数理解析研究所講究録
988巻 1997年 172-181

双曲型有理関数のジュリア集合上の位相的ダイナミクスについて

木村耕人 (Kouji Kimura)

1. Introduction

今回は、hyperbolic rational map f を Julia set J 上に制限したものの dynamics について調べた。

ある dynamics $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ から $f:J\to J$ への semi-conjugacy φ を構成する。更に、φ が単射となる十分条件を調べた。また、Γ を一点集合とすると $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ は full shift となるが、この時の φ についても調べた。

2. semi-conjugacy の構成

今回の話ではずっと $f:\Sigma\to\Sigma$ を hyperbolic rational map で $\deg f=d\geqq 2$ となるものとする。

postcritical set を $P=\overline{\{f^n(c)\,;\,c:\text{critical point},\,n\geqq 1\}}$ とする。この時、open set $U\subset\overline{\mathbb{C}}-P$ を $\#(\overline{\mathbb{C}}-U)\geqq 3$ となるように選ぶ。また、open set V を $\overline{f^{-1}(V)}\subset V$ となるように選び、

$V'=f^{-1}(V)$ と定義する。そして、表記の都合で $V_0=V, V_1=V'$ とも書くことにする。また、V 上の paths γ, γ' が V_k 上で homotopic になるときに $\gamma \underset{k}{\simeq} \gamma'$ と書く。$(k=0,1)$

こうした時に、U 上に Poincaré metric を考える。(Montel の定理より定義できる。) そして、滑らかな path γ に対して、この metric に関する長さを length(γ) として、二点の距離は $d(\cdot,\cdot)$ とする。

すると、$\overline{V'}$ 上の path γ に対して、ある $\lambda>1$ が存在して、

$$\mathrm{length}(f(\gamma)) \geqq \lambda\, \mathrm{length}(\gamma)$$

となることが知られている。よって、任意の $k \geqq 1$ に対して、

$$\mathrm{length}(f^k(\gamma)) \geqq \lambda^k\, \mathrm{length}(\gamma) \qquad (1)$$

となる。

また、任意の $z \in F$ に対して $f^n(z)$ は attracting cycle に収束するので十分大きな n に対して $f^n(z) \in V_1$ となる。

ここで、compact set $\Gamma \subset V$ をとって、$\Gamma'=f^{-1}(\Gamma)$ とする。更に、次の条件を満たす continuous map $H:\Gamma' \times I \to V$ が存在することを仮定する。

$H(\cdot,0)=id_{\Gamma'}, H(\cdot,1)=r$ として、$r:\Gamma' \to \Gamma$ となる。

また、任意の $y \in \Gamma'$ に対し、$l(y)(t)=H(y,t)$ として V 上の path $l(y)$ を定義できるが、length$(l(y))$ が定義でき、

ある $C_1>0$ が存在して、任意の $y\in\Gamma'$ に対して

$$\mathrm{length}(l(y))\leqq C_1 \tag{2}$$

を満たす。

そこで、$\Sigma=\{\underline{y}\in\Pi\Gamma';n\in N\cup\{0\},y_n\in\Gamma',f(y_n)=r(y_{n+1})\}$ と定義する。そして、$\sigma:\Sigma\to\Sigma$ を shift map とする。つまり、

$$(\sigma(\underline{y}))_n=y_{n+1}$$

とする。

このように定義したときに次の定理を示す。

【Theorem 1】

$\sigma:\Sigma\to\Sigma$ から $f:J\to J$ への semi-conjugacy $\varphi:\Sigma\to J$ が存在する。

【outline of proof】

$z_n=f^n(z)$ と書いて、φ を $\varphi(\underline{y})=z$ となるための必要十分条件が次のようになるように定義する。

(a) z_n から y_n への paths $\gamma_n\subset\overline{V'}$ が存在して次を満たす。

ある $C_2>0$ が存在して、任意の $n\geqq 0$ に対して、

$$\mathrm{length}(\gamma_n)\leqq C_2 \tag{3}$$

を満たし、更に、

$$f(\gamma_n)\simeq\gamma_{n+1}\cdot l(y_{n+1}) \tag{4}$$

も満たす。

この時に、φ が map になる、即ち、任意の $\underline{y}\in\Sigma$ に対して唯

一つ $z \in J$ で $\varphi(\underline{y})=z$ となるものが存在することを示す。
その後にこの map が continuous で surjective であることを示す。
このために、制限した map $f: V' \to V$ が covering map になっていることに注意する。
任意の $\underline{y} \in \Sigma$ に対して、$\varphi(\underline{y})=z$ となる $z \in J$ が存在することを示す。このために、$\zeta_{n,0}=y_n$, $\gamma_{n,0}=l(y_n)^{-1}$ として、更に帰納的に $\gamma_{n,k+1}$ を $\gamma_{n+1,k}$ の f による $\zeta_{n,k}$ を始点とする lift とし、その終点を $\zeta_{n,k+1}$ とする。
そして、$\gamma_n=(\prod_{k=0}^{\infty}\gamma_{n,k})^{-1}$ と定義する。
すると、(1),(2) から (3) が分かり、定義から (4) が示せるので、このように存在を示すことができる。
次に、一意性については (4) から lift を十分な回数繰り返すことにより (a) のような paths は存在の証明の時に構成したものと homotopic となることが分かり、よって一意性が示せる。
これで、φ が map であることが示された。
$\underline{y} \in \Sigma$ どうしが近ければ、上で構成したような paths もある意味で近くなることを示すことができる。
このことから φ の連続性が示せる。
また、全射性については、対角線論法を使って候補を選び、

上のことからそれが (a) を満たすことを示した。

そして、$f\circ\varphi=\varphi\circ\sigma$ については (a) から明らか。 □

3. φ の単射性

ここでは φ が単射となるための十分条件について述べる。

まず、lemma を示す。

【Lemma】

$\underline{y}, \underline{y}'\in\Sigma$ に対して、$\varphi(\underline{y})=\varphi(\underline{y}')$ となるための必要十分条件は、長さ有界の y_n から y_n' への paths $\eta_n\subset\overline{V'}$ 存在して、

$$f(\eta_n)\simeq l(y_{n+1})^{-1}\cdot\eta_{n+1}\cdot l(y_{n+1}') \quad \text{for any } n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \qquad (5)$$

を満たす。

証明は (a) のような paths をつないだものを考えれば良い。

【Theorem 2】

次の条件 (i)～(vi) を満たす時に、φ は単射となる。

(i) V を $\overline{\mathbb{C}}$ から有限個の topological closed disks を除いたものとする。

(ii) Γ を V と homotopy equivalent で、有限個の simple arcs の和集合として書けるとする。この時、Γ' についても V' と homotopy equivalent であり、有限個の simple arcs の和集合として書ける。

そこで、$\Gamma' = \bigcup_{\alpha\in A}\alpha,\ \Gamma = \bigcup_{\beta\in B}\beta$ と表わす。但し、A, B は simple arc からなる有限集合で A, B それぞれで、異なる二つの元は端点以外では交わらない様なものとする。そして、G を A の元の端点全体の集合とし、$A'=\{\alpha^{-1};\alpha\in A\}$ $B'=\{\beta^{-1};\beta\in B\}$ とする。

(iii) 任意の $\alpha\in A$ に対して、$r(\alpha)$ については次のうちのいずれか一方のことが言える。

(1) $r(\alpha)$ は B の元の一端点となる。

(2) ある $\beta\in B$ が存在して、$r\circ\alpha=\beta$ となる。

(iv) 任意の $\alpha\in A$ に対して、$B(\alpha)=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\}\subset B\cup B'$ が存在して、$f\circ\alpha=\prod_{j=1}^{q}\beta_j$ となる。

(v) 任意の $\alpha\in A$ に対して、次のいずれかが成り立つ。

(1) $r^{-1}(f(\alpha(I)))\subset G$ となる。

(2) 任意の $\beta\in B(\alpha)$ に対して、ある $\alpha'\in A\cup A'$ があって、$r(\alpha')=\beta$ となる。

(vi) $\alpha_j\in A\cup A'$ $(0\leqq j\leqq k)$ で $\alpha_0=\alpha_k$ かつ $f(\alpha_{j-1})=r(\alpha_j)$ となるものは存在しない。

この定理の証明には、lemma の paths が Γ′ 上のある形の paths になることを示して、その paths にある"長さ"を定義する。そして、$f(\eta)=r(\eta')$ となるときこの"長さ"は η よ

り η' の方が1より大きな定数倍以上長くなることを示した。このことから (5) のような paths η_n の"長さ"は n に関して指数関数的に増加する。よって、長さが有界である事からこれらがすべて一点となることがわかる。このようにして証明ができる。

4．Γ が一点集合の場合

この節では、V を $\bar{\mathbb{C}}$ から有限個の topological disks を除いたものであって、Γ が一点集合の場合について述べる。ここで、$\Gamma=\{x_0\}$ とする。

この時、Γ' はd個の点からなる集合となり、任意の $y, y'\in\Gamma'$ で $f(y)=x_0=\mathbf{r}(y')$ となる。よって、(Σ, σ) が full shift となることが定義からわかる。そこで、$\varphi(\underline{y})=\varphi(\underline{y}')$ となる条件を調べる。

そのために、有向グラフ $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ を構成する。

この構成には Lemma を使うのだが、有向グラフを構成する前に Lemma について少し述べる。まず、この Lemma に出てきた η_n が二つあればそれらは $\overline{V'}$ 上で homotope となる。また、この Lemma に出てくる η_n の homotopy class は有限個しか出てこない。この二つはすぐにわかる。

そこで、Lemma の η_n として現れるような path の $\overline{V'}$ 上で

の homotopy class 全てに対して、それぞれの代表元を集めた集合を $\mathcal{V}$ と定義し、この集合の元を vertex と呼ぶ。また、$\mathcal{E}\subset\mathcal{V}^2$ を Lemma で現れる (η_{n-1}, η_n) の組全体の集合とし定義し、この集合の元を edge と呼ぶ。更に、$(\eta, \eta')\in\mathcal{E}$ の時に、$\eta\to\eta'$ と書くことにする。こうした時に $\mathcal{V}$ は有限集合となり、$(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ は有向グラフとして定義できたことになる。更に、$\mathcal{V}$ の元で始点が a であって終点が b の元全体の集合を $\mathcal{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とする。また、$\mathcal{V}(a)=\bigcup_{b\in\Gamma'}\mathcal{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ と定義する。つまり、$\mathcal{V}(a)$ は $\mathcal{V}$ の元で始点が a のものすべての集合である。

また、$W=\{\underline{\eta}\in\Gamma'^{N\cup\{0\}}; \eta_{n-1}\to\eta_n\}$ と定義する。

この様な有向グラフに対して次の定理が言える。

【Theorem 3】

$\underline{a}, \underline{b}\in\Sigma$ に対して、$\varphi(\underline{a})=\varphi(\underline{b})$ となるための必要十分条件は、$\underline{\eta}\in W$ で $\eta_n\in\mathcal{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ となるものが存在することである。

この定理から、上のような有向グラフが書ければ、φ によって同じ点に移す Σ の元が具体的にわかる。

このグラフを考察することによって次の Proposition を示すことができる。

【Proposition】

任意の $z\in J$ に対して、

$$\#\varphi^{-1}(z) \leqq \max\{\#\mathcal{V}(a)\ ;\ a \in \Gamma'\} < \infty$$

となる。

この Proposition は、このグラフの vertex set $\mathcal{V}$ が有限集合であることから示される。

ここで、任意の $\underline{y} \in \Sigma$ に対して、

$$M = M(\underline{y}) = \{\underline{y}' \in \Sigma\ ;\ \varphi(\underline{y}) = \varphi(\underline{y}')\}$$

と定義することにする。

$M(\underline{y}) = \{\underline{y}\}$ となるような $\underline{y} \in \Sigma$ がどの程度あるか調べるために次の条件を用意する。

$$\left.\begin{array}{l}\text{任意の } \eta \in \mathcal{V} \text{ に対して、ある } m \in N,\ \eta_j \in \mathcal{V}\ (0 \leqq j \leqq m) \text{ があり} \\ \eta_0 \text{ は 0-homotope であり、} \eta_0 \to \eta_1 \to \eta_2 \to \cdots \to \eta_m \text{ となる。}\end{array}\right\}\ (6)$$

【Theorem 4】

(I) (6) を満たしていなければ、$\underline{y} \in \Sigma$ で $M(\underline{y}) = \{\underline{y}\}$ となるようなものは存在しない。

(II) (6) を満たしていれば、generic な $\underline{y} \in \Sigma$ で $M(\underline{y}) = \{\underline{y}\}$ となる。

【outline of proof】

まず、(I) については (6) を満たしていない時には、このようにならないような $\eta \in \mathcal{V}$ の lift に対して対角線論法を

使うことによって示すことができる。

次に、(Ⅱ) を示すのに次の記号を定義する。

$$_{n}\langle \underline{y} \rangle_{m} = (y_{n}, y_{n+1}, \cdots, y_{m})$$

$S = \{(y_0, \cdots, y_m)\,; m \in N, y_j \in \Gamma'$ であって、

$\eta_j \in \mathcal{V}(y_j)$ s. t. $\eta_{j-1} \to \eta_j$ ならば η_0 は 0-homotope $\}$

$$S_n = \{\underline{y} \in \Sigma\,; \text{ある } m \in N \text{ で } {}_{n}\langle \underline{y} \rangle_{m} \in S\}$$

この記号を使って (Ⅱ) を示す。

まず、(6) を満たしていることと $S \neq \phi$ であることが同値であることを示す。

そして、

$$\{\underline{y} \in \Sigma\,; M(\underline{y}) = \{\underline{y}\}\} = \bigcap_{n \in N} S_n$$

となり、この S_n が open dense であることが示される。

このように (Ⅱ) も示して、この定理の証明が終わる。 □