数理解析研究所講究録
988巻 1997年 67-79

漸近値に関するBergweiler-Eremenkoの定理とその応用について

金沢大・工　藤解和也　(Kazuya Tohge)

1　はじめに

1995年、W. Bergweiler と A. Eremenko は論文 [BE] に於いて

Theorem 1 *If f is a meromorphic function of finite order, then every indirect singularity of f^{-1} is a limit of critical points.*

及びこれに同値な（見かけはその stronger version となっている）

Theorem 1' *Let f be a meromorphic function of finite order. Then every indirect singularity of f^{-1} over $a \in \bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is a limit of critical points z_k such that $f(z_k) \neq a$.*

を証明した。その結果、整函数に対する Denjoy-Carleman-Ahlfors の定理を有理型函数に拡張したとも言える次を得た：

Corollary 3 † *If a meromorphic function of finite order ρ has only finitely many critical values, then it has at most 2ρ asymptotic values.*

ここでは、複素平面 $\mathbb{C}$ 上の超越有理型函数‡f の値分布に関する考察を、この Bergweiler-Eremenko の定理と Iteration Theory より従う基本的結果の応用と言う観点で試みたい。しかしながら、Bergweiler-Eremenko の論文 [BE] の完成度の高さから、勢いその紹介に終始せざるをえないことをはじめにお断り申し上げます。

2　準備

まず（f^{-1} の Riemann 面と同一視した）$\bar{\mathbb{C}}$ 上の点の分類〔Ordinary points, Critical points, (Transcendental) Singularities〕を行う。値 $a \in \bar{\mathbb{C}}$ を取り、$D(r,a)$ は中心 a で半径 $r > 0$ の spherical disk とする。各 $r > 0$ ついて preimage $f^{-1}(D(r,a))$ のひとつの成分 $U(r)$ を、

$$r_1 < r_2 \Rightarrow U(r_1) \subset U(r_2)$$

が満たされているように選ぶ。(関数 $U : r \to U(r)$ は its germ at 0 で完全に決定される。) このとき二つの可能性が生じる：

---

†Theorems, Corollaries, Lemmas そして equations に付けられた番号は [BE] のそれに一致する。

‡この note 全体を通して、特に断らない限り「有理型函数」の定義域は複素平面 $\mathbb{C}$ である。すなわち、$f : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ を考察の対象とする。

a) $\bigcap_{r>0} U(r) = \{z\},\ z \in \mathbb{C}\ \&\ a = f(z)$:

$$z,\ \text{an } \textbf{ordinary point} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \in \mathbb{C} & \text{and} \quad f'(z) \neq 0 \quad \text{or} \\ a = \infty & \text{and} \quad z,\ \text{a simple pole of } f \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} z,\ \text{a } \textbf{critical point} \text{ over } a \\ (a,\ \text{a } \textbf{critical value}\ ) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \in \mathbb{C} & \text{and} \quad f'(z) = 0 \quad \text{or} \\ a = \infty & \text{and} \quad z,\ \text{a multiple pole of } f \end{cases}$$

b) $\bigcap_{r>0} U(r) = \emptyset$:

Our choice: $r \to U(r)$ defines a **transcendental singularity** of f^{-1}.

（ここでは単に a **singularity** U over a ということにする。）

開集合 $U(r) \subset \mathbb{C}$ は a **neighborhood of the singularity** U と呼ぶ：

【注】$z_k \to$ a singularity $U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0$ s.t. $z_k \in U(\varepsilon)$ for $k \geq k_0$.

【注意】 (漸近値と transcendental singularity との関係)

- *U, a singularity over a $\Rightarrow$ a, an asymptotic value*

  (i.e. $\exists$ a curve $\Gamma \subset \mathbb{C}$ tending to ∞ s.t. $\lim_{z\to\infty, z\in\Gamma} f(z) = a$).

- *a, an asymptotic value $\Rightarrow$ $\exists$ at least a singularity U over a.*

‖定義‖ (a direct/indirect singularity) *A singularity U over a is called*

- **direct** $\Leftrightarrow \exists r > 0$ *such that $f(z) \neq a$ for $\forall z \in U(r)$.*

  (Cf. $f(z) = \exp(z)$ and $a = 0, \infty \Rightarrow \exists$ a logarithmic singularity over a)

- **indirect** $\Leftrightarrow$ *not direct, i.e. f takes the value a in $U(r)$ (infinitely often) for $\forall r > 0$.*

  (Cf. $f(z) = \sin z/z$ and $a = 0 \Rightarrow a$ is a limit point of critical values)

‖定義‖ (order of meromorphic functions) 複素平面 $\mathbb{C}$上で有理型な函数 f に対しては、その位数 *(order)* $\rho(f)$ は

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_0(r, f)}{\log r} \quad (\geq 0)$$

で定義される。ここで、$T_0(r, f)$ は *the Ahlfors-Shimizu characteristic*

$$T_0(r, f) = \int_0^r \frac{S(t, f)}{t}\, dt,$$

$$S(t, f) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<t} \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}\, dx\, dy \quad (z = x + iy)$$

を選ぶ。

【注意】 (Singularities に関する既知の結果)

- *"Direct"*について：

  (H) **Heins' Theorem** [He, Theorem 5]
  The set of direct singularities of a function inverse to a meromorphic function is always countable.

  (A) **Denjoy-Carleman-Ahlfors' Theorem** [N, p.303],[Tsu, 定理 XVIII.26]
  For a meromorphic function of finite order ρ, its inverse function has at most $\max\{2\rho, 1\}$ *direct singularities.*

  (D) **同上** [N, p.307],[Tsu, 定理 XVIII.27]
  An entire function of finite order ρ has at most 2ρ finite asymptotic values.

- *"Indirect"*について：

  (E) $\exists$ *meromorphic functions of any given order $\rho \geq 0$ such that every point in $\bar{\mathbb{C}}$ is an asymptotic value ([E]), so the number of indirect singularities is infinite in this case.*

  (V) $\exists$ *a meromorphic function with no critical points such that the set of asymptotic values has the power of the continuum (as a Cantor set on the unit circle)([V]), and so has the set of indirect singularities.*

このように indirect singularities については一般には殆どなにも分かっていなかった状況下での、Bergweiler-Eremenko による Theorem 1 の証明は、我々に多くの応用を期待させるに十分な出来事であった。

いま、有理型函数 $f: \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ の critical values と asymptotic values 及びこれらの値全体の (finite) limit points が成す集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ で表すことにする。このとき、例えば [B, Theorem 7] を参照して

Theorem A *Let f be a meromorphic function, and let $C = \{U_0, U_1, ..., U_{p-1}\}$ be a periodic cycle of components of the Fatou set $F(f)$ of f.*

- *If C is a cycle of immediate attractive basins or Leau domains, then $U_j \cap \mathrm{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$ for some $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. More precisely, there exists $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ such that $U_j \cap \mathrm{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$ contains a point which is not preperiodic or such that U_j contains a periodic critical point (in which case C is a cycle of superattractive basins).*

- *If C is a cycle of Siegel disks or Herman rings, then $\partial U_j \subset \overline{O^+(\mathrm{sing}(f^{-1}))}$ for all $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$.*

その一方では、F. Iversen [I], [N] による次の結果から漸近値と値分布論との繋がりも自然にみえてくる：

Theorem B *If a transcendental meromorphic function takes some value $a \in \bar{\mathbb{C}}$ finitely many times, then a is an asymptotic value.*

3　結果

【注意】　この節では、h^n 及び $h^{\circ n}$ は、それぞれ函数 h の the nth power 及び the nth iterate を表す ([BE])。

3.1　Leau domains との関係から

固定された任意の値 $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ について函数 $g(z) = z - f(z)/c$ を考え、Theorem A の Leau domains に関する主張を適用することで、Bergweiler-Eremenko [BE] は次の結果を示した：

Theorem 3　*Let f be a meromorphic function of finite order. If f has infinitely many multiple zeros, then f' assumes every finite non-zero value infinitely often.*

証明：　定義より g もまた meromorphic かつ order finite である。今 ζ を f の任意の multiple zero として、

$$g(\zeta) = \zeta \quad \text{かつ} \quad g'(\zeta) = 1$$

が成り立つ。よって a Leau domain U, $\zeta \in \partial U$ が存在して、U 内で局所一様に $g^{\circ n} \to \zeta$ $(n \to \infty)$ を満たす。つまり相異なる固定点 ζ には相異なる domain U が対応する。Theorem A より U には g の critical または asymptotic value が少なくともひとつ含まれている。従って、仮定から $\mathrm{sing}(f^{-1})$ に含まれる点の個数の総和は有限ではあり得ない。一方で、Corollary 3 より g は高々有限個しか asymptotic values を持ち得ない。以上で g の critical points、それ故 f' の c-points が無限個存在することが示された。■

【注意】　Theorem 3 には無限位数をもつ（特に整函数での）反例があることが [BE] で述べられている。

3.2　Attractive basins との関係から

函数 $f(z)-a$, $a \in \mathbb{C}$, の Newton function $N(z) = z-\{f(z)-a\}/f'(z)$ に対して Theorem A の attractive basins に関する主張を適用することで、次の主張が得られる ([To])：

Theorem C　*If f is meromorphic of finite order and f'' has only finitely many zeros, then all but finitely many roots of $f(z) - a$ are simple for every complex number a.*

この際には、Corollary 3 をより精密に評価した次を用いる：

Corollary 2　*If f is a meromorphic function of finite order ρ and E is the set of its critical values, then the number of asymptotic values of f is at most $2\rho + \mathrm{card}\, E'$, where E' stands for the derived set of E.*

証明： 函数 $N(z)$ は超越的であると仮定しても一般性は失われない。いま、

$$N'(z) = \frac{\{f(z) - a\}f''(z)}{\{f'(z)\}^2}$$

であるから、$N(z)$ の定義式と併せて

$$\zeta\text{, a critical point of } N(z) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\zeta) = a \text{ or } f''(\zeta) = 0 \ (\text{ and } f'(\zeta) \neq 0); \\ f'(\zeta) = 0 \text{ and } f''(\zeta) = 0 \text{ but } f(\zeta) \neq a \end{cases}$$

が従い、結局のところ仮定から、$N(z)$ の critical points 全体の集合は高々有限集合を除いて $f(z)$ の simple a-points 全体が成す集合 S に一致していると分かる。

さて、$f(z)$ の m 重の a-point ζ は $m=1$ または $m \geq 2$ のそれぞれに対応して、$N(z)$ の super-attracting または attracting fixed point になる。Theorem A よりこの場合についても、各 ζ には互いに相異なる $N(z)$ の singular value が対応している。特に、$m=1$ であれば ζ それ自身が critical value かつ critical point である。これより $f(z)$ の multiple a-points ζ は $f''(\zeta) = 0$ となる場合を除き、すべて $N(z)$ の asymptotic values に対応するしかないが Corollary 2 からそのような点は高々有限個である。実際、上で見た通り $N(z)$ の critical points 全体の集合は、集合 S, $N(z)$ の super-attracting fixed points の成す集合, に有限集合を併せたものであり、従ってその $N(z)$ による像集合である E は集積点を持たない。これで主張は得られた。■

【注意】 この他にも、Theorem 1 を直接応用することにより、f'' の零点と f との極の分布に関する種々の興味深い結果が Langley [L2] によって与えられている。

【注意】 Theorem C については、無限大の位数をもつ具体的な函数をその反例に挙げることに成功していない。

3.3 Zalcman-Pang の定理を応用して

Picard の定理を様々な方向に拡張する試みは、値分布論における課題のひとつである。例えば、Hayman による次の結果 ([Ha1, Corollary to Theorem 3.5] はその出発点と言える：

Lemma 3 *Let f be a transcendental meromorphic function. If f has only finitely many zeros, then $f^{(\ell)}$, $\ell \geq 1$, assumes every finite non-zero value infinitely often.*

例 有理型函数 $f(z) = 1/(e^z + 1)$ は二つの *finite Picard exceptional values* 0, 1 をもつ。その一方で、$f'(z) = -e^z/(e^z+1)^2$ は唯一 0 をその除外値に持ち、また $f^{(\ell)}$ $(\ell \geq 2)$ はすべての値を無限個とる。

Picard の除外値として 0 と ∞ を持ち位数が有限となる有理型函数は、各導函数も 0 と ∞ をその *Picard* の除外値にもつ。逆に、ある固定した整数 $\ell \geq 2$ について *meromorphic function* f と $f^{(\ell)}$ が共に *Picard* の除外値 0 を持てば、f は極を有限個しか持たず、その位数 $\rho(f)$ は有限である： $f = R\exp(P)$, ここに R *rational*, P *polynomial* ([FHP], [L1])。

Lemma 3 の拡張に関する Hayman の予想は、[BE] に於いて更に一般的な形で解決された：

Theorem 2 *If f is a transcendental meromorphic function and $m > \ell$ are positive integers then $(f^m)^{(\ell)}$ assumes every finite non-zero value infinitely often.*

これは Theorem 3 の応用として与えられたものであるが、infinite order の場については正規族に関する L. Zalcman [Z1, Z2] 及び X. Pang [P1, P2] による次の結果を適用して証明される：

Lemma 4 *Let F be a non normal family of meromorphic functions in the unit disk D, and $-1 < k < 1$. Then there exist sequences $f_n \in F$, $z_n \in D$ and $a_n > 0$ such that $|z_n| < r < 1$, $a_n \to 0$ and*

$$g_n(\zeta) = a_n^{-k} f_n(z_n + a_n\zeta) \to g(\zeta),$$

where g is a non-constant meromorphic function in the plane of order at most 2, normal type, and the convergence is uniform on compacta in $\mathbb{C}$ with respect to the spherical metric.

証明： Step 1. 函数 f が finite order をもつとき。

函数 $h := (f^m)^{(\ell-1)}$ を考える。Lemma 3 より f が零点を無限個持つ場合だけを見ればよい。そのとき h は *multiple* zeros を無限個持つので、Theorem 3 を適用することでこの場合の証明は終わる。

Step 2. 函数 f が infinite order をもつとき。

このとき結果が正しくない、即ち、$f^{(\ell)}$ が Picard の除外値 1 を持つような位数無限大の有理型函数 f が存在すると仮定してみる。そして $k := \ell/m, (-1 < k < 1)$ および

$$f_n(z) := 2^{-kn} f(2^n z), \quad 1/4 < |z| < 2, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を考察する。まず、函数族 $F := \{f_n\}$ は $\{z : 1/4 < |z| < 2\}$ で normal ではありえない。実際、もし normal family であったとすれば Marty's Theorem より、それらの spherical derivatives

$$f_n{}^\sharp(z) = \frac{|(f_n)'(z)|}{1 + |f_n(z)|^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

が locally bounded :

$$\exists M > f_n{}^\sharp(z) \geq 2^{(1-k)n} f^\sharp(2^n z) > f^\sharp(2^n z), \quad 1/2 < |z| < 1.$$

これより

$$S(r, f) = \frac{1}{\pi} \iint_{|x+iy|<r} \left(f^\sharp(x+iy)\right)^2 dx\, dy = O(r^2), \quad r \to \infty,$$

つまりは $T_0(r, f) = O(r^2)$ $(r \to \infty)$ が従う。そのとき f の位数は 2 以下となり不合理。

さて今、十分大きな整数 n については $(f_n{}^m)^{(\ell)}(z) = (f^m)^{(\ell)}(2^n z) \neq 1$ $(1/4 < |z| < 1)$ である。開円板 D_0 を annulus $\{z : 1/4 < |z| < 2\}$ 内にとり、D_0 で族 F が normal でないとする。これらについて Lemma 4 を適用したとき、$(g^m)^{(\ell)}(z) \neq 1$, $z \in \mathbb{C}$ となる order ≤ 2 の a non-constant meromorphic function g が存在することになる。これは **Step 1** の考察に矛盾する。■

4 補遺 !?

この節では紙面の許す範囲で [BE] に述べられた Theorems, Corollaries の証明を紹介したい。Theorem 1 の証明は最終節にまわすとして、まずそれに必要な Lemmas を示しておく。(そのアイデアは A. Weitsman [Wei] に起源を持つ ([BE]) 。)

Lemma 1 *Let $p > 3$ be an integer and g be a transcendental meromorphic function of order less than $p-3$. Then there exist an integer $n_0 = n_0(g)$ and a sequence $R_n \in (2^{pn-2}, 2^{pn})$, $n \geq n_0$, such that the total length of the level curves $|g(z)| = R_n$ in $K_n = \{z : |z| \leq 2^n\}$ is at most $2^{pn/2}$.*

証明： 正数 R を $g(0) \neq \infty$ か $g(0) = \infty$ に応じて $R > |g(0)| + 1$ か $R > 0$ であるように選べば、任意の $\theta \in [0, 2\pi]$ に対して

$$n\left(2^n, \frac{1}{g - Re^{i\theta}}\right) \leq N\left(2^{n+2}, \frac{1}{g - Re^{i\theta}}\right) \leq T_0(2^{n+2}, g) + \max\{\log R, 0\} + c,$$

が成り立つ。ここに c は g にのみ依存する定数である。第一の不等式はふたつの個数関数 $n(r, \cdot)$, $N(r, \cdot)$ の定義 ([Ha1]) から容易に示される。次に Ahlfors-Shimizu の形での the first fundamental theorem ([Ha1, Theorem 1.4, p.12]) を適用することで第二の不等式を得る。さて、$\rho(g) < p - 3$ に注意して

$$(2) \qquad p_n(R) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(2^n, \frac{1}{g - Re^{i\theta}}\right) d\theta$$

$$\leq T_0(2^{n+2}, g) + \max\{\log R, 0\} + c \leq 2^{(p-3)(n+2)}$$

が判る。ここで the length-area principle ([Ha3, Theorem 2.1, p.29]) を適用する。そのため、閉円板 K_n 内にある level curves $|g(z)| = R$ の total length を $\ell_n(R)$ で表し、また $\beta_n = 2^{np}$, $\alpha_n = 2^{np-2}$ と置く。従う結果は

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\ell_n(R)^2\, dR}{R\, p_n(R)} \leq 2\pi\, area(K_n) = 2\pi^2\, 2^{2n}$$

である。それ故、$\exists R_n \in (\alpha_n, \beta_n)$ s.t.

$$\ell_n(R_n)^2 \leq \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} R_n\, p_n(R_n)\, 2\pi^2\, 2^{2n} \leq 2^{pn}, \quad n \geq n_0.$$

これが示すべき評価であった。■

Lemma 2 *Let $p > 3$ be an integer and f be a meromorphic function of order less than $p - 3$. Given $\varepsilon > 0$ there exists $C > 0$ such that for every component B of the set $E = \{z : |f'(z)| < C^{-1}|z|^{-2p}\}$ we have*

$$(3) \qquad \operatorname{diam} f(B) < \varepsilon.$$

Here diam S *denotes the (Euclidean) diameter of a set $S \subset \mathbb{C}$.*

証明： 函数 $g = 1/f'$ に対して Lemma 1 を適用する。このとき f と g の位数は一致している ([Whi])。必要ならば Lemma 1 で選んだ n_0 を更に大きくとれば、

$$(4) \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^{np/2} + 2\pi\, 2^n}{R_n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

それ故に

$$(5) \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{R_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。各整数 $n \geq n_0$ について集合 $V_n := \{z : |z| < 2^n, |g(z)| > R_n\}$ を考え、その和を V と置く： $V = \cup_{n=n_0}^{\infty} V_n$. このとき ∂V は level curves $|g(z)| = R_n$ の K_n 内にある arcs のいくつかと、その上では $R_n \leq |g(z)| \leq R_{n+1}$ が成り立つような円弧 $|z| = 2^n$ のいくつかで構成されている。ここで Lemma 1 と (4) とを用いて

$$(6) \qquad \int_{\partial V} |g(z)|^{-1} |dz| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^{np/2} + 2\pi\, 2^n}{R_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る。円周 $|z| = 2^{n_0}$ 上に g の poles は存在しないと仮定しても一般性は失なわれない。このとき定数 $C > 1$ を、集合 $E = \{z : |g(z)| \geq C|z|^{2p}\}$ が

- $E \cap \{z : |z| = 2^{n_0}\} = \emptyset$;
- 円板 $\{z : |z| < 2^{n_0}\}$ 内にある E の component B の何れについても (3) は成り立つ

という性質を持つように選んでおく。次に

$$E \cap \left\{ z : |z| \geq 2^{n_0} \right\} \subset V$$

であることを示す。実際、$z \in E$, $|z| \geq 2^{n_0}$ に対して、$2^{n-1} \leq |z| < 2^n$ なる $n \geq n_0$ がある。このとき $|g(z)| > C|z|^{2p} \geq |z|^{2p} \geq 2^{2p(n-1)} \geq R_n$ であり、$z \in V_n \subset V$ となる。

今 V の components のうちで、 E の a component $B \subset \{z : |z| > 2^{n_0}\}$ を含んでいるものを D とする。任意の二点 $z_1, z_2 \in B$ について、それらを結ぶ線分 L を考える。もし $L \subset D$ ならば $\gamma := L$ とし、$L \not\subset D$ であれば以下のように a curve γ を選ぶ： $a, b \in \partial D$ について線分 $[a, b] \subset L$ が $(a, b) \subset \mathbb{C} \backslash D$ であるとする。まず、a と b とをつなぐ ∂D の a bounded arc を (a, b) で置き換える。この手続きを $L \setminus D$ の各線分について行い、必要ならば一部を切り取って z_1 と z_2 とを結ぶ a simple curve γ が得られる。この γ の D 内にある部分はすべて L の線分であり、とくに $2^{n-1} \leq |z| \leq 2^n$ 内にあるものの union を T_n で表すと、$z \in T_n$ に対しては $|g(z)| \geq R_n$ である。従って、(5) と (6) から

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq \int_{\gamma} |g(z)|^{-1} |dz| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{T_n} |g(z)|^{-1} |dz| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{R_n} < \varepsilon \end{aligned}$$

を得る。これですべての components B について (3) が成り立つことが示された。■

4.1 Theorem 1 から Theorem 1' へ

いま考察している函数 f に対して、次の性質を持つ an indirect singularity U over a が存在したとしよう：$\exists r > 0$ s.t. $V := U(r) \setminus f^{-1}(a)$ contains no critical points. 既出 (§2 (A)) Denjoy-Carleman-Ahlfors' Theorem を念頭に置き、$A := D(r,a) \setminus \{a\}$ 上には direct singularities は存在していないと仮定する。このとき、写像

(1) $$f : V \to A$$

は an asymptotic value $a' \in A$ を持つ。実際、もしそうでなかったとすれば (7) は covering である。そして円環領域 A の基本群は $\mathbb{Z}$ なので、V のそれは $\mathbb{Z}$ 又は trivial である。前者の場合、V が degenerate annulus であり a は $U(r)$ 内の asymptotic value ではあり得ないので不合理。後者の場合では (7) が、それ故 $f : U(r) \to A$ もまた universal covering である。これからも U が an indirect singularity over a であることへの矛盾が生じる。

さて、こうして存在の保証された asymptotic value $a' \in A$ について、それに対応する (indirect) singularity U' は近傍 $U'(r') \subset V$ を持つ。ここに Theorem 1 の主張を適用すれば critical points $z_k \in U(r)$ で $f(z_k) \neq a$ を満たすものの存在が示される。■

4.2 Corollaries の証明

上に述べたことから次の結果を得る：

Corollary 1 *If f is a meromorphic function of finite order and a is an asymptotic value of f, then a is a limit of critical values $a_k \neq a$ or all singularities of f^{-1} over a are logarithmic.*

証明： いま a singularity U over a が indirect ならば、Theorem 1' により $a_k \to a$ となるような critical values $a_k \neq a$ が存在する。以下 U は direct singularity とする。Theorem 1' の証明の際すでに確かめておいたことは、写像 $f : V \to A = D(r,a) \setminus \{a\}$ は covering であって、V の基本群が $\mathbb{Z}$ ならば U は logarithmic singularity over a となるのに対して、それが trivial であれば $f : U(r) \to A$ が universal covering となることであった。後者は起こり得ないので、この証明が終わる。■

つぎに Corollary 2 (§3.2) を確かめる。(勿論、Corollary 3 (§1) は証明不要である。)

Corollary 2 の証明： もし an asymptotic value $a \in \bar{\mathbb{C}}$ が $a \notin E'$ を満たせば、Corollary 1 により $\exists$ logarithmic singularity over a が保証される。まず f の order ρ が 1/2 以上 ($\Leftrightarrow 2\rho \geq 1$) ならば、Denjoy-Carleman-Ahlfors' Theorem (A) により direct singularities 全体の個数さえもが 2ρ 以下であることが分かっていた。一方、$\rho < 1/2$ のときには logarithmic singularity は存在し得ない。もし $\exists$ logarithmic singularity over $a \in \bar{\mathbb{C}}$, 即ち $f : U(r) \to D(r,a) \setminus \{a\}$ が universal covering となったとすると、$U(r)$ は非有界な単連結領域である。簡単のために $a = \infty$ としておいても構わない。このとき、

$$\exists R > 0 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} R < |f(z)| < \infty & \text{for } z \in U(r)\,; \\ |f(z)| = R & \text{for } z \in \partial U(r) \end{cases}$$

である。それ故、

$$u(z) := \begin{cases} \log(\,|f(z)|/R\,) & \text{for } z \in U(r) \\ 0 & \text{for } \mathbb{C} \setminus U(r) \end{cases}$$

で定められた函数 $u(z)$ は $\mathbb{C}$ で subharmonic である。そして u は $\partial U(r)$ 上では有界であるから古典的な Wiman's theorem を、或いは Theorem 1 の証明において主要な役割を果たす the subharmonic version of the Denjoy-Carleman-Ahlfors theorem ([Ha2, Theorem 8.9, p.562]) を用いて、subharmonic function $u(z)$ の order:

$$\rho(u) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \sup_{|z|=r} |u(z)|}{\log r} \;(\leq \rho\,),$$

が 1/2 以上であることが示される。この矛盾により証明が完了する。■

4.3 Theorem 1 の証明

証明は背理法による。仮定するのは、a が an asymptotic value, U は an indirect singularity over a で、或 $R_0 > 0$ に対して $U(R_0)$ は如何なる critical points も含まず、また $0 \notin U(R_0)$ であること。更には $a = 0$ としても一般性は失われない。このとき次のような objects が帰納的に構成できる：

- $\{a_n\}$, a sequence of asymptotic values s.t. $R_0/2 > |a_1| > |a_2| > \cdots$;
- $\{G_n\}$, a sequence of disjoint simply connected domains $\subset U(r_0/2)$ s.t. f is univalent in G_n, $D_n = f(G_n)$ is a disk, $0 \notin \overline{D_n}$;
- $\{\Gamma_n\}$, a sequence of asymptotic curves, $\Gamma_n \subset G_n$, s.t. $f(\Gamma_n)$ is a straight line segment, $\lim_{z\to\infty,\ z\in\Gamma_n} f(z) = a_n$.

実際、$\forall k < n$ に対して a_k, G_k, Γ_k が既に構成できたとして：

i) $R_n > 0$ を $R_n < |a_{n-1}|$ ($n = 1$ のときには $R_1 < R_0/2$) で、$U(R_n) \cap G_k = \emptyset$ ($\forall k < n$) となる様に選ぶ (これは $0 \notin \overline{D_k} = \overline{f(G_k)}$ による)。次に $a = 0$ としたので $f(z_n) = 0$ なる点 $z_n \in U(R_n)$ がとれる。勿論、仮定から $f'(z_n) \neq 0$ であり、f^{-1} のひとつの branch φ で

$$\varphi(w) = z_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_m w^m, \quad c_m \neq 0$$

となるものが存在する。この series の収束半径を r_n と置くと、

$$0 < r_n < R_n \tag{7}$$

が示される。もし $r_n \geq R_n$ であったならば、$A = \varphi(\{w : |w| < R_n\})$ は $f^{-1}(\{w : |w| < R_n\})$ の $U(R_n)$ と共通な点 z_n を含む component として $A = U(R_n)$ であるが、 f が $U(R_n)$ で univalent であることは仮定に矛盾する。

ここで φ の singular points のひとつを $a_n := r_n e^{is_n}$ とすると、$|a_n| = r_n < R_n < |a_{n-1}| < \cdots < R_0/2$ である。

ii) 円板

$$D_n := \left\{ w : \left| w - \frac{2r_n}{3} e^{is_n} \right| < \frac{r_n}{3} \right\}$$

を考えると、φ は $\overline{D_n} \setminus \{a_n\}$ 上 holomorphic であり、また $0 \notin \overline{D_n}$ である。

そこで $G_n := \varphi(D_n)$ と置くと、G_n は $\mathbb{C}$内の単連結領域で、境界はひとつの解析曲線より成りその両端は無限遠点にまでのびている。そして $G_n \subset U(R_n)$ であるから、$G_n \cap G_k = \emptyset$ $(\forall k < n)$ である。

iii) 線分

$$L_n := \left\{ w = te^{is_n} : \frac{2}{3} r_n \leq t < r_n \right\} \subset D_n$$

を考えて、$\Gamma_n = \varphi(L_n)$ と置く。

以上が $\{a_n\}$, $\{G_n\}$, $\{\Gamma\}$ の構成法である。以降、どの様にして矛盾が導かれるかを概説する。

最初に、$f(z) \to n$, $z \in \Gamma_n$ に於ける収束の速さに関する評価：

CLAIM: *For all n with at most $4p+2$ exceptions,*

$$\liminf_{z\to\infty,\ z\in\Gamma_n} |f(z) - a_n|\, |z|^{2p+1} = 0\,. \tag{10}$$

（$p > 3$ は $\rho(f) < p - 3$ を満たす整数。）

が、the Ahlfors distortion theorem (*cf.* [Tsu, 定理 XVIII. 24]) を等角写像 $f : G_n \to D_n$ に適用することで導かれる。これにより次を導く：

CLAIM: *For every n, $\exists$ a sequence $z_{n,j} \in \Gamma$, $z_{n,j} \to \infty$, s.t.*

$$|f'(z_{n,j})| \leq |z_{n,j}|^{-2p-1}\,. \tag{12}$$

これを応用すべく

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \min\Big\{ |a_i - a_j| : 1 \leq i < j \leq 2p \Big\}$$

とすると $\varepsilon < R_0/8$ である。このとき Lemma 2 からこの ε に対応する定数 $C > 0$ を得る。点 ${z_n}^* = z_{n,j(n)}$ を

$$|{z_n}^*| \geq C \quad \& \quad |f({z_n}^*) - a_n| < \varepsilon, \qquad 1 \leq n \leq 2p, \tag{13}$$

と成るように選べば、

(14) $$|f(z_n{}^*) - f(z_k{}^*)| > 2\varepsilon, \qquad 1 \le n < k \le 2p,$$

(15) $$|f(z_n{}^*)| + \varepsilon < \frac{3}{4}R_0, \qquad 1 \le n \le 2p$$

である。また (12) と (13) から

(16) $$|f'(z_n{}^*)| < C^{-1}|z_n{}^*|^{-2p}, \qquad 1 \le n \le 2p$$

を得る。集合 $\{z : |f'(z)| < C^{-1}|z|^{-2p}\}$ の components で、$z_n{}^*$ を含むものを B_n とすれば、Lemma 2 より

(17) $$\operatorname{diam} f(B_n) < \varepsilon, \qquad 1 \le n \le 2p$$

であり、(15) により $f(B_n) \subset \{w : |w| < 3R_0/4\}$ である。しかし $U(R_0)$ は $U(R_0) \cap B_n \ni z_n{}^*$ を満たす $f^{-1}(\{w : |w| < R_0\})$ の component であるから、

(18) $$\overline{B_n} \subset U(R_0), \qquad 1 \le n \le 2p$$

となる。このようにして、(14) と (17) から $\{B_n\}$ は互いに disjoint であると解る。

さて、関数

$$u(z) := -\log|f'(z)| - 2p\log|z| - \log C$$

を考える。これは $U(R_0)$ で subharmonic であり、$\{B_n\}$ は集合 $\{z \in U(R_0) : u(z) > 0\}$ の components に一致し、また $z \in \partial B_n$ に対しては $u(z) = 0$ を満たす。ここに Corollary 2 の証明の際に述べた the subharmonic version of Denjoy-Carleman-Ahlfors theorem を適用することで

$$p \le \rho(u) \le \rho(f') = \rho(f) < p - 3$$

が従い、求めていた矛盾に至る。■

参考文献

[B] W. Bergweiler, Iteration of meromorphic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 151–188.

[BE] W. Bergweiler and A. Eremenko, On the singularities of the inverse of a meromorphic function of finite order, *Rev. Mat. Iberoamericana* **11** (1995), 355–373.

[E] A. Eremenko, The set of asymptotic values of a meromorphic function of finite order, *Math. Notes* **24** (1979), 914–916.

[FHP] G. Frank, W. Hennekemper, and G. Polloczek, Über die Nullstellen meromorpher Funktionen und deren Ableitungen, *Math. Ann.* **225** (1977), 145–154.

[Ha1] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[Ha2] W. K. Hayman, *Subharmonic functions*, Vol. 2. Academic Press, 1989.

[Ha3] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, 2nd edition, Cambridge, 1994.

[He] M. Heins, Asymptotic spots of entire and meromorphic functions, *Ann. of Math.* **66** (1957), 430–439.

[I] F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. *Thèse, Helsingfors*, 1914.

[L1] J. K. Langley, Proof of a conjecture of Hayman concerning f and f'', *J. London Math. Soc.* (2) **48** (1993) 500–514.

[L2] J. K. Langley, On the zeros of the second derivative, *Preprint*

[N] R. Nevanlinna, *Analytic functions*, Springer-Verlag, 1970.

[P1] X. Pang, Bloch's principle and normal criterion, *Science in China* **32** (1989), 782–791.

[P2] X. Pang, On normal criterion of meromorphic functions, *Science in China* **33** (1990), 521–527.

[To] K. Tohge, Meromorphic functions which share the value zero with their first two derivatives, II, *XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium, Proceedings of the International Conference held in Joensuu, Finland, August 1-5, 1995*, Editors: I. Laine - O. Martio, de Gruyter, 1996, 269–278.

[Tsu] 辻　正次,　複素函数論,　槙書店、１９６８年

[V] L.I. Volkovyskii, Research on the Type Problem of a Simply Connected Riemann Surface, *Proc. Steklov Math. Inst., Acad. Sci. USSR.* **34**, 1950.

[Wei] A. Weitsman, A theorem on Nevanlinna deficiencies, *Acta Math.* **128** (1972), 41–52.

[Whi] J.M. Whittaker, The order of the derivative of a meromorphic function, *J. London Math. Soc.* **11** (1936), 82–87.

[Z1] L. Zalcman, A heuristic principle in complex function theory, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 813–817.

[Z2] L. Zalcman, Normal families revisited, in *Complex Analysis and related topics*, J. Wiegerinck, ed., Univ. of Amsterdam, 1993, 149–164.