数理解析研究所講究録
988巻 1997年 29-34

Postcritically finite branched coverings の Julia 集合について

大阪大学基礎工学部 亀山敦 (Atsushi KAMEYAMA)

1 Introduction と定義

従来、Julia 集合は、リーマン球面上の有理関数に対して定義され、いろいろな性質が調べられて来ている。特に、postcritically finite と呼ばれる条件を満たす多項式の Julia 集合は、組合せ的な状況まで含めて、その構造がよくわかっている。しかし、この場合、Julia 集合の位相的な構造だけに着目したとき、多項式の解析的な性質は不必要となる。Julia 集合の位相は、homotopical な条件だけで決定されることがわかる。

本講演では、有理関数の解析的な性質を忘れ、topological な branched covering から出発して Julia 集合を定義し、その性質を調べていくことにする。

定義 2次元球面上の branched covering $f : S^2 \to S^2$ の critical point の集合を C_f と書き critical set と呼ぶ。また、$P_f = \{f^k(c) | c \in C_f, k > 0\}$ を postcritical set と呼ぶ。$\#P_f < \infty$ のとき、f は postcritically finite であると言う。このとき、$P_f = P_f^F \cup P_f^J$ とふたつにわかれる。$P_f^F = \{x \in P_f |$ ある n について $f^n(x) \in C_f\}$、$P_f^J = P_f - P_f^F$ である。P_f^F に属する periodic cycle は critical point を含み、P_f^J の periodic cycle はそうではない。有理関数の場合を考えると、Fatou 集合に含まれる postcritical point が P_f^F で Julia 集合に含まれるものが P_f^J。

定義 二つの postcritically finite branched covering f, g が Thurston 同値であるとは、次をみたすような二つの同相写像 $\phi, \psi : (S^2, P_f) \to (S^2, P_g)$ が存在することである。ϕ, ψ は P_f を止めて互いに isotopic であり、次が可換。

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_f) & \xrightarrow{f} & (S^2, P_f) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (S^2, P_g) & \xrightarrow[g]{} & (S^2, P_g) \end{array}$$

定義 コンパクト集合 $J \subset S^2$ が postcritically finite branched covering f の Julia 集合であるとは、f と Thurston 同値な g が存在して、次をみたすことである。

(1) $g^{-1}(J) = J = g(J)$。

(2) $S^2 - P_g^F$ 上に完備な metric が存在して、g は拡大写像になっている。正確に言うと、$S^2 - P_g^F$ 内の arc l を metric で測った長さを $|l|$ と書くことにすると $c > 0, \lambda < 1$ があって $g^{-k}(l)$ の各連結成分 l_i の長さは $|l_i| < c\lambda^k |l|$ となる。

(3) P_g^F の点は J に含まれない。

f が有理関数であれば、普通のJulia集合は、上の意味でもJulia集合になっている。

簡単のため、以後は、f がJulia集合を持つと言ったとき、f が上記の g の性質を満たすものとする。

次のような自然な問題について考察する。

問題1 Julia集合はどのような集合になるか。

問題2 f はいつJulia集合を持つか。

2 Julia集合のトポロジー

この節では、Julia集合 J を持つような f を考える。f の次数を $d \geq 2$ とする。J の構造を調べるため、われわれのよく知っている記号力学系を経由して記述してみよう。

$S^2 - P_f$内に点 x をとる。$\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ を x の d 個の逆像とする。x と x_i を結ぶarcをひとつずつ固定し、l_i $(i = 1, 2, \ldots, d)$ と書く。

S^2 内の点 y と x を結ぶarc γ をとる。γ のもちあげ γ_i を、x_i と $f^{-1}(y)$ のひとつの点を結ぶarcで、$f(\gamma_i) = \gamma$ となるものとする。また、$L_i(\gamma)$ を l_i と γ_i をつないだarcとする。$L_i(\gamma)$ は x を始点とし、x_i を通り、$f^{-1}(y)$ の点を終点とするarcとなる。

$W_k = \{1, 2, \ldots, d\}^k$ の元 $a_1 a_2 \ldots a_k$に対し、$l_{a_1 a_2 \ldots a_k} = L_{a_1}(l_{a_2 \ldots a_k})$ と帰納的に定義する。$l_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ は x を始点とし、$f^{-k}(x)$ の点を終点とするarcになる。$l_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ の終点を $x_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ と書く。

(Σ, σ) を記号力学系とする。すなわち、$\Sigma = \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbf{N}}$ で $\sigma(a_1 a_2 \ldots) = a_1 \ldots$。$\Sigma$ の元 $\underline{a} = a_1 a_2 \ldots$ に対して、$x_{\underline{a}} = \lim_{k \to \infty} x_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ および $l_{\underline{a}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} l_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ と定義する。この極限の存在は、f の拡大性から保証される。

この Σ から S^2 への写像 $\underline{a} \mapsto x_{\underline{a}}$ を π と書くことにすると、また拡大性より π は連続であり、$\sigma \circ \pi = \pi \circ f$ であること、x と l_i の連続移動で π は変わらないことがわかる。

特に、x を J 内にとると、π の像が J に含まれていることが言える。J のdiameterは有限なので、拡大性から、逆の包含関係も言えて、結局 $J = \pi(\Sigma)$。

上の事実を、別な見方で見直してみると次のようになる。

$$\tilde{U} = \left\{ \gamma : [0,1] \to S^2 \,\middle|\, \gamma \text{ は連続}, \begin{array}{rcll} \gamma(0) & = & x, & \\ \gamma(t) & \in & S^2 - P_f & (0 < t < 1), \\ \gamma(1) & \in & S^2 - P_f^F & \end{array} \right\}$$

とし、

$$U = \tilde{U} / \sim$$

とおく。ここで、$\gamma \sim \gamma'$ は、端点を止めて $S^2 - P_f$ 内でhomotopicを意味する。U は $S^2 - P_f^F$ 上のmetricから決まる距離によって距離空間になる。

U からそれ自身への写像 $F_1, F_2, \ldots, F_d$ を

$$F_i([\gamma]) = [L_i(\gamma)]$$

で定義する。ここで、$[\gamma]$ は γ の同値類。すると、F_i は U 上の縮小写像になり、$\{F_i\}_{i=1}^d$ から決まる自己相似集合 K が存在する。$\rho : U \to S^2$ を $\rho([\gamma]) = \gamma(1)$ で決まる写像とすると、$F_i \circ \rho \circ f = \rho$ となる。$K = \{[l_{\underline{a}}] | \underline{a} \in \Sigma\}$ なので、$J = \rho(K)$ と表わすことができる。

同相の意味でJulia集合の一意性が成り立つ。したがって、有理関数とThurston同値なbranched coveringは普通のJulia集合と同相なJulia集合を持つ。

定理 J, J' が両方とも f のJulia集合なら、ふたつは同相。

このように、Julia集合は、記号力学系でcodeされることがわかったが、標準的なcodingというものはなく、最初に選んだ、x と $f^{-1}(x)$ を結ぶarcをhomotopicalな意味で異なるものに変えると、違ったcodingが得られるということを注意しておく（例2.0と2.1）。

Julia集合は、記号力学系 Σ でcodingされるので、位相的にはΣ を同値関係で割った商空間で表わすことができる。f が多項式とThurston同値の場合、kneading sequenceと呼ばれる記号列で表現される不変量があって、これが記号列の同値関係を定める。

例1.0 $f(z) = z^2 + i$。critical point は0と ∞。$0 \mapsto i \mapsto -1+i \mapsto -i \mapsto -1+i,\ \infty \mapsto \infty$。

kneading sequence $k(f) = 1\overline{12}$ である。ここで $\overline{12} = 121212\ldots$ である。同値関係を $\sim$ で書くことにすると、

$$w11\overline{12} \sim w21\overline{12}$$

ただし w は任意の有限列。

一般に、次数2の多項式 $f(z) = z^2 + c$ で0がstrictly preperiodicの場合、kneading sequenceを $k(f)$ とすると、同値関係は

$$w1k(f) \sim w2k(f)$$

となる。これは、Julia集合が（topologicalに）自己相似集合であることを示している。

例2.0 $f(z) = z^2 - 1$。critical point は0と ∞。$0 \mapsto -1 \mapsto 0,\ \infty \mapsto \infty$。

$k(f) = \overline{1*}$。ここで $*$ は1と2両方を表わすワイルドカードである。同値関係は、

$$\begin{cases} \overline{1} \sim \overline{12} \\ \overline{1} \sim \overline{21} \\ w2\overline{1} \sim w1\overline{12} \\ w2\overline{1} \sim w2\overline{21} \end{cases}$$

ただし w は任意の有限列。

一般に、$f(z) = z^2 + c$ で0がperiodicの場合、kneading sequence $k(f) = \overline{k_1k_2\ldots k_{n-1}*}$ とすると、同値関係は、

$$\begin{cases} \sigma^i(\overline{k_1k_2\ldots k_{n-1}1}) & \sim & \sigma^i(\overline{k_1k_2\ldots k_{n-1}2}) & (i = 0, 1, \ldots, n-1) \\ w2\overline{k_1k_2\ldots k_{n-1}1} & \sim & w1\overline{k_1k_2\ldots k_{n-1}2} & \\ wk_i'\sigma^i(\overline{k_1k_2\ldots k_{n-1}1}) & \sim & wk_i'\sigma^i(\overline{k_1k_2\ldots k_{n-1}2}) & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

である。ただし、k_i' は k_i が1のとき2、2のとき1を表わす。この場合は、Julia集合が自己相似集合を有限個の点で同一視した空間になっていることを示している。

さきほど、標準的なcodingはないと言ったが、多項式の場合、kneading sequenceから決まるcodingが標準的なcodingと言えるかもしれない。ただし、一般に、kneading sequenceから決まるcodingを定めるような l_i の選びかたは存在するとは限らない。上であげた例の場合では、Fig. 1のように l_i をとればkneading sequenceから決まるcodingと π から定まるcodingは一致する。

一般の有理関数の場合は、このようにcodingをすっきりと決められるような不変量は見つかっていない。

例2.1 Fig. 2のように l_i を選ぶと、同値関係は

$$\begin{cases} \overline{1} & \sim & \overline{2} \\ \overline{12} & \sim & \overline{21} \\ w1^n\overline{12} & \sim & w1^n\overline{21} \qquad (n \geq 1) \end{cases}$$

定理 $\underline{a} = a_1a_2\ldots, \underline{b} = b_1b_2\ldots \in \Sigma$ が $\pi(\underline{a}) = \pi(\underline{b})$ となる必要十分条件は、x を始点とし、各 k について終点が共通のarc で長さが有界なもの α_k, β_k $(k = 1, 2, \ldots)$ が存在して、$\alpha_{k-1} \cup \beta_{k-1}$ は $L_{a_k}(\alpha_k) \cup L_{b_k}(\beta_k)$ と x を止めて $S^2 - P_f$ 内でhomotopic.

注 この定理を使うと、同値関係を具体的に知る方法が得られる。f からある方法で群とその上の準同形写像を定義して、その不変部分群が同値関係全体を記述していることになるがここでは詳しく述べない。

条件の中に、「長さ有界」という条件が含まれているが、これは metricによらない条件である。「homotopicalな長さ」というものをうまく定義してやれば、metricを使わなくても条件を述べることができる。Julia集合を持たないようなbranched coveringに対しても、Σ上の同値関係は形式的に同様に定義できる。ただし、その場合は商空間は、Julia集合の定義を満たすように球面に埋めこむことができない。

Julia集合の性質を並べておく。普通のJulia集合と同じ様な性質を持っていることがわかる。

定理 (1) $z \in J$ に対し、$\#\pi^{-1}(z) < \infty$。

(2) $S^2 - J$ の各連結成分には、critical pointのimverse imageが含まれる（すなわちある z が成分に含まれて、ある自然数 n により $f^n(z) \in C_f$）。

(3) J は連結。

3 Julia集合を持つbranched covering

すべてのpostcritically finite branched coveringがJulia集合を持つわけではない。

定義 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ を $S^2 - P_f$ 内のdisjoint なsimple closed curveの集まりとする。Γ は次を満たすとき、Levy cycleと言う。

各 γ_iの囲む二つの領域にはそれぞれ、P_f の点が二つ以上含まれている。$f^{-1}(\gamma_i)$ の連結成分のなかに、γ_{i-1} と $S^2 - P_f$ 内でhomotopicな γ'_{i-1} があって、 $f: \gamma'_{i-1} \to \gamma_i$ はdegree 1。ただし、$\gamma_0 = \gamma_n$ と考える。

Levy cycleを持つbranched coveringがJulia集合を持たないことはすぐにわかる。その逆も言えるのではないかというのが次の予想である。

予想 postcritically finite branched coveringがJulia集合を持つこととLevy cycleを持たないことは同値である。

次数2のbranched coveringに対しては、Thurstonなどの結果[1]により、Levy cycleを持たないことと、有理関数にThurston同値であることが知られている。したがって、次数2の場合は上の予想は正しい。次数が3以上の場合、branched coveringが有理関数とThurston同値になる条件はLevy cycleを持たないというだけでは足りない。予想が正しければ、有理関数と同値ではないがJulia集合を持つbranched coveringが存在することになる。不完全ながら次のような結果が成り立つ。

定理 $P_f^F = \emptyset$ となるpostcritically finite branched coveringに対し、Julia集合を持つ必要十分条件は、次の性質を満たす $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ が存在しないことである。

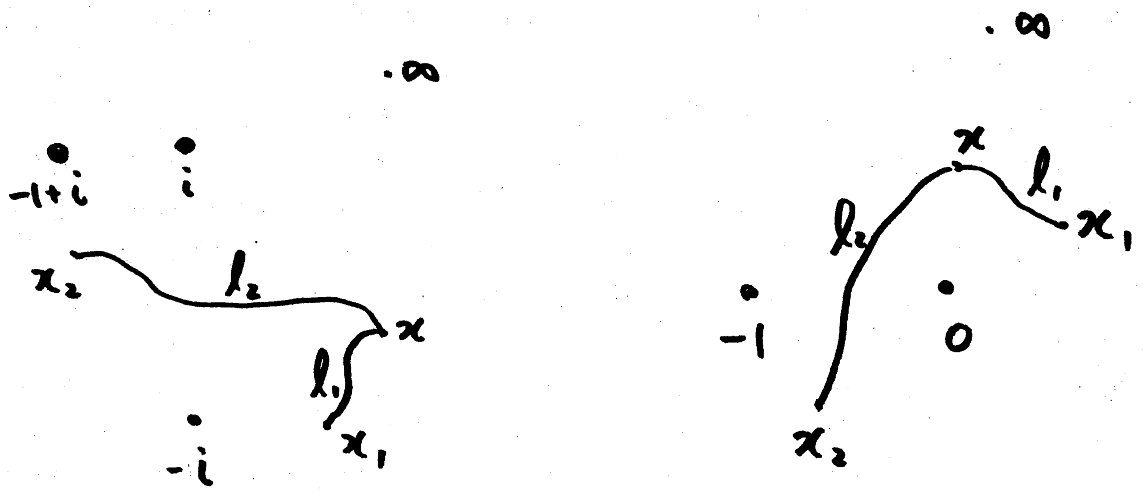
各 γ_i は端点が P_f に含まれ、内点が $S^2 - P_f$ に含まれるsimple arc。$f^{-1}(\gamma_i)$ の部分集合で γ_{i-1} と端点を止めて $S^2 - P_f$ 内でhomotopicな γ'_{i-1} が存在し、$f : \gamma'_{i-1} \to \gamma_i$ は1対1写像。ただし、$\gamma_0 = \gamma_n$ と考える。

前節の定理とその注で、Julia集合を持たない場合でも、Σ 上の同値関係が定義できることを述べた。Σ をその同値関係で割った商空間を $\tilde{J}_f$ と書いて、f のpre-Julia集合と呼ぼう。

予想 f がJulia集合を持つことの必要十分条件は f のpre-Julia集合 $\tilde{J}_f$ が S^2 に埋めこむことができ、かつ、f とThurston同値な g で $g^{-1}(\tilde{J}_f) = \tilde{J}_f = g(\tilde{J}_f)$ となるものが存在することである。

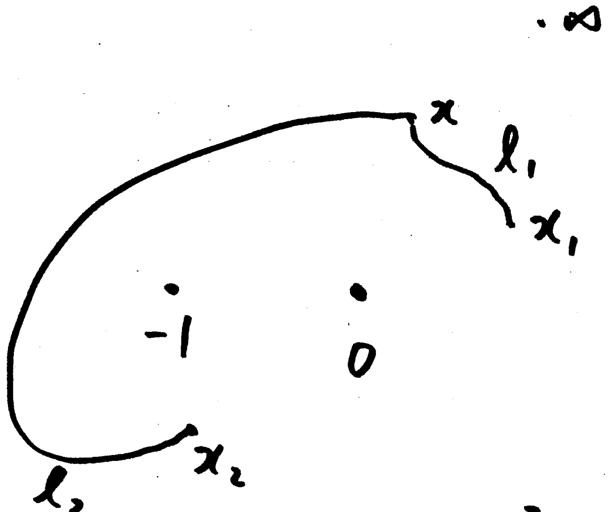
参考文献

[1] A. Douady and J. H. Hubbard, A Proof of Thurston's Topological Characterization of Rational Maps, preprint.



$z \mapsto z^2 + i$ $\qquad$ $z \mapsto z^2 - 1$

Fig. 1



$z \mapsto z^2 - 1$

Fig. 2