数理解析研究所講究録
988巻 1997年 1-7

有理関数の HOLOMORPHIC FAMILY について

志賀　啓成
(Hiroshige Shiga)

東京工業大学　理学部

有理関数（次数はつねに 2 以上）の holomorphic family に関する二つの結果を述べる．ただし証明の詳細は準備中の論文に譲り，結果の報告と略証のみにとどめる．

0. 準備.

複素多様体 W をパラメータ空間とする次数 $d>1$ の有理関数の holomorphic family $\{R_\lambda\}_{\lambda\in W}$ の分類について述べる．詳細は[MS]: McMullen-Sullivan "Quasiconformal Homeomorphism and Dynamics III"(preprint) を参考にされたい．

パラメータ空間 W の点で，その点のある近傍 U ではすべての $R_\lambda(\lambda\in U)$ が互いに Riemann 球 $\hat{\mathbb{C}}$ のある位相写像による共役になっているような点全体を W^{top} と書くことにする．この定義で位相写像として擬等角写像がとれるものを W^{qc} と書くことにする．

これに対して R_λ と $R_{\lambda'}$ $(\lambda,\lambda'\in U)$ が Julia 集合上で（$\hat{\mathbb{C}}$ 上の）擬等角写像で共役であるとき J-stable (or stable) といい，このようなパラメーター全体を W^{stable} とかくことにする．すなわち W^{stable} とは，各 $\lambda\in W^{stable}$ に対して，ある W での近傍 U がとれて，任意の $\lambda'\in U$ に対して $\hat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像 $f_{\lambda'}$ が

とれて,

$$R_{\lambda'} \circ f_{\lambda'} = f_{\lambda'} \circ R_\lambda$$

が R_λ のジュリア集合上で成立することである.

次に, postcritically stable parameters の集合, W^{post} を定義する. そのため, まず critical points の orbit relation という概念について説明する.

有理関数 $R_\lambda(z)$ の critical points 全体の集合を $\{c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda)\}$ としたとき, 整数の組 (i, j, k, ℓ) が orbit relation であるとは,

$$R_\lambda^k(c_i(\lambda)) = R_\lambda^\ell(c_j(\lambda)) \qquad 1 \le i, j \le n; 0 \le k, \ell$$

が成立することとする. この orbit relations が局所的に安定であるような parameters $\lambda \in W$ 全体の集合を W^{post} と書き, postcritically stable parameters の集合と呼ぶ.

これらの間には $W^{qc} \subset W^{top} \subset W^{post}$ なる包含関係があることはすぐ分かるが, 実は

$$W^{qc} = W^{top} = W^{post} \subset W^{stable}$$

であることがしられている[MS].

1. **Attractive** な **family** の境界としての **Siegel disk** の性質について.

Caeleson-Gamelin の text に次のような結果が載っている(Complex Dynamics, Springer-Verlag, 1993, p. 86, Theorem 1.4).

Theorem A. $P_\lambda(z) = \lambda(z - z^2/2), \lambda = e^{i\theta}$ を考える. このとき, ほとんど至るところの θ に対して P_λ は *Siegel disk* を持ち, かつその境界上に *critical point* $z = 1$ がある.

この定理は示唆に富んだ結果である. 上の P_λ は単位円 $\Delta = \{|\lambda| < 1\}$ をパラメーター空間とする有理関数の family の境界にあると考えられる. しかも, 任意の

$\lambda \in \Delta$ に対して P_λ は $z = 0$ を attracting fixed point に持ち，その multiplier が λ になっている．よく知られているように attracive basin には critical point が含まれているから，上の定理は attracive basin の極限としての Siegel disk が critical point に関しても極限的な状態にあることを意味している．

一般に Siegel disk の境界に critical point が存在するかというのは問題であるが，Herman がこれに対して反例を構成しているようである．一方，最近 Rogers (preprint) によって，多項式の場合 neutral periodic point の mulitiplier が Diophantine number より定まる場合は（Siegel disk を持ち），その Siegel disk の境界に critical point が存在することが示されている．Rogers の結果を認めると Theorem A は次のように拡張される．

Corollary. W を平面領域として，$\{P_\lambda\}_{\lambda \in \overline{W}}$ を $\overline{W}$ をパラメーター空間とする多項式の連続な *family* で W で *stable* かつ *holomorphic* なものとする．このとき，もしある $\lambda_0 \in W$ で P_{λ_0} が *attracting cycle* を含んでいるならば，ほとんど至るところの点 $\lambda \in \partial W$ に対して P_λ はやはり対応する *attracting cycle* を持っているか，またはその境界上に *critical point* を含むような *Siegel disk* を持つ．

ここで family $\{P_\lambda\}_{\lambda \in W}$ が stable とは，$W^{stable} = W$ であるときをいう．

（略証）簡単のために attracting fixed point の場合に証明する．Holomorphic family が stable という仮定から，Fatou 成分は labelling が可能になる．すなわち，$P_\lambda(\lambda \in W)$ の attracting fixed point $a(\lambda)$ を λ について holomorphic になるように取れる．したがって，$a(\lambda)$ における multiplier $\varphi(\lambda) = P'_\lambda(a(\lambda))$ も λ に関して holomorphic になる．$a(\lambda)$ は attractive であったから，

$$|\varphi(\lambda)| = |P'_\lambda(a(\lambda))| < 1.$$

すなわち，$\varphi(\lambda)$ は W から単位円板 Δ への正則写像になる．

単位円 $\partial\Delta = \{e^{2\pi\theta} \mid 0 \leq \theta < 1\}$ において，θ が Diophantine 数でない集合を E とする．このとき，正則写像の性質より φ によって E に対応する点は ∂W 上で調和測度が 0 になることが知られている．換言すれば，ほとんど全ての点での φ の境界値は $\bar{\Delta} - E$ に値を持っている．よって，上記の Rogers の結果より求める主張が成立する．

有理関数の family に関しては，Theorem A の形で証明することは今のところで来ていないが，次のように少し条件をつけた形では証明できる（ただし，ここでは証明はしない）．

Theorem 1. $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\overline{W}}$ を $\overline{W}$ をパラメーター空間とする有理関数の連続な *family* で，W で *stable* かつ *holomorphic* なものとする．このとき，もしある $\lambda_0 \in W$ で R_{λ_0} がその *periodic component* に *critical point* を一つしか含まないような *attracting cycle* をもっているならば，ほとんど至るところの点 $\lambda \in \partial W$ に対して *Corollary* と同じ主張が成り立つ．

上の定理では「stable family」という仮定を設けたが，特別な holomorphic family に関してはこの条件は自動的に満たされる．例えば次の系が証明できる．

Corollary. $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\overline{W}}$ を $\overline{W}$ をパラメーター空間とする有理関数の連続な *family* で，任意の $\lambda \in W$ に対して R_λ はちょうど $(2d-2)$ 個の *attracting cycles* を持っていると仮定する．そのとき *Theorem 1* と同じ結論が成立する．

（Corollary の略証）条件より，R_λ に対しては各 attracting cycle 内にはただ一つの critical point が存在する．その critical points を $c_1(\lambda), \ldots, c_{2d-2}(\lambda)$ とすると，これらの critical points の orbit relation は trivial なものしかない（異なる critical points 同士の orbits は異なる）．よって $W = W^{post} = W^{qc}$．したがって，この family は stable になるので定理 1 の仮定が満たされ，求める結論が導かれる．

Remark. 実際に上の系の仮定を満たす有理関数は任意の $d > 1$ について構成することが出来る.

2. Riemann surface 上の有理関数の holomorphic family について.

次にパラメーター空間が有限型 Riemann 面 S の場合, 次数 $d > 1$ の有理関数の non-trivial holomorphic family の有限性を考える. ファイバーが有理関数ではなく（有限型）Riemann 面の場合には, このような families の個数の有限性は知られているし, 特別な場合にはその個数の上限を S の複素構造に依らず評価できる. 一方, 有理関数の family については, family に制限をつけなければ無限個存在する.

実際, $\bar{S}$ を任意の compact Riemann 面として, f を $\bar{S}$ 上の非定数有理型関数とする. S を f の zero 点, 極を取り除いた有限型 Riemann 面とする. このとき, 任意の有理関数 $R(z)$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S \ni p \mapsto f^n(p)R(z)$$

および

$$S \ni p \mapsto R(z) + nf(p)$$

などは有理関数の S 上の holomorphic family を定める. ここで, うまく $R(z)$ を選べば（むしろ, ほとんどの $R(z)$ に対して）, 上のような holomorphic familes は non-trivial で, 異なる n に対しては異なる families が得られることが分かる. したがって, $n = 1, 2, \ldots$ を考えれば, 無限個の holomorphic families が得られることが分かる.

一方, McMullen の結果 (Ann. of Math. **135**, 1987) によれば, S をパラメーター空間とする stable holomorphic family は trivilal または affine rational maps のfamily となり有限性の問題は容易に解決される. ここで affine rational map とは, (complex) multiplication から induce される torus の holomorphic endmorphism で torus の hyperelliptic involution と equivariant なものの projection であるときをいう．

ここでは "stable" よりも弱い条件を考え，このもとで family の有限性を導く．

Theorem 2. S を (g,n) 型の *Riemann* 面，$d>1$ を整数とする．このとき S をパラメーター空間とする次数 d の有理関数の *separative* な *families* は高々有限個でその個数は g,n,d で（S の等角構造に依らずに）上から評価される．

ここで family が separative とは以下のように定義する．

Definition 1. 与えられた自然数 n に対して，W を parameter 空間とする次数 $d>1$ の有理関数の holomorphic family $\{R_\lambda(z)\}_{\lambda\in W}$ が order n の separative family であるとは，任意の $\lambda_0\in W$ に対して次の条件を満たす近傍 U が取れることとする．

各 $\lambda\in U$ に対して $\hat{\mathbb{C}}$ 内に n 個の点からなる集合 E_λ が取れて，以下を満たす．

(1) $R_\lambda(E_\lambda)=E_\lambda$.

(2) $E_\lambda=\{a_1(\lambda),\ldots,a_n(\lambda)\}$ としたとき，各 $a_j(\cdot)(j=1,\ldots,n)$ は U 内で解析的である．

(3) $a_j(\lambda)$ が R_λ のある周期 k の周期点ならば，周期 k のその他の周期点は全て E_λ に含まれる．

stable ならば，十分高い order で上の separative 条件を満たす．実際，stable family $\{R_\lambda\}_{\lambda\in W}$ に対して十分周期の大きい周期点全体を考え，それを E_λ とする．周期を大きく取っておくと，これらは repelling periodic points からなり，したがって E_λ は R_λ のジュリア集合 $J(R_\lambda)$ に含まれる．また，$\{R_\lambda\}_{\lambda\in W}$ は stable であるから $J(R_\lambda)$ では擬等角写像による共役である．したがって上記の separative 条件を満たすことが分かる．すなわち separative family である．

一方，stable でない separative family は存在する．これは次のように構成する．

X をコンパクトRiemann 面とする．Rをdegree d の有理関数でFatou 集合 $F(R)$ が空でないものを取る．ここで R を含む X 上のnon-trivial holomorphic (algebraic) family を作る．ただし恒等的に0または∞となるものを有限個含まれていてもよいとする．ここで，十分周期の大きな repelling periodic cycles を考えて，それらが separative condition を満たさない点および恒等的に0または∞となる点を X から除く．このような点は高々有限個しか存在しないから，そのような点を除いて得られる Riemann 面 X' は有限型である．作り方からX' 上のseparative family である．一方，もしこれが stable ならば，Proposition 1から affine となるはずである．ところがこの family は $F(R)$ が空でない有理関数を含んでいるから矛盾である．すなわち stable ではない．