数理解析研究所講究録
988 巻 1997 年 80-87

RUBEL の問題について (BERGWEILER の仕事から)

日本工業大学　　石崎　克也　(KATSUYA ISHIZAKI)

本講究録で登場する函数達は特に断ない限り、$\mathbb{C}$ 上で有理型な函数とします。多項式を係数とする函数 f の微分多項式を $P(z,f,f',\ldots,f^{(n)})$ として、微分方程式

$$(1)\qquad P(z,f(z),f'(z),\ldots,f^{(n)}(z))=0$$

を考えます。一般の代数的微分方程式 (1) が有理型な解を持つとして、それらの解達の位数がどのくらい制限を受けるのかという問題 (e.g., Ishizaki [7], Ishizaki and Yanagihara [8]) は複素微分方程式の研究においては永遠のテーマなのですが (後述)、ここではその特別な場合に複素力学系の定理の応用として Bergweiler があたえたアプローチの一つを紹介します。また、函数の増大度を測る値分布論的なものは Hayman [6], Laine [9], Nevanlinna [10], Rubel [12] などを参照下さい。

Definitions and Ruble's Problems

Differentially algebraic. 函数 f が DA (*differentially algebraic*) とは、ある微分多項式があって (1) の形の微分方程式を満たすことである。

函数が DA でないとき、*hypertranscendental* (*or transcendentally transcendental*) と言います。

ある函数が DA であるかどうかを判定する条件を調べることはそれ自体興味深いものであるが、ここでは一つの DA でない条件を紹介しておきます (Rubel [13])。

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 34-02, 30D35.
Key words and phrases. Algebraic differential equation, Iteration of entire functions, Nevanlinna theory.
This work was supported in part by a Grant-in-Aid for General Scientific Research from the Ministry of Education, Science and Culture 07740127 and by a Grant from NIPPON Institute of Technology 102.

増加自然数列 $\{n_k\}$ に対し$\Delta_k = n_{k+1} - n_k$とし、$\Delta_k \geqq n_{d(k)}$を満たす整数が存在すればその最大のものをあらためて $d(k)$ と書き、もしも存在しないときは 0 とする。整函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k} z^{n_k}$, $f_{n_k} \in \mathbb{C}$ は $\lim_{k\to\infty} d(k)/k = 1$ の仮定の下に DA でない。

函数の族 $\mathcal{F}$が uniformly differentially algebraic (or coherent) とは、$\mathcal{F}$の全ての函数 fが DA でそれを与える微分方程式として同じものをとれることである。

ここで取り上げる Rubel の問題は DA に関する問題で：

Problem (27)[1]**.** *Does there exist a transcendental entire function whose iterates are uniformly differential algebraic*

これに対する Bergweiler [3] の解答は「No」です。勿論、多項式に関しての結果としてはuniformly differential algebraic なものは存在します。例えば、$f(z) = z^m$, $m \geqq 2$, 整数については任意の n について f^nは微分方程式

$$zg''g - z(g')^2 + g'g = 0$$

を満たす。

Poincaré function

整函数 fに対し、$\lambda = f'(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ とするとき、函数方程式（Schröder)

(2) $$\varphi(\lambda z) = f(\varphi(z)),$$

を満たす、$\varphi(0) = \zeta$なる整函数φ のことを fのζにおける *Poincaré function* と言います。

Rubel の問題と Poincaré function を結びつける性質は、次の 3 つの定理から浮き上がってきます。

Theorem A. 整函数 fが *repelling* な *fixed point* ζを持てば、ζにおける *Poincaré function* が存在する。

[1]このアブストラクトを通じて登場する Problem 番号は Rubel [12], [13] に準じるものです。

Theorem B (Bergweiler [2]). 超越的整函数 f は *2* 以上の整数 n に対して *prime period* n の *repelling* な *perodic point* を無限個持つ。

以下、この講究録の中では整函数 f は repelling fixed point を持つと仮定しておきます。

Theorem C (Boshernitzan and Rubel [5]). 整函数 f の *Poincaré* 函数 φ が *DA* であることの必要十分条件は f の *Iteration* の族 $\{f^k\}$ が *uniformly differentially algebraic* であることである。

以上の定理をふまえて、次の定理を示すことで Rubel の問題の解答を与えることになります。

Theorem 1. *Poincaré function to transcendental entire functions are hyper-transcendental.*

Sketch of the proof

Theorem 1 の証明のアイデアは大きく分けて２つです。一つは定義の式 (Schröder equation (2)) から Poincaré function の整函数としての位数を評価することとであり、もう一つは Poincaré function の満たす "最小の" 微分方程式を (1) から導くことです。両者の比較によって証明は完結されます。後者の方法は古典的な Ritt によるものですが、かなり複雑です。結局最後は Steinmetz's factorization Theorem を用いるところとなります。

Poincaré function の整函数としての位数を評価を与える Lemma は以下の通りです。

Lemma 2. *Poincaré functions to transcendental entire function have infinite order.*

Ritt [11] の函数方程式の取り扱いを紹介するためには代数的微分方程式 (1) の rank を定義する必要があります。f を整函数、$n \in \mathbb{N}$, $r_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1$, 2, ... , n. Multindex $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ については $n = 1$ のとき以外は $r_n \neq 0$

としておきます。*Differentialmonomial*を $M_r[f]$ で表記し[2]

$$M_r[f] = (z) = (f'(z))^{r_1}(f''(z))^{r_2}\cdots(f^{(n)}(z))^{r_n}$$

を *rank*が rの differential monomial というように定義します。さらに、ここでは

$$d(r) = |r| = r_1 + r_2 + \cdots + r_n, \quad w(r) = r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n$$

で、*degree* $d(r)$ と *weight* $w(r)$ を定義します。2つの multiindices $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $q_m r_n \neq 0$ について順序を入れます。$m < n$ ならば $q < r$とし、$m = n$ のときはある $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ があって $q_k < r_k$, $q_j = r_j$ for $k < j \leq n$ が成り立つとき $q < r$とします。*Differentialpolynomial*

$$\Omega[f](z) = \sum_{q \leq r} a_q(z, f(z)) M_q[f](z), \quad a_r(z, f) \not\equiv 0$$

の rank を rとします、ここで $a_q(z, f)$ は z, fの多項式です。$\Omega(z) = 0$ で定義される微分方程式の rank は同じように rとします。

Steinmetz [15] の定理はよく知られているように：

Lemma 3. *Let* $F_0, F_1, \ldots, F_m$ *be meromorphic functions, at least one of which is not identically* 0. *Further let* $h_0, h_1, \ldots, h_m$ *be meromorphic functions, at least one of which is not identically* 0. *Suppose* g *is a nonconstant entire function such that, for a constant* $K > 0$ *and a sequence* $\{r_j\}$, $r_j \to \infty$,

$$\sum_{i=0}^{m} T(r_i, h_i) \leqq KT(r_j, g) \quad \textit{for each } j.$$

If there holds

$$F_0(g)h_0 + F_1(g)h_1 + \cdots + F_m(g)h_m = 0,$$

then there are polynomials $P_0, P_1, \ldots, P_m$, *at least one of which is not identically* 0, *such that*

$$P_0(g)h_0 + P_1(g)h_1 + \cdots + P_m(g)h_m = 0.$$

Further, there are polynomials $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$, *at least one of which is not identically* 0, *such that*

$$F_0Q_0 + F_1Q_1 + \cdots + F_mQ_m = 0.$$

[2] $M_{(0)}[f] = 1$ としておきます

証明のあらすじ：

Poncaré function φ が DA とする。即ち、φ がある代数的微分方程式

$$P(z, \varphi(z), \varphi'(z), \ldots, \varphi^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

を満たすとする。(3) と (2) を連立させてφ の新しい方程式を構成する。このとき、この新しい方程式は一般には $M_r[\varphi]$ の係数はφ の函数として超越的でないとはいえない。超越的なものが一つでも含まれている場合は Steinmetz の定理を用いて、さらに新しい方程式を構成する。rank の最小なものをこれらの方程式から導き出すと、最終的には Schwarzian DE

$$\{\varphi, z\} = A(\varphi(z))\varphi'(z)^2 \tag{4}$$

が登場する、ここで $A(x)$ は x の多項式。(4) の解が有限位数であることを示して、Lemma 2 に対する矛盾を出す。

途中の計算と評価はかなりテクニカルですので、詳細は Bergweiler [3, pp 261–266], Ritt [11] を参照して下さい。

Other Problems on DA

ここでは、Rubel [13] に書き残されている DA に関する問題をあげておきます。この他に多変数函数へ DA の定義を拡張したときに生じる問題などが上記の論文に含まれています、興味のある方は参照してください。

Problem (51). *What does Nevanlinna theory look like if we restrict it to DA entire or meromorphic functions?*

Problem (52). *Does there exist a DA entire function of non-rational order, say π or $\sqrt{2}$?*

Problem (53). *How about the defects of a DA entire or meromorphic function? Can $\delta(a, f) = 1/\sqrt{2}$ say, for such a function?*

Problem (54). *Suppose f is a DA meromorphic function. Can we write $f = g/h$ where g and h are DA entire functions?*

Problem (58). *Suppose f and g are entire and DA and suppose that $h = f/g$ is entire. Can we find a non-trivial entire and DA function k so that gk is "simpler" than fk?*

Problem (59). *Does there exist an entire function f such that $f(z^2)/f(z)$ is DA, but $f(z)$ is not DA?*

函数方程式、代数的微分方程式の解となる函数の複素力学系に関するものに Becker and Berigweiler [1], Bergweiler and Terglane [4] などがあります。解の存在、位数などに関しては Laine [9] などを参照下さい。

Admissible Solutions

最後に、冒頭で簡単に述べた複素函数方程式論からの問題意識を述べておきます。微分方程式 (1) を一般化した方程式

$$(5) \qquad \Omega(z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)) = \sum_{i \in I} a_i(z) f^{i_0} (f')^{i_1} \cdots (f^{(n)})^{i_n} = 0$$

ここで、$i = (i_0, i_1, \ldots, i_n)$ は multi-index で Iは有限個の multi-indices の集まりとします。$a_i(z), i \in I$は有理型な函数で超越函数でもよく、最高 rank の monomial の係数は 1 と仮定しておきます。方程式 (5) を満たす有理型函数 fがあってそれが admissible solution であるとは, $T(r, a_i) = S(r, f), i \in I$が成り立つことと定義します。勿論、admissible solution はひとつとは限らないわけですが、admissible solutions の列 f_j, $j = 1, 2, \ldots$, で、$T(r, f_j) = S(r, f_{j+1})$ を満たすものがあるかという問題は興味深いものです。すでに読者は気づきかれていることと思いますが（Clunie の定理：ふたつの超越整函数 g, h に関して $T(r, g) = S(r, h(g))$ を考慮して）Rubel の問題はこの問題の特別な場合について出題されたものであります。当初より、かかる admissible solution の列は無いのではないかと予想されます。予想の根拠は以下に述べるいくつかの予想（一般には小生の知る限り未解決、部分的な解決などは、Steinmetz, V Rieth, などによる）に起因しています。

Problem 01. 方程式 (5) が *admissible solution* fを持つとする。fに対して *small* な函数 $a(z)$ が$\delta(0, f - a) > 0$ または$\theta_n(0, f - a) > 0$ であることの十分条件は、

$a(z)$ が (5) の解であることである。ここで、$N_{(n+1)}(r,1/g)$ は重複度 $n+1$ 以上の gの零点を数えたもので$\theta_n(0,g) = \liminf_{r\to\infty} N_{(n+1)}(r,1/g)/T(r,g)$ である。

Nevanlinnaの不足度についてのsmallな函数についての拡張はSteinmetz [16] によって完全に解決されましたが、第2主要定理自身はいまだ拡張された結果は得られていません。微分方程式で拘束された函数達の間には次の関係が予想されます。

Problem 02. 方程式 (5) が *admissible solution* fを持つとする。fに対して *small* な異なる函数 $a_j(z)$ $j = 1, 2, \ldots, q$に対して

$$\sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + \sum_{j=1}^{q} N_{(n+1}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \leqq 2T(r,f) + S(r,f).$$

References

1. Becker, P.-G. and W. Bergweiler, *Hypertranscendency of conjugacies in complex dynamics*, Math. Ann. **301** (1995), 463–468.
2. Bergweiler, W., *Periodic points of entire functions: proof of a conjecture of Baker*, Complex Variables Theory Appl. **17** (1991), 57–72.
3. ———, *Solution of a problem of Rubel concerning iteration and algebraic differential equations*, Indiana Univ. Math. Jour. **44** (1995), 257–267.
4. Bergweiler, W and N. Terglane, *Weakly repelling fixpoints and the connectivity of wandering domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 1–12.
5. Boshernitzan, M and L. A. Rubel, *Coherent families of polynomials*, Analysis **6** (1986), 339–389.
6. Hayman, H. K., *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
7. Ishizaki, K., *Deficient and ramified small functions for admissible meromorphic solutions of some differential equations*, Complex Variables Theory Appl. **13** (1990), 173–183.
8. Ishizaki, K. and N. Yanagihara, *On admissible solutions of algebraic differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj **38** (1995), 433–442.

9. Laine, I., *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. Gruyter, Berlin–New York, 1992.

10. Nevanlinna, R., *Analytic Functions*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

11. Ritt, J. F., *Transcendental transcendency of certain functions of Poincaré*, Math. Ann. **95** (1925/26), 671–682.

12. Rubel L. A., *Some research problems about algebraic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 43–52.

13. ——, *Some research problems about algebraic differential equations II*, Illinois Jour. Math. **36** (1992), 659–680.

14. ——, *Entire and meromorphic functions*, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1995.

15. Steinmetz, N., *Über faktorisierbare Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Math. Z. **170** (1980), 169–180.

16. ——, *Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 134–141.

Department of Mathematics NIPPON Institute of Technology, 4-1 Gakuendai Miyashiro Minamisaitama Saitama 345 JAPAN