな $\overline{\Lambda}^{*}$-可測関数 $g : I \to X^*$ とも weak*-equivalent とはなり得ないことが、その構成のプロセスの故に具体的かつ直接的に示されるのである。さらにこの関数 h は、その他の次の性質を持った関数であることも、その関数の具体性の故に容易に示されるのである。

(α) 集合 $T_h(A)$ は relatively norm compact ではない。

(β) $\inf_{n\geq 1}\{\sup_{x\in A}|(x,\ T_h^*(r_n))|\} > 0.$

(γ) 集合 $T_h^*(\Delta_I)$ は、或る適当な正数 δ に対して、 A-δ-Rademacher tree を含む。

以下 §2, §3 で、我々の強調したい定理の主要部分の証明を与えよう（その他の部分の証明については [11] を参照のこと)。

§2. 準備. ここでは、定理の証明の過程で必要とされる概念や事実を準備しよう。まず L_∞ 上の lifting ℓ の定義と lifting theory から生じる基本的な事柄について思い起こそう ([5])。 L_∞ 上の lifting ℓ とは、L_∞ から $M(I,\Lambda,\lambda)$ (the set of all bounded Lebesgue measurable functions on I) への線形、乗法的、正値写像で $\ell(1)$ = 1, 且つ、各 $f\in L_\infty$ に対し $\ell(f)\equiv f$ (即ち、$\ell(f) = f$ λ-a.e.) を満たすもので、(I,Λ,λ) 上には、そのような lifting ℓ が存在する。各 $A\in\Lambda$ について、$\ell(\chi_A)$ は Λ に属する唯一つの集合の特性関数になるから、その集合を又 $\ell(A)$ と表すことにする。即ち、$\chi_{\ell(A)} = \ell(\chi_A)$ が各 $A\in\Lambda$ について成り立つ。このようにして得られた写像 ℓ (これも lifting と言われる) : $\Lambda\to\Lambda$ は、(1) $\ell(A)\equiv A$, (2) $\ell(A) = \ell(B)$ if $A\equiv B$, (3) $\ell(I) = I$, $\ell(\phi) = \phi$, (4) $\ell(A\cap B) = \ell(A)\cap\ell(B)$, 且つ (5) $\ell(A\cup B) = \ell(A)\cup\ell(B)$ を満たす。

さて、 X^* の弱*コンパクト集合 K と弱*可測関数 $f: I\to K$ が与えられた時 ($\|f(t)\|\leqq L$, $\forall t\in I$ とする)、我々は lifting theory の利用により、弱*可測関数 $\theta(f): I\to\overline{co}^*(K)$ で 各 $x\in X$ と $t\in I$ について $(x,\ \theta(f)(t)) = \ell(x\circ f)(t)$ を満たすものを得る。従って、$\|\theta(f)(t)\|\leqq L$ ($\forall t\in I$) であり、 $f-\theta(f)$ は weak* scalarly null である。しかも $\ell(E) = E$ を満たす $E\in\Lambda^+$ について

$$\sup_{t\in E}(x,\ \theta(f)(t)) = \operatorname{ess-sup}_{t\in E}(x,\ f(t))$$

が成り立つ。次にコンパクトハウスドルフ空間 Y と $g: I\to Y$ について、g が 性質 : $f\circ g$ is λ-measurable for every $f\in C(Y)$, を満たす関数とする。その時、lifting theory を用いれば、次が得られる。

命題 1. $g: I\to Y$ が、性質 : $\ell(f\circ g) = f\circ g$ for every $f\in C(Y)$, を満たすならば、 g は Λ-$\mathcal{B}(Y)$ (: the Borel σ-algebra of Y) 可測であり、λの g による像測度 $g(\lambda)$ は Radon measure on Y である。

更に、関数の可測性に関する基本的な 2 つの結果を注意しよう。先ず、形式的な手順により次が得られる。

命題 2. Y, Z をコンパクトハウスドルフ空間、α を Y 上のボレル測度とし、$f : Y \to Z$ を $\mathcal{B}(Y)$-$\mathcal{B}(Z)$ 可測関数とする。 Z 上で定義された実数値関数 g が $f(\alpha)$-可測ならば、$g \circ f$ は α-可測である。

又、"exhaustion argument" を用いることで

命題 3. $f : I \to R$ について、 f が λ-可測であるための必要十分条件は f が次の条件 (*) を満たすことである。
(*) 任意の正数 ε と任意の $E \in \Lambda^+$ に対して、E の部分集合 F ($\in \Lambda^+$) で $O(f|F) < \varepsilon$ を満たすものが存在する。

を得る。

§3. 定理の証明. 我々は次の順序で主要部分 (即ち、(a), (b), (c), (d) の同値性と、(e) ⇒ (a), (f) ⇒ (a), (g) ⇒ (a)) の証明を与える。まず (c) ⇒ (d) は明らかにいえる。 次に、(d) ⇒ (a), (e) ⇒ (a), (f) ⇒ (a), (g) ⇒ (a), (b) ⇒ (c), (a) ⇒ (b) である。

(I) (d) ⇒ (a), (e) ⇒ (a), (f) ⇒ (a), (g) ⇒ (a) について。 そのために (a) を否定しよう。即ち、 A は non-K-weakly precompact set であると仮定する。その時、弱*可測関数 $h : I \to K$ であって、どんな $\bar{\mathfrak{A}}^*$-可測関数 g ($: I \to X^*$) に対しても weak*-equivalent とはなり得ないような関数 h が存在することを示そう。この関数 h の構成は、$A = B(X)$ (即ち、K が non-Pettis set) の場合に与えたと同様の論法によるものである。その概略を、この場合によりふさわしい形で、以下に述べよう (詳細については [7], [11] を参照のこと)。

(1) [関数 h の構成]. コンパクトハウスドルフ空間 Y について、Y の互いに素な集合の対の列 $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ が independent であるとは、「$\forall n \geqq 1$ と $\forall\{\varepsilon_j\}_{1\leq j\leq n}$ ($\varepsilon_j = 1$ or -1, $1 \leqq j \leqq n$) について $\cap\{\varepsilon_j A_j : 1 \leqq j \leqq n\}$ は non-empty (但し、$\varepsilon_j A_j = A_j$ if $\varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_j A_j = B_j$ if $\varepsilon_j = -1$)」である時をいう。今、A が non-K-weakly precompact set とすれば定義から「$\exists\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ s.t. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の任意の部分列は K 上で各点収束列ではない」を得る。このことに Rosenthal[11] の議論を利用すれば、$\exists\{x_{n(m)}\}_{m\geq 1}$ (: a subsequence of $\{x_n\}_{n\geq 1}$), $\exists\, r$ (: a real number) and $\exists\,\delta\,(> 0)$ s.t. $A_m = \{x^* \in H : (x^*, x_{n(m)}) \leqq r\}$, $B_m = \{x^* \in H : (x^*, x_{n(m)}) \geqq r + \delta\}$ について $(A_m, B_m)_{m\geq 1}$ は K の閉集合からなる independent sequence である。従って、この互いに素な閉集合の対の列で independent なもの $(A_m, B_m)_{m\geq 1}$ に対して、$\Gamma = \cap_{m\geq 1}(A_m \cup B_m)$ とおくことによって、我々は K の空でないコンパクト部分集合 Γ を得る。その時、$\phi : \Gamma \to \mathcal{P}(N)$ (: Cantor space with its usual compact metric

topology) を $\phi(x^*) = \{ p : (x_{n(p)}, x^*) \leqq r \}$ ($= \{ p : A_p \ni x^* \}$) $\in \mathcal{P}(N)$, により定義すれば、ϕ は連続全射である。写像 ϕ が連続全射であることから、Talagrand の結果 (1-2-5 in [16]) を用いることで、Γ 上 の Radon probability measure γ で $\phi(\gamma)$ (γ の ϕ による像測度) $= \nu$ (: $\mathcal{P}(N)$ を $\{0,1\}^N$ と視た時の正規化されたハール測度) 且つ $\{ f \circ \phi : f \in L_1(\mathcal{P}(N), \Sigma_\nu, \nu) \} = L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ (ここで、Σ_ν, Σ_γ は各々 ν, γ に関して可測な集合全体を表す) を満たすものを得る。更に、$\rho : \mathcal{P}(N) \to I$ を $\rho(B) = \Sigma\{1/2^m : m \in B\}$ ($B \in \mathcal{P}(N)$) で定義すれば、ρ は $\rho(\nu) = \lambda$、 且つ $\{ u \circ \rho : u \in L_1 \} = L_1(\mathcal{P}(N), \Sigma_\nu, \nu)$ を満たす連続全射である。

この時、次の補題を得るのは容易 (Lemma in [7] を参照) で、本質的には、M. Talagrand[16] の Theorem (7-3-7) の証中でも示唆されている。

補題. S を $S(u) = u \circ \rho \circ \phi$ ($\forall u \in L_1$) で定義される線形写像とすれば次の事柄が成り立つ。

(a) S は L_1 から $L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ への全射距離同型写像。

(b) 任意の $g \in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ について、$S^*(g)(\rho(\phi(x^*))) = g(x^*)$, γ-a.e. (但し、 S^* は S の共役作用素)。

(c) 任意の $g_1, g_2 \in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ について、$S^*(g_1 \cdot g_2) = S^*(g_1) \cdot S^*(g_2)$ in $L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$。

さて、各 $x \in X$ について $f_x(x^*) = (x, x^*)$ ($x^* \in \Gamma$) で定義される Γ 上の連続関数を考える。又、ℓ を前述の lifting とし、各 $t \in I$ について $C(\Gamma)$ (: Γ 上で定義された実数値連続関数の作るバナッハ空間) 上で定義される有界線形汎関数 $L_t(f) = \ell(S^*(f))(t)$ ($\forall f \in C(\Gamma)$) を考えよ。その時、補題から L_t は multiplicative であるから、$L_t(f) = f(x^*), \forall f \in C(\Gamma)$, を満たす Γ の点 x^* が唯一つ存在する。従って $h : I \to \Gamma$ を $h(t) = x^*$ ($t \in I$) で定義すれば、h は K-値関数であり、$f(h(t)) = \ell(S^*(f))(t)$, $\forall f \in C(\Gamma)$, が成り立つ。よって、特に、$f_x(h(t)) = \ell(S^*(f_x))(t)$, $\forall x \in X$, であるから $(x, h(t)) = \ell(S^*(f_x))(t), \forall t \in I$, が成り立ち、h は弱*可測関数であることがわかる。このようにして、K-値弱*可測関数 h が構成された。

次に、この関数 h が「どんな $\bar{\mathfrak{A}}^*$-可測関数 g (: $I \to X^*$) とも weak*-equivalent とはなり得ない」ことを、その“構成のプロセス”の利用で直接的に示そう。そのために、h が $\bar{\mathfrak{A}}^*$-可測関数でないこと、即ち、h の非 $\bar{\mathfrak{A}}^*$-可測性を直接的に示そう。

(2) [h の非 $\bar{\mathfrak{A}}^*$-可測性]. 先ず $\ell(f \circ h)(t) = \ell(S^*(f))(t) = (f \circ h)(t)$ ($\forall t \in I$, $\forall f \in C(\Gamma)$) に注意する。その時、命題 1 より 関数 h は Λ-$\mathcal{B}(\Gamma)$ 可測であり、$h(\lambda)$ は Γ 上の Radon measure である。それ故、 $h(\lambda) = \gamma$ が容易に判る。更に、$S^*(f)(t) = (f \circ h)(t)$ λ-a.e. on I (各 $f \in C(\Gamma)$) であるから、

$$(f\circ h\circ \rho\circ \phi)(x^*) = S^*(f)(\rho(\phi(x^*))) = f(x^*) \quad \gamma\text{-a.e. on } \Gamma \quad (\text{各 } f\in C(\Gamma))$$

が成り立つ。それ故、各 m 毎に $\gamma(E_m)=0$ で、$\Gamma\setminus E_m$ の点 x^* では

$$(x_{n(m)},\ (h\circ \rho\circ \phi)(x^*)) = (x_{n(m)},\ x^*)$$

が成り立つような $E_m \in \mathcal{B}(\Gamma)$ が存在する。但し、$\{x_{n(m)}\}_{m\geq 1}$ は $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の部分列として前述で得られたものである。従って、$\gamma(E)=0$ であり、 $\Gamma\setminus E$ の点 x^* では

$$(x_{n(m)},\ (h\circ \rho\circ \phi)(x^*)) = (x_{n(m)},\ x^*)$$

が任意の m で成り立つような、 $E\in \mathcal{B}(\Gamma)$ が存在する。 それ故、$\{x_{n(m)}\}_{m\geq 1}$ の任意の weak*-cluster point x^{**} ($\in \bar{A}^{*}$) について、$\Gamma\setminus E$ の点 x^* では

$$(x^{**},\ (h\circ \rho\circ \phi)(x^*)) = (x^{**},\ x^*)$$

が成り立つ。ところが、x^{**} を $\{x_{n(m)}\}_{m\geq 1}$ の一つの weak*-cluster point で、適当な N 上の non-principal ultrafilter $\mathfrak{F}$ により $x^{**}|\Gamma = \lim_{m\to\mathfrak{F}} x_{n(m)}|\Gamma$ と表され得るものとすれば、 $x^*\in\Gamma$ について

$$(x^{**},\ x^*) \leqq r \Leftrightarrow \{\ m : (x_{n(m)},\ x^*) \leqq r\ \} \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow \phi(x^*) \in \mathfrak{F},$$

即ち、 $\{\ x^* : (x^{**},\ x^*) \leqq r\ \} = \phi^{-1}(\mathfrak{F})$ が成り立つ。ところが、良く知られているように $\mathfrak{F}$ は ν-可測集合ではなく、$\phi(\gamma)=\nu$ であるから、$\phi^{-1}(\mathfrak{F})$ は γ-可測集合ではない。従って、x^{**} は γ-可測ではない。それ故、 $x^{**}\circ h\circ \rho\circ \phi$ は γ-可測ではない。従って 命題 2 から、 $x^{**}\circ h$ は $\rho(\phi(\gamma))$ ($=\lambda$)-可測ではない。即ち、 h は非 $\bar{A}^{*}$-可測である。

このことから、[(d) ⇒ (a)] の証明を完結するのは容易である。実際、h が或る $\bar{A}^{*}$-可測関数 $g : I\to X^*$ と weak*-equivalent (即ち、各 $x\in X$ 毎に、$(x,\ h(t)) = (x,\ g(t))$ λ- a.e. on I) とすれば、前述と同じ議論により $(x^{**},\ h(t)) = (x^{**},\ g(t))$ λ-a.e.on I が得られ、今示した h の非 $\bar{A}^{*}$-可測性より g が非 $\bar{A}^{*}$-可測関数となり矛盾が生じる。以上により、(d) ⇒ (a) の証明が完結した。

(3) (f) ⇒ (a) を示そう。そのためには、(1) で得られた K-値弱*可測関数 h について

$$\inf_{n\geq 1}\{\sup_{x\in A}|(x,\ T_h{}^*(r_n))|\} > 0$$

を示そう。次のことを、まず注意する。任意の $E \in \Lambda$ と任意の $f \in C(\Gamma)$ について

$$\int_E f(h(t))d\lambda(t) = \int_E \ell(S^*(f))(t)d\lambda(t) = \int_E S^*(f)(t)d\lambda(t)$$

$$= \int_E S^*(f)(t)d(\rho(\phi(\gamma)))(t) = \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(E))} S^*(f)(\rho(\phi((x^*)))d\gamma(x^*)$$

$$= \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(E))} f(x^*)d\gamma(x^*)$$

が成り立つ。

さて、$\{ I(m,k) : m = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots , 2^m \}$ を次のようにして定められた I の区間列とする。$I(m,k) = [(k-1)/2^m, k/2^m)$ $(m \geqq 1, 1 \leqq k \leqq 2^m - 1)$, $I(m,2^m) = [(2^m - 1)/2^m, 1]$ $(m \geqq 0)$. その時、容易に我々は「$\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(m,2k-1))) \subset B_m$, $\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(m,2k))) \subset A_m$, $(m = 1, 2, \cdots , k = 1, \cdots , 2^{m-1})$」を得る。(1) で得られた点列 $\{x_{n(m)}\}_{m\geq 1}$ $(\subset A)$ をとれ。その時、

$$r_m(t) = \sum_{k=1}^{2^m} (-1)^{k-1} \chi_{I(m,k)}(t)$$

を用いれば、各 m に対して

$$(x_{n(m)}, T_h^*(r_m)) = (T_h(x_{n(m)}), r_m)$$

$$= \int_I (x_{n(m)}, h(t)) \cdot r_m(t)d\lambda(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^m} (-1)^{k-1} \cdot \int_{I(m,k)} (x_{n(m)}, h(t))d\lambda(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \int_{I(m,2k-1)} (x_{n(m)}, h(t))d\lambda(t)$$

$$- \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \int_{I(m,2k)} (x_{n(m)}, h(t))d\lambda(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \{ \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(m,2k-1)))} (x_{n(m)}, x^*)d\gamma(x^*)$$

$$- \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(m,2k)))} (x_{n(m)}, x^*)d\gamma(x^*) \}$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \{ (r+\delta)(1/2^m) - r(1/2^m) \} = \delta/2$$

が得られる。従って、

$$\inf_{m\geqq 1}\{\sup_{x\in A}|(x,\ T_h{}^*(r_m))|\} \geqq \delta/2$$

が成り立ち、この K-値弱*可測関数 h は先に述べた性質（β）を持つ。このことから [(f) ⇒ (a)] がわかる。又、[(e) ⇒ (a)]，[(g) ⇒ (a)] も、関数 h が性質（α），（γ）を持つことを、今と同様な具体的計算により示すことで立証される（詳細は [11] を参照のこと）。

（II）(b) ⇒ (c) について。任意の弱*可測関数 $f : I \to K$ をとれ。その時、§2 で述べた注意により、$\theta(f) : I \to \overline{co}^*(K)$ で $\ell(x\circ f) = x\circ\theta(f)$ $(\forall x \in X)$ を満たすものが存在する。それ故、f は $\theta(f)$ に weak*-equivalent である。従って、この部分の証明のためには、「各 $x^{**} \in \overline{A}^*$ について $x^{**}\circ\theta(f)$ が λ-可測関数であること」及び、次の等式【E】である。(以後、$\theta(f) = g$ と書く)

$$(x^{**},\ T_g{}^*(\chi_E)) = \int_E (x^{**},\ g(t))d\lambda(t) \quad \cdots \quad 【E】$$

が、任意の $x^{**} \in \overline{A}^*$ と任意の $E \in \Lambda$ について成り立つ。

そのために次のことを示そう。即ち、[$x^{**} \in \overline{A}^*$ を任意にとれ。その時、任意の正数 ε と任意の $E \in \Lambda^+$ について、E の正測度を持つ部分集合 F を適当にとれば、$O(x^{**}|\overline{co}^*(g(F))) < \varepsilon$ が成り立つようにできる] である。実際 [⋯] が示されれば、まず、$O(x^{**}\circ g|F) = O(x^{**}|g(F)) \leqq O(x^{**}|\overline{co}^*(g(F))) < \varepsilon$ と 命題 3 から、$x^{**}\circ g$ が λ-可測関数であることが得られる。さらに、よく知られた "exhaustion argument" を用いることで、任意の正数 ε と任意の $E \in \Lambda^+$ について、次の（$*$）を満たすような E の互いに素な部分集合の列 $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda^+$ が存在する。

（$*$）$\lambda(E\setminus \cup_{n\geq 1} E_n) = 0,\quad O(x^{**}|\overline{co}^*(g(E_n))) < \varepsilon \ (\forall n).$

この時、等式【E】が以下のようにして示される。

$\lambda(E) = 0$ の時、等式【E】が成り立つのは明らかであるから、$E \in \Lambda^+$ の場合でよい。この時、（$*$）から保証される $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda^+$ に対して、$a_n{}^* = T_g{}^*(\chi_{E_n})/\lambda(E_n)$ $(\forall n)$ とおけば、分離定理から「$a_n{}^* \in \overline{co}^*(g(E_n))$ $(\forall n)$」が容易に得られる。さらに各 $x \in X$ と $n \geqq 1$ について

$$|(x,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)\cdot a_k{}^* - T_g{}^*(\chi_E))|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} (x,\ g(t))d\lambda(t) - \int_{E} (x,\ g(t))d\lambda(t) \right|$$

$$\leqq L\|x\| \cdot \lambda(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k)$$

が成り立つから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)\cdot a_k{}^* = T_g{}^*(\chi_E)$$

が得られる。従って、$x^{**} \in \bar{A}^*$ について

$$(x^{**},\ T_g{}^*(\chi_E)) = (x^{**}, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)\cdot a_k{}^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)\cdot(x^{**},\ a_k{}^*)$$

が得られる。一方、優越収束定理から

$$\int_E (x^{**},\ g(t))d\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (x^{**},\ g(t))d\lambda(t)$$

が得られる。それ故、

$$\left|(x^{**},\ T_g{}^*(\chi_E)) - \int_E (x^{**},\ g(t))d\lambda(t)\right|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda(E_k)\cdot(x^{**},\ a_k{}^*) - \int_{E_k} (x^{**},\ g(t))d\lambda(t)\right|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |(x^{**},\ a_k{}^*) - (x^{**},\ g(t))|d\lambda(t)$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} O(x^{**}|\overline{co}^*(g(E_k)))d\lambda(t)$$

$$\leqq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) = \varepsilon \cdot \lambda(E)$$

が得られる。ここで ε は任意であるから、

$$(x^{**},\ T_g{}^*(\chi_E)) = \int_E (x^{**},\ g(t))d\lambda(t)$$

が得られ、等式【E】が示された。従って、［…］を示そう。そのために、任意の $x^{**} \in \bar{A}^*$, 正数 ε と $E \in \Lambda^+$ をとれ。そして $D = \ell(E)$ $(\in \Lambda^+)$ とおけ。その時、仮定 (b) から M $(= \overline{co}^*(T_f{}^*(\Delta_D)))$ は weak*-$\bar{A}^*$-dentable である。従って、M の weak* slice $\bar{S}$ $(= \bar{S}(x, \alpha,\ M))$ が存在して $O(x^{**}|\bar{S}) < \varepsilon$ が成り立つ。その時、$\ell(D) = D$ を用いれば

$\bar{S}$ (= $\bar{S}(x, \alpha, M)$)

$= \{ x^* \in M : (x, x^*) \geq \sup_{y^* \in M} (x, y^*) - \alpha \}$

$= \{ x^* \in M : (x, x^*) \geq \sup_{y^* \in T_f{}^*(\Delta_D)} (x, y^*) - \alpha \}$

$= \{ x^* \in M : (x, x^*) \geq$

$$\sup \left(\int_G (x, f(t)) d\lambda(t) / \lambda(G) : G \subset D,\ G \in \Lambda^+ \right) - \alpha \}$$

$= \{ x^* \in M : (x, x^*) \geq \operatorname{ess-sup}_{t \in D} (x, f(t)) - \alpha \}$

$= \{ x^* \in M : (x, x^*) \geq \sup_{t \in D} (x, g(t)) - \alpha \}$

が成り立つ。従って、 $F_0 = \{ s \in D : (x, g(s)) \geq \sup_{t \in D} (x, g(t)) - \alpha \}$ とおけば、$\sup_{t \in D} (x, g(t)) = \operatorname{ess-sup}_{t \in D} (x, g(t))$ であるから $F_0 \in \Lambda^+$ が判る。更に、$g(F_0) \subset M$ である。実際、$\exists s \in F_0$ s.t. $g(s) \notin M$ とせよ。その時、分離定理より X の元 a で

$$(a, g(s)) > \beta = \sup_{x^* \in M} (a, x^*)$$

を満たすものが存在する。即ち、

$$(a, g(s)) > \beta = \sup_{x^* \in M} (a, x^*) = \operatorname{ess-sup}_{t \in D} (a, f(t)) = \sup_{t \in D} (a, g(t))$$

が成り立つことになり矛盾が生じる。従って、$g(F_0) \subset \bar{S}$ が得られる。それ故、$\overline{co}^*(g(F_0)) \subset \bar{S}$ である（∵ $\bar{S}$ は弱*コンパクト凸集合)。従って、

$$O(x^{**} | \overline{co}^*(g(F_0))) \leq O(x^{**} | \bar{S}) < \varepsilon$$

が成り立つ。よって、結局 $F = F_0 \cap E$ ととれば（$\ell(E) \equiv E$ であるから）F が求める集合であることがわかる。これで、この部分の証明が完結した。

(Ⅲ) (a) ⇒ (b) について。先ず仮定 (a) から、 A が $\overline{co}^*(K)$-weakly precompact set であることを注意する。さて (b) を否定しよう。 その時、弱*可測関数 $f : I \to K$ と $E \in \Lambda^+$ が存在して 集合 M (= $\overline{co}^*(T_f{}^*(\Delta_E)) \subset \overline{co}^*(K)$) は weak*-$\bar{A}^*$-dentable ではない。それ故、或る正数 ε と $x^{**} \in \bar{A}^*$ が存在して、M の任意の weak*-open slice S

に対して $O(x^{**}|S) \geqq \varepsilon$ が成り立つ。その時、これは「 $O(x^{**}|V \cap M) \geqq \varepsilon$ for every weak*-open subset V of X^* with $V \cap M \neq \phi$」を意味することになる。実際、任意の weak*-open subset V of X^* with $V \cap M \neq \phi$, をとれ。その時、[3] の Lemma Ⅱ.1 より、総和が 1 である有限個の非負数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 及び M の weak*-open slice の組 $S_1, \cdots, S_p$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i S_i \subset V \cap M$$

が成り立つ。従って、

$$\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i O(x^{**}|S_i) = O(x^{**}|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i S_i) \leqq O(x^{**}|V \cap M)$$

が成り立つ。よって、「…」が得られる。このことは、$x^{**}|M$ が weak*-compact set M ($\subset \overline{co}^*(K)$) 上で連続点を持たないことになり、これは A が $\overline{co}^*(K)$-weakly precompact set であることに矛盾する。実際、§1 で述べたペッティス集合の特徴付けと同様にして「A が $\overline{co}^*(K)$-weakly precompact set $\Leftrightarrow$ $\forall x^{**} \in \overline{A}^{*}$ と $\forall M$: weak*-compact subset of $\overline{co}^*(K)$ に対して、$x^{**}|M$ は M 上で連続点を持つ」が示されるからである。

参考文献

[1] E.M. Bator and P.W. Lewis, Weak precompactness and the weak RNP, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 37 (1989), 443-452.

[2] S.P. Fitzpatrick, Separably related sets and the Radon-Nikodym property, Illinois J. Math., 29 (1985), 229-247.

[3] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey and W. Schachermayer, Some topological and geometrical structures in Banach spaces, Mem. Amer. Math. Soc., 378, Providence (1987).

[4] M. Girardi and J. J. Uhl, Jr, Slices, RNP, strong regularity, and martingales, Bull. Austral. Math. Soc., 41 (1990), 411-415.

[5] A. Ionescu Tulcea and C. Ionescu Tulcea, Topics in the theory of lifting, Ergebnisse Math., 48, Springer, 1969.

[6] M. Matsuda, On Saab's characterizations of weak Radon-Nikodym sets, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21 (1985), 921-941.

[7] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in dual Banach spaces, Publ.

RIMS, Kyoto Univ., 27 (1991), 827-836.

[8] M. Matsuda, A characterization of non-Pettis sets in terms of martingales, Math. Japon., 38 (1993), 177-183.

[9] M. Matsuda, Remarks on Pettis sets, Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ., 28 (1994), 17-23.

[10] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in terms of the Bourgain property, Math. Japon., 41 (1995), 433-439.

[11] M. Matsuda, On localized weak precompactness in Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 32 (1996), 473-491.

[12] M. Matsuda, On certain decomposition of bounded weak*-measurable functions taking their ranges in dual Banach spaces, To appear in Hiroshima Math. J., 27 (1997).

[13] L.H. Riddle and E. Saab, On functions that are universally Pettis integrable, Illinois J. Math., 29 (1985), 509-531.

[14] H. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l_1, Proc. Nat. Acad. Sci., 71 (1974), 2411-2413.

[15] E. Saab and P. Saab, A dual geometric characterization of Banach spaces not containing l_1, Pacific J. Math., 105 (1983), 415-425.

[16] M. Talagrand, Pettis integral and measure theory, Mem. Amer. Math. Soc., 307, Providence (1984).