数理解析研究所講究録
988巻 1997年 160-171

$z^2+\frac{1}{4}$ のジュリア集合のハウスドルフ次元について

中石 健太郎　東京大学数理科学研究科
Kentalo Nakaishi　University of Tokyo

§.0 序

ハウスドルフ次元はフラクタル集合の「大きさ」をはかる一つの目安である: $\mathbf{R}^n$の部分集合 X の a 次元ハウスドルフ測度 m_a は

$$m_a(X)=\lim_{\epsilon\to 0}\inf\sum_{i=1}^{\infty}(diamU_i)^a$$

と定義される. ここで infimum は X の開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $diamU_i<\epsilon$ を満たすもの全体についてとる. このとき X のハウスドルフ次元 HD(X) は

$$\mathrm{HD}(X)=\inf\{a;m_a(X)=0\}=\sup\{a;m_a(X)=\infty\}$$

と定義されていた. 一般に a=HD(X) での X のハウスドルフ測度 $m_a(X)$ は ∞ も込めてどのような正値をもとり得る. 測度という観点からすれば正の有限値が望ましいとも言える. そこでどのような集合 X が

$$0<m_\delta(X)<\infty,\ \delta=HD(X)$$

を満たすのか決定するという問題が考えられる. 素性がよく分かっている一つのクラスとして双曲型有理函数のジュリア集合が挙げられる.

命題.(Bowen[B1],**Ruelle**[R]**)**fを次数 2 以上の双曲型有理函数、$J(f)$ をそのジュリア集合とすれば $0<m_\delta(J(f))<\infty,\ \delta=HD(J(f))$.

この正値性と 'quasi-similarity' を組み合わせると次を得る：

命題.(Sullivan[S]**)**fを次数 2 以上の双曲型有理函数とすればそのジュリア集合は面積 0.正確には HD$(J(f))<2$.

ここで Bowen 等の証明を概観しておこう. よく知られているように有理函数 f が双曲型であることと f が Axiom A(or expanding) をみたすことは同値である. Axiom A 系ならばその非遊走集合（今の場合ジュリア集合）上の f の作用と subshift of finite type (Σ,σ) が共役になる. つまり f の作用についての位相的な情報は記号力学系を見ればほぼわかる. 一方、subshift of finite type (Σ,σ) に対してはエルゴード理論の側からの研究がある. 共役写

像をπとし$\psi:\Sigma\to\mathbf{R}$を Hölder 連続とすれば、この三つ組(Σ,σ,ψ)に対しGibbs 測度と呼ばれる記号空間Σ上シフト不変なエルゴード的確率測度（実は混合性までいえる）の存在が証明される ([B2]). 共役写像で Gibbs 測度を pushforward することによりジュリア集合上f−不変なエルゴード的確率測度μが得られる. ことばの乱用になるがこの確率測度μも Gibbs 測度と呼ぶ.
次に Gibbs 測度μと$\delta=HD(J(f))$とおいたときのδ-ハウスドルフ測度m_δとの関係を見る. 実はこの二つの測度は同値になる. 正確にいえば、ある正定数c_1,c_2があってジュリア集合上の任意の Borel 集合Eに対し

$$c_1m_\delta(E)\le\mu(E)\le c_2m_\delta(E)$$

が成り立つ. これから直ちに命題が導かれるのは明らかである. 上の測度の同値性を示すのに Bowen は現在 Bowen の公式と呼ばれる関係式を証明する. これはハウスドルフ次元を pressure と呼ばれる$P:C(\Sigma)\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$で特徴付ける. 実際$t\mapsto P(t\phi)$は凸単調減少な連続函数となり$P(\delta\phi)=0$をみたす唯一の値$\delta$が決まる. この$\delta$が$J(f)$のハウスドルフ次元を与える.Bowen の公式が興味あるものになるのは$\psi(x)=-\delta\log\|Df(\pi(x))\|$ととったときの$\mu$のみたす不等式を見るとわかる（命題 7 の証明）.

我々は上記の結果をある non-hyperbolic な場合に拡張する. Denker、Urbanski 等による conformal measure を使った、より詳細で函数論的なアプローチもあることを記しておく.

§.1 Ruelle 型 Perron-Frobenius 定理の拡張

しばらく複素力学系の世界から離れた一般論を展開する.

$\Omega=\mathbf{N}\cup\{\infty\}$を$\{\infty\}$による$\mathbf{N}$の一点コンパクト化とし適当な距離$d$でコンパクト距離空間$(\Omega,d)$として実現されているものとする. 以下は$\Omega=\mathbf{Z}\cup\{\infty\}$（Riemann 球$\hat{\mathbf{C}}$の部分空間）または$\Omega=\mathbf{Z}\cup\{\pm\infty\}$（補完数直線$\bar{\mathbf{R}}$の部分空間）としても成り立つ議論である. ΣをΩの無限直積空間$\Sigma=\Omega^{\mathbf{N}}$とし$\Sigma$上のシフト$\sigma:\Sigma\to\Sigma$を考える. Σの距離d_Σとして

$$d_\Sigma(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^k}d(x_k,y_k)$$

をとる. 但し$x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty},y=\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$であり$\beta>1$はあらかじめ与えられている定数とする. この距離によってΣに積位相とコンパチブルな（compatible）位相を導入できる. 特にコンパクト距離空間になっていることに注意する.

Σ上の連続函数全体のなす空間$C(\Sigma)$には sup norm $\|\cdot\|$により一様位相が入る. 与えられた写像$\psi:\Sigma\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$に対し$C(\Sigma)$上の Perron-Frobenius 作用素$\mathcal{L}_\psi:C(\Sigma)\to C(\Sigma)$を形式的に

$$\mathcal{L}_\psi f(x) = \sum_{y\in\sigma^{-1}x} e^{\psi(y)} f(y)$$

と定める.ψに何も条件をつけないと一般に $\mathcal{L}_\psi$は well-defined にならない.

$\mathcal{BD}$を次の性質をみたす写像$\psi : \Sigma \to \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ の全体とする；

(A1) $\exp\psi(x)$ は連続、

(A2) ある定数 $B>0$ が存在して任意の $x\in\Sigma$に対し

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\psi(k,x)^\dagger} \le B,$$

(A3) ある定数 $C>0, 0<\gamma\le 1$ が存在して任意の $k\in\mathbf{N}$ と任意の $x,y\in\Sigma$ に対し

$$|\psi(k,x)-\psi(k,y)| \le C d_\Sigma(x,y)^\gamma.$$

定理 1. $\psi\in\mathcal{BD}$に対し $\mathcal{L}_\psi : C(\Sigma)\to C(\Sigma)$ は有界作用素として意味をもつ. また、あるΣ上の確率測度νとある正数$\lambda>0$ が存在して $\mathcal{L}_\psi$はλ を固有値にもつ. すなわちある連続函数 $h, \nu(h)=1$ が存在して

$$\mathcal{L}_\psi h = \lambda h.$$

さらに任意の $g\in C(\Sigma)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi{}^n g - \nu(g)h\| = 0.$$

略証（[B2] 参照.）$\mathcal{L}_\psi f(x) = \sum_{k=1}^\infty e^{\psi(k,x)} f(k,x)$ に注意する.$\mathcal{L}_n(x) \equiv \sum_{k=1}^n e^{\psi(k,x)} f(k,x)$ と定義すれば (A1) より $\mathcal{L}_n(x)$ は連続、(A2)(A3) より $\mathcal{L}_n(x)$ は $\mathcal{L}_\psi f(x)$ に一様収束するのが分かり $\mathcal{L}_\psi f \in C(\Sigma)$ がいえる. また $|\mathcal{L}_\psi f(x)| \le \sum_{k=1}^\infty e^{\psi(k,x)}\|f\| \le B\|f\|$.

$\mathcal{L}_\psi$の双対作用素 $\mathcal{L}^*$を次のように定める：Banach 空間 $C(\Sigma)$ の双対空間 $C(\Sigma)^*$の元μに対して $\mathcal{L}^*\mu\in C(\Sigma)^*$ を

$$\mathcal{L}^*\mu(f) = \int_\Sigma \mathcal{L}_\psi f(x)\mu(dx),\ f\in C(\Sigma)$$

と対応させるものとする. 測度は $C(\Sigma)$ 上の正値汎関数としても特徴付けられることに注意する $(\mu(f) = \int_\Sigma f(x)\mu(dx))$.

---

† $z=(k,x_0,x_1,\cdots), x=(x_0,x_1,\cdots)$ のときに$\psi(z)=\psi(k,x_0,x_1,\cdots)$ を$\psi(k,x)$ と書くことにする. また (A1),(A2),(A3) から任意の $x\in\Sigma$に対して $\exp(\psi(\infty,x))$=0 がいえる. したがって無限和記号$\sum_{k=1}^{\infty}$ は通常の意味（任意有限和の上限）ととっても$\sum_{\omega\in\Omega}$とみても同じである.

Σ上の Borel 確率測度全体の空間を $\mathcal{M}_0(\Sigma)$ とすれば $\mathcal{M}_0(\Sigma)$ は $C(X)^*$（弱位相）のコンパクト凸部分集合となる. この相対位相での連続写像 G : $\mathcal{M}_0(\Sigma) \to \mathcal{M}_0(\Sigma)$ を

$$G(\mu)f = (\mathcal{L}^*\mu(1))^{-1}\mathcal{L}^*\mu(f),\ f \in C(\Sigma)$$

と定義する. Schauder-Tychonoff の不動点定理により G はある不動点νを持つ：

$$G(\nu) = \nu \text{ i.e.} \mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu,$$

ここで

$$\lambda = \mathcal{L}^*\nu(1) > 0$$

とおいた.

次に固有値λに対する $\mathcal{L}_\psi$ の固有函数をもとめる. 函数族 $\{\lambda^{-m}\mathcal{L}^m 1\}$ を考える.

<u>一様有界性</u>

$S_m\psi(j_0,\cdots,j_{m-1},x) = \sum_{i=0}^{m-1}\psi(\sigma^i(j_0,\cdots,j_{m-1},x))$ とおく. 仮定 A3. より

$$\begin{aligned}\psi(\sigma^k(j_0,\cdots,j_{m-1},x)) &\leq \psi(\sigma^k(j_0,\cdots,j_{m-1},y)) \\ &+ Cd_\Sigma(\sigma^{k+1}(j_0,\cdots,j_{m-1},x),\sigma^{k+1}(j_0,\cdots,j_{m-1},y))^\gamma\end{aligned}$$

$(1 \leq k \leq m-1)$ であるが、一般に

$$\begin{aligned}d_\Sigma(a_0\cdots a_{l-1}x, a_0\cdots a_{l-1}y) &= \frac{d(a_0,a_0)}{\beta^0}+\cdots+\frac{d(a_{l-1},a_{l-1})}{\beta^{l-1}}+\frac{d(x_0,y_0)}{\beta^l}+\cdots \\ &= \frac{1}{\beta^l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d(x_k,y_k)}{\beta^k} \\ &= \frac{1}{\beta^l}d_\Sigma(x,y)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}S_m\psi(j_0,\cdots,j_{m-1},x) &\leq S_m\psi(j_0,\cdots,j_{m-1},y)+C\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{\beta^{(m-(i+1))\gamma}}d_\Sigma(x,y)^\gamma \\ &\leq S_m\psi(j_0,\cdots,j_{m-1},y)+Cd_\Sigma(x,y)^\gamma\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta^\gamma}\right)^i \\ &= S_m\psi(j_0,\cdots,j_{m-1},y)+\frac{C}{1-\beta^{-\gamma}}d_\Sigma(x,y)^\gamma.\end{aligned}$$

したがって

$$e^{S_m\psi(j_0,\cdots,j_{m-1},x)} \le e^{S_m\psi(j_0,\cdots,j_{m-1},y)} e^{C' d_\Sigma(x,y)^\gamma},$$

$$\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x) \quad \le \quad e^{C' d_\Sigma(x,y)^\gamma}\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(y). \tag{1}$$

Σの d_Σで測った diameter は有界であるから、ある定数 C''があって

$$\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x) \le C''\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(y).$$

νで yについて積分すれば、

$$\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x) \le C''\nu(\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1) = C''\nu(1).$$

同様に x について積分すると

$$C''^{-1} \le \lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(z) \le C''.$$

C''は m に依らない定数であることに注意する.

<u>等連続性</u>

$$\begin{aligned} |\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x) - \lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(y)| &= |\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x)|\left|1 - \frac{\mathcal{L}_\psi{}^m 1(y)}{\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x)}\right| \\ &\le C''\left|1 - \frac{\mathcal{L}_\psi{}^m 1(y)}{\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x)}\right| \end{aligned}$$

であり、式（1）より

$$\left|1 - \frac{\mathcal{L}_\psi{}^m 1(y)}{\mathcal{L}_\psi{}^m 1(x)}\right| \le \max\{|1 - e^{C' d_\Sigma(x,y)^\gamma}|, |1 - e^{-C' d_\Sigma(x,y)^\gamma}|\}.$$

したがって $\{\lambda^{-m}\mathcal{L}_\psi{}^m 1\}_{m=1}^\infty$の等連続性もいえる.
すると函数列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-k}\mathcal{L}_\psi{}^k 1\}_{n=1}^\infty$も一様有界、等連続となる. Ascoli-Arzela を適用して上の部分列がある連続函数 h に一様収束することがわかり、この h がもとめる固有函数である. 実際$\lambda^{-1}\mathcal{L}_\psi$の連続性と線型性から $\mathcal{L}_\psi h = \lambda h$ が したがう. 残りの部分は [B2] と同じように示されるので省略. (但し [B1] と同じように函数族Λを定めた後Λ でなく$\lambda^{-1}\mathcal{L}_\psi(\Lambda)$ のコンパクト性を示す. あとは同様.) ∎

定理 2.$\psi \in \mathcal{BD}$に対しΣ上のシフト不変なエルゴード[‡]的確率測度μ_ψ, および定数 $c_1 > 0, c_2 > 0, P$が存在して次をみたす：任意の $m \in \mathbf{N}$ と任意の $x \in \Sigma, x_i \ne \infty (0 \le \mathrm{i} \le m-1)$ に対し

$$c_1 \le \frac{\mu_\psi(E(x_0,\cdots,x_{m-1}))}{\exp(-Pm + \sum_{k=0}^{m-1}\psi(\sigma^k x))} \le c_2$$

ここで $E(x_0,\cdots,x_{m-1})$ はシリンダー集合である：

$$E(x_0.\cdots,x_{m-1})=\{(y_i)\in\Sigma : x_i=y_i,\quad j=0,\cdots,m-1\}.$$

略証 定理 1 で得た h,ν を用いて確率測度μを$\mu(dx)=h(x)\nu(dx)$ と定義する. このμが求めるものであることを示す. まずシフト不変性から見ていく.

任意の $f,g\in C(\Sigma)$ に対して

$$\begin{aligned}((\mathcal{L}_\psi f\cdot g)(x) &= \sum_{y\in\sigma^{-1}x} e^{\psi}(y)f(y)g(x)\\ &= \sum_{y\in\sigma^{-1}x} e^{\psi}(y)f(y)g(\sigma y)\\ &= \mathcal{L}_\psi(f\cdot(g\circ\sigma))(x)\end{aligned}$$

が成り立つことに気をつけて

$$\begin{aligned}\mu(f) &= \nu(hf)\\ &= \nu(\lambda^{-1}\mathcal{L}_\psi h\cdot f)\\ &= \lambda^{-1}\nu(\mathcal{L}_\psi(h\cdot(f\circ\sigma)))\\ &= \lambda^{-1}\mathcal{L}_\psi{}^{*}\nu(h\cdot(f\circ\sigma))\\ &= \nu(h\cdot(f\circ\sigma))\\ &= \mu(f\circ\sigma).\end{aligned}$$

上は任意の $f\in C(\Sigma)$ について成立するから任意の Borel 集合の特性函数についても成り立つ. したがってシフト不変性がいえる. エルゴード性、一意性も [B2]Proposition1.14 と同様にいくので割愛する.

任意の $m\in\mathbf{N}$ と任意の $g\in C(\Sigma)$ に対し

$$\mathcal{L}_\psi^m g(x)=\sum_{n_0,\cdots,n_{m-1}=1}^{\infty}\exp(S_m\psi(n_0,\cdots,n_{m-1},x))g(n_0,\cdots,n_{m-1},x)$$

となることが帰納的に確かめられる. $x,y\in\Sigma, x_i=y_i, x_i\neq\infty(0\leq \mathrm{i}\leq m-1)$ に対し定理 1 の証明からある $v>0$ が存在して

$$\begin{aligned}|S_m\psi(x)-S_m\psi(y)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1}|\psi(\sigma^k x)-\psi(\sigma^k y)|\\ &\leq C\sum_{k=0}^{m-1}d_\Sigma(x_k\cdots,y_k\cdots)\\ &\leq v\end{aligned}$$

‡実は混合性までいえる.

となることが分かる. E=$\{y \in \Sigma : x_i = y_i,\ i = 0, \cdots m-1\}$ とおく. 任意の $z \in \Sigma$ に対して $y' \in \sigma^{-m}z$ なる y' ∈E が一意に決まる. したがって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi^m h\chi_E(z) &= \sum_{y \in \sigma^{-m}z} e^{S_m\psi(y)} h(y)\chi_E(y) \\ &= e^{S_m\psi(y')} h(y') \\ &\leq e^{S_m\psi(x)} e^v C''\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mu_\psi(E) = \lambda^{-m}\mu_\psi(\mathcal{L}_\psi^m(\chi_E)) \leq \lambda^{-m} e^{S_m\psi(x)} e^v C''.$$

よって $c_2 = e^v C''$ ととればよい.

他方

$$\mathcal{L}_\psi^m h\chi_E(z) = e^{S_m\psi(y')} h(y') \geq e^{S_m\psi(x)} e^{-v} C''^{-1}$$

であり $c_1 = e^{-v}C''^{-1}$ とおくと $\mu_\psi(E) = \lambda^{-m}\mu_\psi(\mathcal{L}_\psi^m(h\chi_E)) \geq c_1\lambda^{-m}e^{S_m\psi(x)}$. あとは P=log$\lambda$ とすればよい. ■

$m \in \mathbf{N}$ を止めて $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1} \in \mathbf{N}$ に対して

$$\sup_{a_0\cdots a_{m-1}} S_m\psi \equiv \sup\{\sum_{k=0}^{m-1} \psi(\sigma^k x) : x_i = a_i,\ i = 0, \cdots, m-1\}$$

と定義する. 但し sup は Σ の元で $(a_0 \cdots a_{m-1})$ から始まるもの全体についてとる. さらに

$$Z_m(\psi) = \sum_{a_0 a_1 \cdots a_{m-1}} \exp(\sup_{a_0\cdots a_{m-1}} S_m\psi).$$

と定める.

補題 3. $P = P(\psi)$ を定理 2 で得られたものとすると

$$P = P(\psi) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log Z_m(\psi).$$

注. $P(\psi) = \log\lambda$ が測度 μ_ψ を使わずに表現されていることを強調しておく.

略証 $\Sigma_{a_0\cdots a_{m-1}}$ を $(a_0 \cdots a_{m-1})$ から始まる $x \in \Sigma$ の全体とする. $\Sigma_{a_0\cdots a_{m-1}}$ はコンパクトで $\sum_{k=0}^{m-1} \psi(\sigma^k x)$ は $\Sigma_{a_0\cdots a_{m-1}}$ 上連続、したがってある $x \in \Sigma, x_i = a_i (i = 0, \cdots, m-1)$ にて supremum が実現される:

$$S_m\psi(x) = \sup_{a_0\cdots a_{m-1}} S_m\psi.$$

定理 2 より

$$\mu_\psi\{y : y_i = a_i,\ i = 0, \cdots, m-1\} \in \exp(-Pm + S_m\psi(x))[c_1, c_2].$$

あらゆる $(a_0 \cdots a_{m-1})$ についてのシリンダー集合の測度の和は 1 であるから

$$c_1 \exp(-Pm) Z_m(\psi) \le 1 \le c_2 \exp(-Pm) Z_m(\psi).$$

ゆえに $P(\psi) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log Z_m(\psi)$. ∎

§.2 $f(z) = z^2 + \frac{1}{4}$のジュリア集合

$J(f)$ 上のダイナミックスのモデルとして記号力学系 (Σ, σ) を対応付ける. そのために *Markov partition* を構成する.

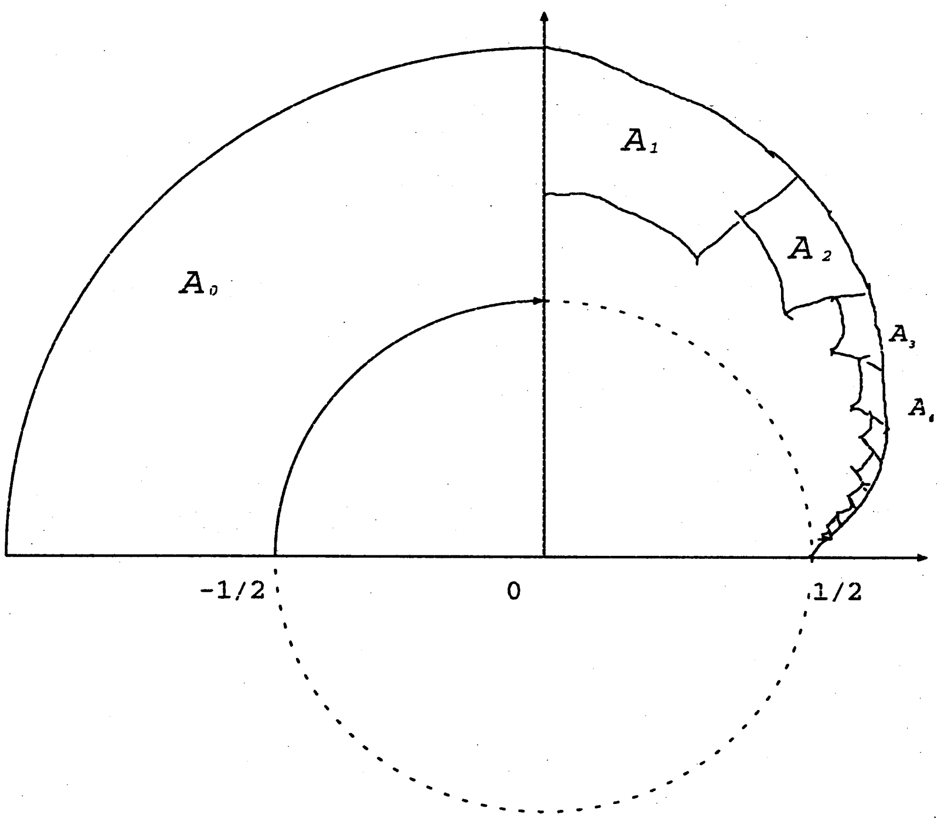

図 1: Markov patition のとり方の例

以下の性質 (P.1)-(P.5) を満たすコンパクト集合の列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$がとれる：

(P.1) $\mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset, i \neq j,\ \frac{1}{2} \notin A_i, i \geq 1$,

(P.2) $f : A_{i+1} \to A_i$は単葉 (*univalent*),

(P.3) $-\bar{A_0} = \{-\bar{z} | z \in A_0\} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \{\frac{1}{2}\}$,

(P.4) $z = \frac{1}{2}$の任意近傍をとればある番号より先の A_iはすべてその近傍に入る,

(P.5) ある定数 $k_0 \in \mathbf{N}, L_1, L_2 > 0$ が存在して任意の $k \geq k_0$ に対して

$$L_1 \leq k^2 diam A_k \leq L_2.$$

$F : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbf{C}$ を

$$F|_{A_i}(z) = -\overline{f^i(z)}$$

で定める. これは first return map である.

補題 4. F は次の性質をもつ：

- $F : A_i \to -\overline{A_0}$ は一対一,
- $F : \mathring{A}_i \to interior(-\overline{A_0})$ は微分同相,
- ある定数 $\beta > 1$ が存在して任意の $z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ に対して

$$|\mathrm{det} DF(z)|^{1/2} \geq \beta > 1,$$

- ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $i \in \mathbf{N}$ と任意の $z, w \in \mathring{A}_i$ に対して

$$\left|\log\left|\frac{\mathrm{det} DF(z)}{\mathrm{det} DF(w)}\right|\right| \leq C|z - w|.$$

略証 3 番目は Markov partition のとり方から従う. 実際 $\{z : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ の外では $|f'(z)| > 1$. 4 番目は折り返しの部分と単葉写像の部分を分けて後者には Koebe 歪曲定理. ∎

$f_i \equiv F|_{A_i}$ とおいて $\pi : \Sigma \to \mathbf{C}$ を

$$\pi(x) = \bigcap_{k=0}^{\infty} f_{x_0}^{-1} \circ f_{x_1}^{-1} \circ \cdots \circ f_{x_k}^{-1}(-\overline{A_0})$$

と定義する. 但し $f_{\infty}^{-1} \equiv \frac{1}{2}$. $f_{x_0}\pi(x) = \bigcap_{k=0}^{\infty} f_{x_1}^{-1} \circ \cdots \circ f_{x_k}^{-1}(-\overline{A_0}) = \pi(\sigma x)$ に注意.

補題 5. π は写像として意味をもち像の上への連続写像になる. さらに $\pi(\Sigma) = J(f) \cap \{z : z = x + iy, x \geq 0, y \geq 0\}$, $F \circ \pi = \pi \circ \sigma$. ∎

$\phi : \Sigma \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\log|\mathrm{det} DF(\pi(x))|, & \text{if } x_0 \neq \infty \\ -\infty, & \text{if } x_0 = \infty \end{cases}$$

と定義すると任意の$t \in \mathbf{R}$に対し$t\phi \in \mathcal{BD}$(前節と補題4)である.次にBowenの公式の拡張を得る.

命題6. $t \mapsto P(t\phi)$ は$t > 0$で凸単調減少函数(したがって連続)であり唯一の零点δをもつ:

$$P(\delta\phi) = 0.$$

さらに、この零点はジュリア集合のハウスドルフ次元と一致する: $\delta = HD(J(f))$.

略証 $\phi, \psi \in \mathcal{BD}$とせよ. Hölder 不等式を使うことにより任意の$s \in [0,1]$に対し

$$Z_m(s\phi + (1-s)\psi) \leq Z_m(\phi)^s Z_m(\psi)^{1-s}.$$

ϕ, ψを$t_1\phi, t_2\phi$ $(t_1, t_2 > 0)$にかえて補題3より

$$P((st_1 + (1-s)t_2)\phi) \leq sP(t_1\phi) + (1-s)P(t_2\phi).$$

局所的に凸有界であるから連続. 単調性は$\phi(x) \leq 0$と補題3の表示から従う.$t \to \infty, \to 0$での$\lambda = \mathcal{L}^*\nu(1)$の具体的評価により零点の唯一性がでる.

$F_n \equiv F|_{\cup_{i=1}^n A_i}, \Sigma_n = \{1, 2, \cdots, n\}^{\mathbf{N}}$とおく.$\sigma_n : \Sigma_n \to \Sigma_n$をシフトとせよ. Σ_nはΣに埋め込まれていると考えると$\sigma_n(x) = \sigma|_{\Sigma_n}(x) = \sigma(x), \phi|_{\Sigma_n}(x) = \phi(x)$である. 四つ組$(\Sigma_n, \sigma, F_n, \phi)$は本来のBowenの公式の仮定を充たしている. 特にΣ_n上ϕはLipschitz連続になっている(Σ上では不連続であった!).

$$J_n = \bigcup_{x \in \Sigma_n} \bigcap_{k=0}^{\infty} f_{x_0}^{-1} \circ f_{x_1}^{-1} \circ \cdots \circ f_{x_k}^{-1}(-\overline{A_0})$$

と定義するとこれがF_nの「ジュリア集合」になる. 対応するpressureを$P_n = P_n(\psi)$と書くことにしてBowenの公式より各nに対してδ_nが存在して

$$P_n(\delta_n\phi) = 0, \ \delta_n = \mathrm{HD}(J_n).$$

あとは$\delta_n \to \delta$がいえれば$J_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = J(f) \backslash \{$可算集合$\}$から$\delta_n = \mathrm{HD}(J_n) \nearrow \mathrm{HD}(J(f))$が従うので$\delta = \mathrm{HD}(J(f))$が示せる.$\delta_\infty \equiv \mathrm{HD}(J(f))$とおいて$\delta_\infty < \delta$と仮定して矛盾を導こう. $P_n(t\phi), P(t\phi)$のtについての単調減少性から

$$P_n(\delta_\infty\phi) \leq 0, \ P(\delta_\infty\phi) < 0.(*)$$

$P_n(\psi) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log Z_m^{(n)}(\psi)$であったが明らかに$Z_m^{(n)}(\psi) \leq Z_m^{(n+1)}(\psi)$であるから$\{P_n(\psi)\}$は単調増加列であり、$P_n(\psi) \leq P(\psi)$である. 各$n$のGibbs測度$\mu_n$をinclusion $i : \Sigma_n \hookrightarrow \Sigma$でpush-fowardしたものを再び$\mu_n$と書けば定理2のところで$\mu$の代わりに$\mu_n$、$P$の代わりに$P_n$で置き換えた不等式が成り立つ.$\mu_n$の弱極限の一つを$\mu_\infty$とすればシリンダー集合$E(x_0, \cdots, x_{m-1}), x \in$

$\Sigma, x_i \neq \infty (0 \leq \mathrm{i} \leq m-1)$ の特性関数は連続になるのでμ_∞についても P の代わりに $\sup_n P_n$で置き換えた不等式が成り立つ．補題 3 の証明から分かるように $\sup_n P_n = P$である．特に $P_n(\delta_\infty) \nearrow P(\delta_\infty)$. 従って (*) より $P(\delta_\infty) \leq 0$. これは

$$P(t\phi) = 0,\ t \in [\delta_\infty, \delta]$$

を意味し零の一意性に反す．■

命題 7. $\delta = \mathrm{HD}(J(f))$ とすると *Gibbs* 測度とδ−ハウスドルフ測度は同値である: ある正定数 c_3, c_4 があってジュリア集合上の任意の Borel 集合 Eに対し

$$c_3 m_\delta(E) \leq \mu(E) \leq c_4 m_\delta(E).$$

略証 $E = \pi$(シリンダー集合) について証明すれば十分.

$$F_{x_0 \cdots x_{m-1}} \equiv f_{x_0}^{-1} \circ \cdots \circ f_{x_{m-1}}^{-1}$$

と表記することにして

$$D(x_0, \cdots, x_{m-1}) = F_{x_0 \cdots x_{m-1}}(-\overline{A_0})$$

とおく．可算個の点を除いて Eを覆うような集合族 $\{D(x_0, \cdots, x_{m-1})\}$ で $diam D(x_0, \cdots, x_{m-1}) \leq const.\beta^m$なるものがとれるので Eの開被覆の代わりとして使える．また計算により

$$diam D(x_0, \cdots, x_{m-1}) \leq const.|\mathrm{det} DF_{x_0 \cdots x_{m-1}}(\pi(\sigma^{m-1}x))|^{1/2}.$$

一方定理 2 の不等式で $P(\delta\phi) = 0, \psi = \delta\phi$とした

$$\mu(E(x_0, \cdots, x_{m-1})) \in \exp(\delta S_m \phi(x))[c_1, c_2],$$

$$\exp(\delta S_m \phi(x)) = |\mathrm{det} DF_{x_0 \cdots x_{m-1}}(\pi(\sigma^{m-1}x))|^{\delta/2}$$

に着目して

$$\begin{aligned}
\sum \{diam D(x_0, \cdots, x_{m-1}) \ \}^\delta & +\epsilon \\
& \leq const \sum |\mathrm{det} DF_{x_0 \cdots x_{m-1}}(\pi \circ \sigma^{m-1}x)|^{\frac{\delta}{2}} + \epsilon \\
& \leq const \sum \exp(\delta \sum_{k=0}^{m-1} \phi(\sigma^k x)) + \epsilon \\
& \leq const \sum \mu(E(x_0, \cdots, x_{m-1})) + \epsilon \\
& \leq const.\mu(E) + \epsilon.
\end{aligned}$$

ここでϵは $\{D(x_0, \cdots, x_{m-1})\}$ で被覆されなかった可算個の点の被覆の分である．ϵは任意に小さくとれるのでこれで左側の不等式が示せる．右側はより

技巧的になるが扱っている写像が等角であること、Markov partition が良いオーダーで一点に収束していくことから従う. ∎

命題 8. $1 \leq \mathrm{HD}(J(f)) < 2$. ∎

参考文献

[B1] R. Bowen, Hausdorff dimension of quasi-circles, *Publ. math. IHES,* vol.50 (1979).

[B2] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphism, *Springer Lecture Notes in Math.* 470, 1975.

[R] D. Ruelle, Repellers for real analytic maps,*Ergodic Theory and Dynamical Systems,* (1982).

[S] D. Sullivan, Conformal dynamical systems, *Springer Lecture Notes in Math.*1007, 1980.