数理解析研究所講究録
991 巻 1997 年 103-107



# Association schemes with a prime number of points

九大数理研　平坂　貢　(Mitsugu Hirasaka)

**主定理 1** $\mathcal{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を可換なアソシエーションスキームで、$|X|$ が素数と仮定する。もし *valency* が 3 の *relation* が存在するならば、$\mathcal{X}$ は *valency* が 3 の *cyclotomic scheme* と同型である。

「素数位数の群は巡回群のみである。」このことはごく簡単な結果であるが、上の群をアソシエーションスキームに置き換えると、どうなるか？というのがそもそもの動機である。このことは「translation」という群の作用を仮定した対象に限定すれば、群の場合と同様に、cyclotomic scheme と同型という結果が得られるが（[5],p.66, 参照)、「translation」を仮定しないと問題は極めて厄介なものになる。実際、$|X|=19$ で、nontranslation scheme の存在が認められていて（[8], 参照)、$|X|$ が大きくなるにつれ、$d=2$ のアソシエーションスキームの同型類も飛躍的に大きくなるものと予想される。このことは組み合わせ的見地から見た困難さを物語っていて、translation と nontranslation の境界を明白にすることの意義を立証するものである。

今回の主定理は valency が十分小さいときの素数点上のアソシエーションスキームの一意性を述べたものであるが、valency が 4 以上のときどうなるかは今後の研究課題である。勿論、$|X|=19$ のときに nontranslation scheme が存在しているので、上限は存在するのだが、これは $d=2$ の場合なので、この diameter と valency との関わり合いも注目すべき点である。

以上は構造定数も含めた組み合わせ構造に関する議論であるが、構造定数のみを考えることも興味深い。例えば $d=2$ のアソシエーションスキームの構造定数は一意に決まる。$d\geq 3$ に関しては未解決である。しかし $d=3$ のときは $k_1=k_2=k_3$ を仮定すると、構造定数は一意という結果（[7], 参照）が示されているので、$k_1=k_2=k_3$ ということを $|X|$ が素数という条件から導けないか、と模索中である。

用語の定義は今から述べるが、詳しくは [2],[5] を参照されたし。

**定義 1** $X$を有限集合として、$R_i$ $(i=0,\ldots,d)$ を$X\times X$の部分集合とする。各$R_i$に関する$X$の元で順序付けられた隣接行列$A_i$を次のように定義する。

$$(A_i)_{xy} := \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y)\in R_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

次に述べる条件i),ii),iii),iv) を満たすとき$\mathcal{X}=(X,\{R_i\}_{i=0,\ldots,d})$ はアソシエーションスキームと呼ばれる。

i) $A_0=I$, ただし$I$は単位行列。
ii) $A_0+\ldots+A_d=J$, ただし$J$は成分がすべて1の行列。
iii) 任意の$i$に対して、${}^tA_i=A_{i'}$となるような$i'\in\{0,1,\ldots,d\}$が存在する。
iv) 任意の$i,j$に対して、次が成り立つ。

$$A_iA_j=\sum_{h=0}^{d}p_{ij}^hA_h.$$

さらに、$\mathcal{X}$が次のv) を満たすとき、可換であるという。

v) 任意の$i,j\in\{0,1,\ldots,d\}$に対して、$A_iA_j=A_jA_i$.

$\mathcal{X}$が次のvi) を満たすときに対称であるという。

vi) 任意の$i\in\{0,1,\ldots,d\}$, $A_i^t=A_i$.

**定義 2 (Cyclotomic schemes)** $F_q$を位数が$q$の有限体とする。ただし$q$は素数冪である。$\xi$ を$F_q$の乗法群の生成元として、$K\subset F_q^*$を$\xi^d$ で生成される部分群とする。ただし$d$は$q-1$の約数である。そのとき$X=F_q$上の *cyclotomic scheme*は

$$R_i=\{(x,y)|\ y-x\in\xi^iK\}\ (1\leq i\leq d).$$

によって定義される。

**定義 3 (Translation scheme)** アソシエーションスキーム$\mathcal{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ に対して、$X$ がアーベル群の構造を持っていて、任意の*relation*$R_i$に対して、

$$(x,y)\in R_i\Longleftrightarrow(x+z,y+z)\in R_i$$

が成り立つとき *translation scheme*と呼ばれる。

それでは主定理の証明の概略を述べる。以下で、$\mathcal{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を可換なアソシエーションスキームで、$|X|$が素数と仮定する。

(*i*) 「$|X| = 7 \iff p^j_{jj} = 1$ for some $R_j$ with $k_j = 3$」を示す。
(*ii*) 「$\exists R_m$ s.t. $k_m = 3,\ p^{m'}_{mm} = 2$」を示す。

(i),(ii) より、$A_1, A_2$を$R_1, R_2$に関する隣接行列とした時、「$A_1^2 = 2A_1^t + A_2$ ただし $k_1 = k_2 = 3,\ A_2 \notin \{A_1, A_1^t\}$」を仮定してよいことが分かる。

**定義 4** $X$の元の列$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$は「$(x_i, x_{i+1}) \in R_1\ (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ かつ$(x_i, x_{i+2}) \in R_1\ (i = 0, 1, \cdots, n-2)$」を満たすときに長さnの*chain*と呼ばれる。

**定義 5** $\{B_n\}_{1\leq n}$を次の漸化式で定義された行列の集合とする。

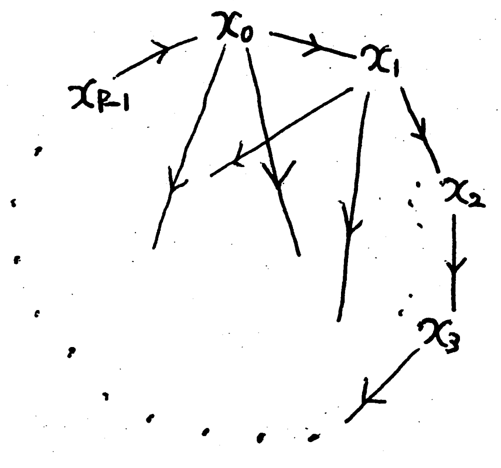
$$B_1 := A_1, B_2 := A_2, B_3 := A_1A_2 - A_1A_1^t + 3A_0$$

$$B_n := A_1B_{n-1} - A_1^tB_{n-2} + B_{n-3}, \quad n \geq 4 \tag{1}$$

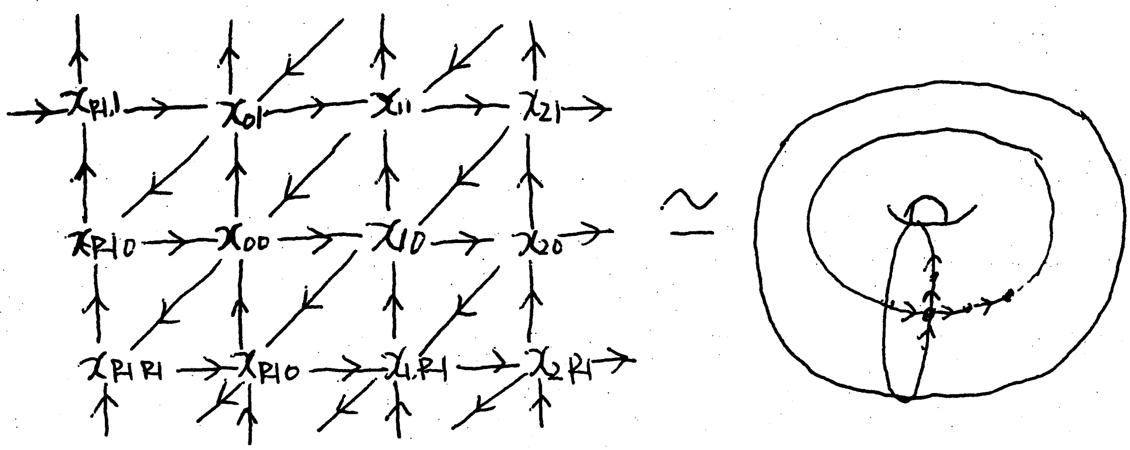
(*iii*) 「chainの長さはrelationをcharacterizeすること」を示す。すなわち、

**命題 1** $B_i\ (1 \leq i \leq n)$が単位行列でない$\mathcal{X}$の隣接行列と仮定する。そのとき次が成り立つ。
$(x, y) \in R_n \iff x$から$y$に向かう唯一つの長さnの*chain*が存在する。
ただし $R_n$は $B_n$に対応する*relation*である。

(*iv*) このchainを用いて、$R_1$-グラフの構造を決定する。$R_1$に関する連結成分は次の(a),(b)のいずれかである。
(*a*)$\{x_i\}_{0\leq i\leq p-1}$, $p$は素数。$(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}, x_0)$はchain。



$(b)\{x_{i,j}\}_{0\le i,j\le p-1}$, $p$は素数。任意の$i,j$に対して、$(x_{i,0},x_{i,1},\cdots,x_{i,p-1},x_{i,0})$, $(x_{0,j},x_{1,j},\cdots,x_{p-1,j},x_{0,j})$はchain。



$(i),(ii),(iii),(iv)$までの議論は$|X|$が素数という条件を「$\mathcal{X}$ is primitive.」かつ「$\mathcal{X}$ has no symmetric relation with odd valency.」という条件に置き換えても成り立つ。

$(v)$ $|X|$は素数なので (b)は不適。$(iii)$により、(a)はtranslation schemeである。

次の命題はすでに証明されている([5],p.66, 参照)。

**命題 2** 素数点からなる*translation scheme*は*cyclotomic scheme*である。

上の命題より、証明が終わる。

構造定数の議論についてはH.I. Blau、Z.Arad、E.Fisman、V.Miloslavsky、M.Muzychuk らが「Integral table algebra」に関する結果を出している。([1],[3],[4], 参照) Integral table algebraとは自然数の構造定数を持つ基底ではられた代数で、いくつかの条件を満たすものである。アソシエーションスキームの隣接行列ではられるBose-Mesner algebraもまたIntegral table algebraの例である。彼らは内積や整数条件を用いて結果を導いている。定義5の漸化式も彼らの論文の引用で、この漸化式を用いることで、statementをかなり平易にすることができた。

# References

[1] Z.Arad, E.Fisman, V.Miloslavsky, M.Muzychuk, On antisymmetric homogeneous integer table algebras, preprint.

[2] E.Bannai and T.Ito, Algebraic Combinatorics I:Association schemes, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.

[3] H.I. Blau, Integral Table Algebras, Affine Diagrams, Analysys of Degree Two, J. Algebra 178, 872-918 (1995)

[4] H.I. Blau, On Table Algebras and Applications to Finite Group Theory, J. Algebra 138, 137-185 (1991)

[5] A.E.Brouwer, A.M.Cohen and A.Neumaier, Distance Regular Graphs, Springer-Verlag,1989.

[6] C.D.Godsil, Algebraic Combinatorics, Champman and Hall Mathematics

[7] M.Hall, Jr. Combinatorial Theory, second edition, A Wiley-Interscience Publication.

[8] Akihide Hanaki and Izumi Miyamoto, private communication.

[9] E.Nomiyama, Classification of association schemes with at most ten vertices, Kyushu J. of Math.**49**(1995),163-195.