数理解析研究所講究録
991 巻 1997 年 141-156



# コード頂点作用素代数の表現

宮本雅彦（筑波大学数学系)

## 1 序文

頂点作用素代数（略して VOA) の概念はムーンシャイン加群のフレンケル、レポウスキー、ミュアマンによる構成とボーチャードによる考察から出発しました。頂点作用素代数は本質的には２次元共形場理論のカイラル代数となります。

最も興味ある頂点作用素代数の例はムーンシャイン加群

$$V^{\natural}=\sum_{i=0}^{\infty}V_i^{\natural}$$

で、この構成は３人の本 [FLM] の中で扱われています。一方、最も簡単な例は有理型頂点作用素代数の極小系列の最初のもの $L(\frac{1}{2},0)$ です。これは中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元一つによって生成されており、２次元イジング模型として知られています。ここで、頂点作用素代数が有理型であるという意味は、既約加群の同型類が有限個しかなく、任意の加群が既約加群の直和となることです。

例えば、イジング模型 $L(\frac{1}{2},0)$ は丁度３個の既約加群 $L(\frac{1}{2},0)$, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ と $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ を持ちます。ここで、最初の成分は中心電荷を表し、２番目の成分は最小の次数を表します。しかも、この共形場理論は古くから研究されており、テンソル積に対応すると考えられるフュージョン規則は可換で、

(1) $L(\frac{1}{2},0)$ は単位元,
(2) $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=L(\frac{1}{2},0)$,
(3) $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})=L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$,
(4) $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\times L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})=L(\frac{1}{2},0)+L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

となっていることが分かっています。
上のフュージョン規則を良く見ると、この中に２つの２次モード $\{0,1\}$ があることに気づきます。

$$\bar{h}:\begin{cases} L(\frac{1}{2},0),L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \to\ 0\\ L(\frac{1}{2},\frac{1}{16}) & \to\ 1\end{cases}\qquad \tilde{h}:\begin{cases} L(\frac{1}{2},0) & \to\ 0\\ L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \to\ 1\end{cases}$$

ムーンシャイン頂点作用素代数を始め、多くの頂点作用素代数の内部に、イジング模型を見つけることができます。特に、ムーンシャイン頂点作用素代数や、ラティスから構

成した頂点作用素代数の場合には、1個のイジング模型ではなく、イジング模型のテンソル積が見つかります。それゆえ、ここでは、互いに直交した中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元の集合 $\{e^1,\ldots,e^n\}$ でその和 $\sum_{i=1}^n e^i$ が丁度頂点作用素代数のヴィラソロ元 $\mathbf{w}$ となっているような場合を考えます。この様な頂点作用素代数の一番重要な例はムーンシャイン加群 $V^\natural$ であり、この場合はヴィラソロ元は48個の互いに直交した中心電荷 $\frac{1}{2}$ の共形元の和となっています。この様な場合、各共形元は $L(\frac{1}{2},0)$ と同型な部分頂点作用素代数を構成し、それら全体はテンソル代数

$$T\cong\otimes_{i=1}^n L(\frac{1}{2},0)$$

と同型の部分頂点作用素代数を構成します。この場合、 $T$ と $V$ は同じヴィラソロ元を持っています。 $T$-加群の構造は簡単で、既約 $T$-加群 $W$ は既約 $<e^i>$-加群のテンソル積、即ち、 $W=\otimes L(\frac{1}{2},h^i)$ と成ります。それゆえ、一般の $T$-加群に対して、 $(h^i)$ の集合を $\mathrm{lwr}(T,W)$ で表します。

このイジング模型に関して、著者は、頂点作用素代数 $V$ が有理型のイジング模型を含むと(それゆえ、中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理共形元 $e$ を含むと)位数が高々2の自己同型 $\tau_e$ が定義出来る事を示しました[M1]。自己同型は次のように定義されます。

$$\tau_e\ :\ \begin{cases} 1 & L(\frac{1}{2},0)\text{-部分加群 } U\cong L(\frac{1}{2},0)\ \text{又は}\ L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ \text{上で} \\ -1 & L(\frac{1}{2},0)\text{-部分加群 } U\cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\ \text{上で}\ . \end{cases}$$

互いに直交している共形元がある場合には、互いに可換となるので、基本2群 $P=<\tau_{e_i}\mid i=1,\ldots,n>$ を生成します。この $P$ による固定空間 $V^P$ がここで扱うコード頂点作用代数となっているのです。さらに、$P$ の各線形表現 $\chi$ に対して、その固有空間

$$V_\chi=\{v\in V\mid gv=\chi(g)v\forall g\in P\}$$

は自明でない既約 $V^P$-加群となることが知られています。それゆえ、このコード頂点作用素代数の表現を決定する事は、その様な頂点作用素代数の研究の為には重要なわけです。

これを2元コードで表示すると、我々の自己同型の定義から、$\chi$ に対してまず、2元ワード $(\tilde{h}^i)$ が

$$\chi:\tau_{e_i}\to(-1)^{\tilde{h}^i}\quad(\tilde{h}^i=0,1)$$

で定義できます。上の $V_\chi$ は $T$-部分加群 $W=\otimes L(\frac{1}{2},h^i)$ で、 $(h^i)$ における $\frac{1}{16}$ の位置が $\tilde{h}^i=1$ となる位置と一致しているようなもの全体で生成されていることが分かります。

# 2 頂点作用素代数

## 2.1 頂点作用素代数の性質

まず、頂点作用素代数の説明を始めましょう。

**定義 1** $V$ をベクトル空間とし、次の記号を使う。

$$R[[z,z^{-1}]] = \{\textstyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^{-n-1} : a_n \in R\},$$
$$R\{z,z^{-1}\} = \{\textstyle\sum_{n\in\mathbf{C}} a_n z^{-n-1} : a_n \in R\}.$$

$V$ の弱頂点作用素とは形式的ベキ級数
$v(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} v_n z^{-n-1} \in (\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]]$ であって、任意の $u \in V$ に対して、十分大きな数 $N(u) \gg 0$ を取ると、$n > N(u)$ に対して、$v_n u = 0$ となるものです。この条件があると、$Y(v,z)u$ は実際には有限和となり、$Y(v,z)$ は形式的には無限和ですが、$V$ への作用として色々な積が定義できることになります。

まず、数理物理で重要な正規積の一般形を導入しましょう。

**定義 2** $V$ をベクトル空間とし、$u(z), v(z)$ を２つの弱頂点作用素とします。任意の整数 $n$ に対して、$n$-正規積を

$$u(z)_n v(z) = Res_{z_1}\left((z_1-z)^n u(z_1)v(z) - (-z+z_1)^n v(z)u(z_1)\right).$$

で定義すると、これも又弱頂点作用素となります。ここで、２項係数 $\binom{n}{i}$、２項展開 $(z-w)$、留数 $\mathbf{Res}_z f(z)$ は形式的に

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \tfrac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 1},$$
$$(z_1+z)^n = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} {z_1}^{n-i} z^i,$$
$$\mathbf{Res}_{z_1}(\textstyle\sum a_n {z_1}^{-n-1}) = a_0.$$

と定義します。我々の記号では、一般に $(z_1+z)^n \neq (z+z_1)^n$ となることに注意してください。

頂点作用素代数を構成しようとするときに、最も基本的な結果は次の Dong の補題です。

**補題 2.1 (Dong)** *Let* $u(z), v(z), w(z)$ を $V$ の弱頂点作用素とする。もし、$u(z)$, $v(z)$, $w(z)$ の３つが互いに局所可換とすると、任意の整数 $n$ に対して $u(z)_n v(z)$ も $w(z)$ と局所可換である。また、微分 $\frac{d}{dz}u(z)$ も $v(z)$ と局所可換である。ここで、$u(z)$ と $v(z)$ が局所可換とは、

$$(z_1-z_2)^N u(z_1)v(z_2) = (z_1-z_2)^N v(z_2)u(z_1)$$

が十分大きな整数 $N$ に対して成り立つ事をいいます。

頂点作用素代数、それの加群と intertwining 作用素の定義の概略を述べておきましょう。

**定義 3** 頂点作用素代数とは $\mathbf{Z}$-次数付きベクトル空間 $V = \sum_{n\in Z} V_n$ で、各ホモジニアス空間 $V_n$ は有限次元を持ち、十分小さな $n$ に対しては $V_n = 0$ となるようなもので、各元 $v \in V$ に対して、線形に頂点作用素と呼ばれる $End(V)$ の元を係数に持つような形式的ベキ級数

$$Y(v,z) = \sum_{n\in Z} v_n z^{-n-1} \in \mathrm{End}(V)[[z, z^{-1}]]$$

が与えられており、次の条件を満たしているものである。

*(1)* 真空と呼ばれる特別な元 $\mathbf{1} \in V_0$ があって、

*(1.1)* $Y(\mathbf{1}, z) = 1_V$

*(1.2)* $v_{-1}\mathbf{1} = v$ 且つ $v_n\mathbf{1} = 0 \forall n \geq 0.$

*(2)* ヴィラソロ元と呼ばれる特別な元 $\mathbf{w} \in V_2$ があって、

*(2.1)* $\{L(n) := \mathbf{w}_{n+1}\}$ はヴィラソロ代数の生成系の関係式

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c,$$

を満たしている。ここで定数 $c \in \mathbf{C}$ は頂点作用素代数のランク（又は、中心電荷）と呼ばれる。

*(2.2)* $L(-1)$ は微分作用素となる。:

$$[L(-1), Y(v,z)] = \frac{d}{dz}Y(v,z)$$

*(2.3)* $L(0)$ は整数固有値のみをもち、$V$ はその固有空間の直和に分解する。この分解が最初の次数を与えている。

$$L(0)_{V_n} = n1_{V_n}$$

*(3)* 任意の頂点作用素は互いに（自分も込めて）局所可換が成り立つ。

$$(z-w)^N Y(v,z)Y(u,w) = (z-w)^N Y(u,w)Y(v,z)$$

**定義 4** 頂点作用素超代数とは、頂点作用素代数の拡張であり、定義の概略を述べると、まず、フォック空間は $Z/2Z$-次数付きの空間 $V^0 + V^1$ であり、$V$ は頂点作用素代数、$V^1$ はその加群であり、$V^1$ に対しては $L(0)$ の固有値に $\frac{1}{2} + Z$ まで認め、また、$v \in V^1$ に対しても頂点作用素を定義し、これは $z^{\frac{1}{2}+Z}$ のベキまでも認める。更に、局所可換の性質が局所超可換：$v \in V^i, u \in V^j$ とすると、

$$(z-w)^N Y(v,z)Y(u,w) = (-1)^{ij}(z-w)^N Y(u,w)Y(v,z)$$

が成り立つと仮定したものである。

**注釈 1** 頂点作用素代数の重要な性質を３つあげておきましょう。
最初の一つは、結合性

$$Y(v_n u, z) = Y(v, z)_n Y(u, z).$$

です。右辺は以前に定義した正規積です。これにより、頂点作用素は生成系に対して定義すると、全体の頂点作用素が定義出来ることが分かります。
２番目の性質は *skew-symmetry* :

$$Y(u, z)v = e^{zL(-1)} Y(v, -z)u.$$

です。これにより、$v$ の $u$ への作用が決まると、$u$ の $v$ への作用素が決まります。
最後の性質は不変内積 $(,)$ の存在です。ここで、不変と言う意味は、ヴィラソロ代数の原始元 $v$ （即ち、$L(0)v = kv$ で $L(r)v = 0\ \forall r > 0$）に対して、

$$(v_m u, w) = (u, v_{2k-m-2} w)$$

$$(L(n)u, w) = (u, L(-n)w)$$

が成り立つものです。これは 剰余空間 $V_0/L(1)V_1$の各元に対応して存在することが知られています。

**定義 5** 頂点作用素代数 $(V, Y, \mathbf{1}, \mathbf{w})$ の加群とは、$\mathbf{C}$-次数付きベクトル空間 $M = \oplus_{n\in C} M_n$ で、各ホモジニアス空間 $M_n$ は有限次元であり、任意の $r \in C$ に対して、十分小さな整数 $n$ を取ると、 $M_{r+n} = 0$ となる条件を満たしており、$V$ の各元 $v$ に対して、加群の頂点作用素と呼ばれる $End(M)$ の元を係数とする形式的ベキ級数

$$Y^M(v, z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} v_n^M z^{-n-1} \in (\mathrm{End}(M))[[z, z^{-1}]]$$

が線形に対応していて、以下の条件を満たすものである。
*(1)* $Y^M(\mathbf{1}, z) = 1_M$.
*(2)* $Y^M(\mathbf{w}, z) = \sum L^M(n) z^{-n-2}$ の係数 $L^M(n)$ は*:*
*(2.1)* 同じ中心電荷を持つヴィラソロ代数の生成系*,*
*(2.2)* $L^M(-1)$ は微分*:*

$$[L^M(-1), Y^M(v, z)] = Y^M(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz} Y^M(v, z),$$

*(2.3)* $L^M(0)_{M_n} = n 1_{M_n}$
などの同じ性質を満たす。
*(3)* 局所可換性
*(4)* 結合性*:*

$$Y(u_n v, z) = Y^M(u, z)_n Y^M(v, z).$$

最後の結合性は頂点作用素代数の場合には、他の条件から出てきます。特にすべての元は真空から頂点作用素によって生成されるので、頂点作用全体がきまると、元との対応が決まります。加群の場合には、この条件がないので、結合性が必要となります。

## 2.2 Intertwining 作用素

**定義 6** $(V, Y, \mathbf{1}, \mathbf{w})$ を頂点作用素代数とし、$(W^1, Y^1)$, $(W^2, Y^2)$、$(W^3, Y^3)$ を 3 つの $V$-加群とする。タイプ $\begin{pmatrix} & W^1 & \\ W^2 & & W^3 \end{pmatrix}$ の *intertwining* 作用素とは線形写像

$$\begin{array}{rccl} I(*, z): & W^2 & \rightarrow & (\mathrm{Hom}(W^3, W^1))\{z\} \\ & u & \rightarrow & I(u, z) = \sum_{n \in \mathbf{Q}} u_n z^{-n-1} \end{array}$$

で次の条件を満たすものです。
*(1)* 微分*:* $I(L^1(-1)u, z) = \frac{d}{dz} I(u, z)$.
*(2)* 局所可換性*: for* $v \in V, u \in W^2$,

$$(z - z_1)^N \{Y^1(v, z) I(u, z_1) - I(u, z_1) Y^3(v, z)\} = 0$$

*(3)* 結合性*:* $I(v^1_n u, z) = Y(v, z)_n I(u, z)$,
ここで、*Intertwining* 作用素に対する正規積 $Y(v, z)_n I(u, z)$ は

$$\mathbf{Res}_{z_1} \{(z_1 - z)^n Y^1(v, z_1) I(u, z) - (-z + z_1)^n I(u, z) Y^3(v, z_1)\}$$

で与えます。

**定義 7** $I_V \begin{pmatrix} & W^1 & \\ W^2 & & W^3 \end{pmatrix}$ でタイプ $\begin{pmatrix} & W^1 & \\ W^2 & & W^3 \end{pmatrix}$ の *intertwining* 作用素全体の集合を表す。これはベクトル空間であり、その次元を $N^{W^1}_{W^2, W^3}$ で表す。この次元を表示するために、フュージョン規則と呼ばれる次の表示を使う。

$$W^2 \times W^3 = \sum_W N^W_{W^2, W^3} W,$$

ここで、 $W$ は $V$ のすべての既約加群を動きます。

## 2.3 頂点作用素（超）代数のテンソル積

$(V^1, Y^1, \mathbf{1}^1, \mathbf{w}^1)$ と $(V^2, Y^2, \mathbf{1}^2, \mathbf{w}^2)$ を頂点作用素代数とする。$v^1 \otimes v^2 \in V^1 \otimes V^2$ に対して、$v^1 \otimes v^2$ の弱頂点作用素を

$$(Y^1 \otimes Y^2)(v^1 \otimes v^2, z) = Y^1(v^1, z) \otimes Y^2(v^2, z) \in \mathrm{End}(V^1 \otimes V^2)[[z, z^{-1}]]$$

と定義し、線形に全体に拡張すると、

$$(V^1 \otimes V^2, Y^1 \otimes Y^2, \mathbf{1}^1 \otimes \mathbf{1}^2, \mathbf{w}^1 \otimes \mathbf{1}^2 + \mathbf{1}^1 \otimes \mathbf{w}^2) \tag{3.16}$$

は頂点作用素代数となります。これを頂点作用素代数のテンソル積と呼ぶことにします。既約 $V^1 \otimes V^2$-加群はそれぞれの既約加群のテンソル積となります[DMZ]。

テンソル積の加群の間のフュージョン規則を調べてみましょう。

**定理 2.1** $V$ と $W$ を有理型頂点作用素代数とする。$V^1$, $V^2$, $V^3$ を既約 $V$-加群、$W^1$, $W^2$, $W^3$ を既約 $W$-加群とし、$N_{V^1\ V^2}^{V^3} \leq 1$ と仮定する。この時、

$$I_V \begin{pmatrix} & V^3 & \\ V^1 & & V^2 \end{pmatrix} \otimes I_W \begin{pmatrix} & W^3 & \\ W^1 & & W^2 \end{pmatrix} = I_{V \otimes W} \begin{pmatrix} & V^3 \otimes W^3 & \\ V^1 \otimes W^1 & & V^2 \otimes W^2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

**[証明]** 証明は [M1] の Proposition 4.4 とほとんど同じ論法を使う。 ∎

上の定理の系として、次の結果が得られる。

**系 2.1** $V^1$ と $V^2$ を有理型の頂点作用素とする。この時、$V^1 \otimes V^2$ も有理型である。

**[証明]** $V = V^1 \otimes V^2$ とおき、正しくないと仮定しましょう。$(W, Y^W)$ を直既約$V$-加群とする。$V$ は高々有限個の既約加群を持つので、$W$ は既約 $V$-部分加群 $W^0 = U^1 \otimes U^2$ を持ちます。$V^i \times U^i \cong U^i$ なので、$W$ のすべての既約因子は $W^0$ に同型です。故に、$W$ は部分加群の列 $0 \subseteq W^0 \subseteq \cdots \subseteq W^k = W$ で $W^i/W^{i-1} \cong W^0$ となるものを持ちます。特に、$W^i = W^{i-1} \oplus X^i$ はベクトル空間とし は分解します。$\pi$ を射影 $\pi^i : W^i \to X^i$ で $\pi(W^{i-1}) = 0$ とする。この時、$v^1 \in V^1, v^2 \in V^2$ に対して、$X^i$ に制限し、$\pi^j$ の像を取ると、

$$\pi^j Y(v^1 \otimes v^2, z) : X^i \to X^j \in \mathrm{Home}(X^i, X^j) U^j[[z, z^{-1}]].$$

が出てきます。加群の頂点作用素の性質から、上はタイプ$\begin{pmatrix} & U^1 \otimes U^2 & \\ V^1 \otimes V^2 & & U^1 \otimes U^2 \end{pmatrix}$ の intertwining 作用素となっていることが分かります。加群なので、$V^1 \times W^0 = W^0$ 且つ $V^2 \times U^0 = U^0$ は当然であり、先の定理から、$\dim I \begin{pmatrix} & U^1 \otimes U^2 & \\ V^1 \otimes V^2 & & U^1 \otimes U^2 \end{pmatrix} = 1$ が出てきます。$I(*, z) \in I \begin{pmatrix} & U^1 \otimes U^2 & \\ V^1 \otimes V^2 & & U^1 \otimes U^2 \end{pmatrix}$ をゼロでないintertwining 作用素で、$I(\mathbf{1}, z) = id_{U^1 \otimes U^2}$ とします。この時、ベクトル空間として、$W = \otimes_{i=0}^k X^i$ なので、ある $(k+1) \times (k+1)$-matrix $A$ を使って

$$Y(v, z) = A \otimes I(v, z),$$

と表示出来ます。$Y(\mathbf{1}, z) = 1_W$ より、$A$ は単位行列であり、それゆえ、$W$ は既約 $V^1 \otimes V^2$-加群の直和となっている事が分かります。 ∎

## 2.4 1次元ラティス頂点作用素超代数の研究

$L = \mathbf{Z}x$ を一次元ラティスで $\langle x, x \rangle = 1$ とする。これから、フレンケル、レポウスキー、ミュアマンの本にあるラティス頂点作用素代数の構成に従って、頂点作用素代数を構成してみましょう。$H = \mathbf{C}x$ を不変内積 $<,>$ を持つ可換リー代数と考え、それのアフィンリー代数

$$\hat{H} = H[t, t^{-1}] + \mathbf{C}k$$

を構成して、その対称テンソル代数 $M(1)$ を考える。この時、$V_L = \oplus_{a \in L} M(1)e^a$ をフォック空間とし、頂点作用素を以下の様に定義する。

$$Y(e^a, z) = exp\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}_+} \frac{a(-n)}{n} z^n\right) exp\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}_+} \frac{a(n)}{-n} z^{-n}\right) e^a z^a. \tag{2.1}$$

$$Y(a(-1)e^0, z) = \sum a(n) z^{-n-1}.$$

ここで、 $a \in H$ に対する $a(n)$ は $at^n$ の作用を表しています。他の元は正規積を使って定義する。

直接の計算より、

**補題 2.2** 十分大きな $N$ に対して、

$$\begin{array}{lll} [\sum a(n)x^{-n-1}, Y(e^b, z)] = 0 & \forall a, b \in L, & \\ (x-z)^N [Y(e^a, x), Y(e^b, z)] = 0 & \mathit{for} \ < a, b > \equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 2), \\ (x-z)^N \{Y(e^a, x)Y(e^b, z) + Y(e^b, z)Y(e^a, z)\} = 0 & \mathit{for} \ < a, b > \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 2), \end{array}$$

が成り立ちます。この関係は先に述べた超局所可換性と同じです。

この中に次の2つの直交する共形元が見つかります。 [M2]

$$\begin{array}{ll} \mathbf{w}^1 = \frac{1}{4}x(-1)^2\mathbf{1} + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) & \text{and} \\ \mathbf{w}^2 = \frac{1}{4}x(-1)^2\mathbf{1} - \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) & \end{array}$$

最初に述べたように、これらはイジング模型をそれぞれ生成し、その加群は3つしかないので、ウエイト空間の次元を計算することで、$V_L$ が $<\mathbf{w}^1> \otimes <\mathbf{w}^2>$-加群として、$\left(L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right) \otimes \left(L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right)$ に同型であることが分かります。ここで、$<\mathbf{w}^i>$ は $\mathbf{w}^i$ によって生成される部分代数を表します。 $\theta$ で $L$ 上で $-1$ の作用から誘導された

$V_L$ の自己同型とする。この固定空間 $(V_L)^\theta$ をとると、これも $\mathbf{w}^1$ と $\mathbf{w}^2$ を含む頂点作用素超代数となっています。$<\mathbf{w}^1>\otimes<\mathbf{w}^2>$-加群としの分解は次数空間の次元から、

$$(V_L)^\theta \cong \left(L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{1}{2},0)\right) \quad \oplus \quad \left(L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{1}{2},0)\right) \tag{4.8}$$

となります。さらに、部分空間 $M=\{v\in(V_L)^\theta \mid \mathbf{w}^2{}_1 v=0\}$ をとると、これはヴィラソロ元 $\mathbf{w}^1$ を持つ頂点作用素超代数であり、$<\mathbf{w}^1>$-加群として、$L(\frac{1}{2},0)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ と同型です。それゆえ、以下の定理を証明しました。[M2]

**定理 2. 2** $(M,Y,\mathbf{w}^1,e^0)$ は単純頂点作用超代数で、偶部分 $M_{\bar 0}\cong L(\frac{1}{2},0)$ と奇部分 $M_{\bar 1}\cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ を持つ。これの中心電荷は$\frac{1}{2}$ であり、正値（実数体上で構成すると）不変内積を持つ。ここで、頂点作用素はすべて $V_L$ のものを $M$ に制限して考えている。

記号を簡単にするために、$M_{\bar 1}$ の最小次数の元

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^x+e^{-x})\in M_{\bar 1} \tag{2.2}$$

を固定しておきます。直接の計算で、

$$q_{-2}q=2\mathbf{w}^1,\quad q_{-1}q=0,\quad q_0q=\mathbf{1}.$$

となることが分かります。

容易に$V_{\mathbf{Z}a}$ の中で次の対応が成り立っていることが分かります。：

$$\begin{array}{lcl} x(-1)e^0 & \in & L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x+e^{-x}) & \in & L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{1}{2},0),\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x-e^{-x}) & \in & L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}). \end{array}$$

さらに、$\frac{1}{2}(e^x+e^{-1})_{-1}(e^x-e^{-1})=x(-1)e^0$ も成り立ちます。

同様の方法で、$V_{2\mathbf{Z}x}$-加群 $W=V_{\mathbf{Z}x/2}$ とその加群頂点作用素$Y^W$ を定義出来ます。同様に (2.1) によって形式的ベキ級数$I^W(v,z)\in \mathrm{End}(W)[[z^{1/2},z^{-1/2}]]$ を$v\in V_{\mathbf{Z}x}$ に対して定義できるが、明らかに $v\in V_{2\mathbf{Z}x}$ に対しては, $I^W(v,z)=Y^W(v,z)$ である。それゆえ、$I^W(q,z)=\sum q_n z^{-n-1}$ は$u\in V_{2\mathbf{Z}x}$ に対しては$Y^W(u,z)$ と局所可換性が成り立っている。即ち、$I^W(*,z)$ はタイプ$\begin{pmatrix} & W & \\ M & & W\end{pmatrix}$ の intertwining 作用素となっているわけである。$V_{2\mathbf{Z}x}$-加群 $V_{\mathbf{Z}x/2}$ は既約 $V_{2\mathbf{Z}x}$-加群の直和

$$V_{\mathbf{Z}x/2}=V_{\mathbf{Z}x}\oplus V_{2\mathbf{Z}x+x/2}\oplus V_{2\mathbf{Z}x-x/2}$$

に分解し、$q_n$ は$\{V_{2\mathbf{Z}x+x/2}, V_{2\mathbf{Z}x-x/2}\}$ の２つを交換している。直接次数空間の次元を計算して、$V_{2\mathbf{Z}x+x/2}$ と $V_{2\mathbf{Z}x-x/2}$ は両方とも$<\mathbf{w}^1>\otimes<\mathbf{w}^2>$-加群として、$L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ に同型であることが分かる。$V_{2\mathbf{Z}x+x/2}$ と $V_{2\mathbf{Z}x-x/2}$ の最小次数の元 $e^{\frac{1}{2}x}$ と $e^{-\frac{1}{2}x}$ を固定しておこう。$M_{\bar{1}}\cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の元 $v$ に制限して、固有値 $\frac{1}{16}$ を持つ$\mathbf{w}^2$ の固有空間を考えると、$I^W(v,z)$ から、次の３つのintertwining 作用素が定義できる。

$$I^{\frac{1}{2},0}(*,z)\in I\begin{pmatrix} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & & 0\end{pmatrix},$$
$$I^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(*,z)\in I\begin{pmatrix} & 0 & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(*,z)\in I\begin{pmatrix} & \frac{1}{16} & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{16}\end{pmatrix}.$$

$M_{\bar{0}}\cong L(\frac{1}{2},0)$ に制限することで、さらに、次のintertwining 作用素を得る事もできる。

$$I^{0,0}(*,z)\in I\begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix},$$
$$I^{0,\frac{1}{2}}(*,z)\in I\begin{pmatrix} & \frac{1}{2} & \\ 0 & & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ and}$$
$$I^{0,\frac{1}{16}}(*,z)\in I\begin{pmatrix} & \frac{1}{16} & \\ 0 & & \frac{1}{16}\end{pmatrix},$$

これらは、実際 $<\mathbf{w}^1>$ の加群頂点作用素となっています。

これらを使うと、一次元ラティスの頂点作用素代数で定義した（加群）頂点作用素

$$Y(u\otimes v,z)\in \mathrm{End}(V_{(\frac{1}{2}+\mathbf{Z})x})\{z,z^{-1}\}$$

は

$$Y(u\otimes v,z)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes I^{0,\frac{1}{16}}(u,z)\otimes I^{0,\frac{1}{16}}(v,z)\qquad \text{for } u\otimes v\in L(\tfrac{1}{2},0)\otimes L(\tfrac{1}{2},0),$$
$$Y(u\otimes v,z)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(u,z)\otimes I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(v,z)\qquad \text{for } u\otimes v\in L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$
$$Y(u\otimes v,z)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\otimes I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(u,z)\otimes I^{0,\frac{1}{16}}(v,z)\qquad \text{for } u\otimes v\in L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes L(\tfrac{1}{2},0),$$
$$Y(u\otimes v,z)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\otimes I^{0,\frac{1}{16}}(u,z)\otimes I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(v,z)\qquad \text{for } u\otimes v\in L(\tfrac{1}{2},0)\otimes L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}).$$

と書けます。

**注釈 2** 定義から、
*(1)* $I^{0,*}(*,z)$, $I^{\frac{1}{2},0}(*,z)$, $I^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(*,z)$ における $z$ のベキはすべて整数であり、$I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(*,z)$ のベキは半整数 $\frac{1}{2}+\mathbf{Z}$ です。

(2) $I^W(*,z)$ は微分を満たす。
(3) $I^W(*,z)$ は局所超可換を満たす：
$v\in M_{\bar{i}}$ と $u\in M_{\bar{j}}$ に対して、

$$I^W(v,z_1)I^W(u,z_2)\sim(-1)^{ij}I^W(u,z_2)I^W(v,z_1)$$

ここで $A(z_1,z_2)\sim B(z_1,z_2)$ は十分大きな整数 $N$ に対して、,

$$(z_1-z_2)^NA(z_1,z_2)=(z_1-z_2)^NB(z_1,z_2)$$

が成り立っている事を意味する。特に、 $I^{*,\frac{1}{16}}(*,z)$ は局所超可換
$v\in M_{\bar{i}}$ と $u\in M_{\bar{j}}$ に対して、

$$I^{i/2,\frac{1}{16}}(v,z_1)I^{j/2,\frac{1}{16}}(u,z_2)\sim(-1)^{ij}I^{j/2,\frac{1}{16}}(u,z_2)I^{i/2,\frac{1}{16}}(v,z_1)$$

を満足する。

次に結合性を見てみよう。

**注釈 3** 明らかに、 $V_{2\mathbf{Z}x}=\{L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{1}{2},0)\}\oplus\{L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ であり、頂点作用素代数となる。そして、$W=V_{\frac{1}{2}x+2\mathbf{Z}x}$ は $V_{2\mathbf{Z}x}$-加群である。$L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{1}{2},0)$-加群とみて、加群頂点作用素 $Y^W$ は *(2.3)* によって、次の構造を持つ。

$$(I\otimes I)(u\otimes v,z)=\begin{cases} I^{0,\frac{1}{16}}(u,z)\otimes I^{0,\frac{1}{16}}(v,z) & \textit{for } u,v\in L(\frac{1}{2},0),\\ I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(u,z)\otimes I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(v,z) & \textit{for } u,v\in L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}).\end{cases}$$

特に、$I\otimes I$ は結合性と微分を満たす。
頂点作用素代数の構成から、$Y(*,z)$ は

$$Y(x(n)v,z)=Y(x(-1)\mathbf{1},z)_nY(v,z)$$

を満たしている事は知られており、$x(-1)\mathbf{1}\in L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の作用に対しては結合性が満たされる。さらに、正規積も結合性を満たしている。$Y(*,z)$ は当然$L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{1}{2},0)$ の作用と結合性をみたしているので、$u^1\otimes u^2\in L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ と $u^3\otimes v\in L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes L(\frac{1}{2},0)$ に対して、$V_{(\frac{1}{2}+\mathbf{Z})x}$ の作用素を以下の様に計算する。

$$\begin{aligned}
& Y((u^1\otimes u^2)_n(u^3\otimes v),z)\\
= & Y(u^1\otimes u^2,z)_nY(u^3\otimes v,z)\\
= & Res_x\{(x-z)^nY(u^1\otimes u^2,x)Y(u^3\otimes v,z)-(-z+x)^nY(u^3\otimes v,z)Y(u^1\otimes u^2,x)\}\\
= & Res_x\{(x-z)^n\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes(I\otimes I)(u^1\otimes u^2,x)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\otimes(I\otimes I)(u^3\otimes v,z)\\
& -(-z+x)^n\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\otimes(I\otimes I)(u^3\otimes v,z)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes(I\otimes I)(u^1\otimes u^2,x)\}\\
= & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}Res_x\{(x-z)^n\otimes I\otimes I(u^1\otimes u^2,x)\otimes I\otimes I(u^3\otimes v,z)\\
& +(-z+x)^n\otimes I\otimes I(u^3\otimes v,z)\otimes I\otimes I(u^1\otimes u^2,x)\}.
\end{aligned}$$

一方、$(u^1 \otimes u^2)_n(u^3 \otimes v) \in L(\frac{1}{2},0) \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ なので、

$$\begin{aligned} & Y((u^1 \otimes u^2)_n(u^3 \otimes v), z) \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes (I \otimes I)((u^1 \otimes u^2)_n(u^3 \otimes v), z) \end{aligned}$$ を得る。

$I^{*,\frac{1}{16}}(*,z)$ は$L(\frac{1}{2},0)$ の作用に対して結合性が成り立つので、$u,v \in L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ に対して、

$$I^{0,\frac{1}{16}}(u_n v, z) = I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(u,z)_n I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(v,z)$$

を得る。ここで、$I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(*,z)$ と$I^{\frac{1}{2},\frac{1}{16}}(*,z)$ の正規積は

$$a(z)_n b(z) = Res_x\{(x-z)^n a(x)b(z) + (-z+x)^n b(z)a(x)\}$$

で定義されており、これを超正規積と呼び、その他のものも超をつけて呼ぶ。例えば、$I^{h,\frac{1}{16}}(*,z)$ と $I^{k,\frac{1}{16}}(*,z)$ は超結合性

$$\begin{aligned} & I^{h+k,\frac{1}{16}}(u_n v, z) \\ & = Res_x\{(x-z)^n I^{h,\frac{1}{16}}(u,x) I^{k,\frac{1}{16}}(v,z) - (-1)^{|u||v|}(-z+x)^n I^{k,\frac{1}{16}}(v,z) I^{h,\frac{1}{16}}(u,x)\} \end{aligned}$$

を $u \in L(\frac{1}{2},h), v \in L(\frac{1}{2},k)$ で $h,k = 0,\frac{1}{2}$ となるものに対して満足する。ここでもし $v \in L(\frac{1}{2},0)$ なら $|v| = 0$ であり、$v \in L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ なら、$|v| = 1$ とする。

# 3　コード頂点作用素代数 $M_D$ と $M_D$-加群

## 3.1　コード頂点作用素代数

著者は [M2] の中で 任意の偶線形２元コード $D$ に対して、イジング模型を使って頂点作用素代数を構成できることを示した。構成はここでは略す。ただ、必要な性質をいくつか述べておこう。$M_D$ は内部に $T = \otimes_{i=1}^n L(\frac{1}{2},0)$ を含んでおり、 $T$-加群とみて、$M_D$ は $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ を一つも含んでいない。また、

$$W \text{ が } M_D \text{ の 既約 } T\text{-部分加群} \Leftrightarrow 2\mathrm{lwr}(T,W) \in D$$

である。

実際には、これは必要十分条件であり、次の定理が成り立つ。

**定理 3.1** $V$ を単純な頂点作用素代数とし、和がヴィラソロ元となるような、互いに直交する有理型の中心電荷 $\frac{1}{2}$ の共形元 $\{e^1,...,e^n\}$ を含むとする。もし、すべての $\tau_{e^i}$ が自明なら、$V$ はあるコード頂点作用素代数 $M_D$ に同型である。

$W$ を $M_D$-加群とする。この時、 $T$-加群とみて、既約 $T$-加群の和となるので、最小次数の列の集合 $lwr(T,W)$ が決まる。もし、 $W$ が既約 $M_D$-加群とすると、イジング模型のフュージョン規則より、 $(h^i) \in lwr(T,W)$ における $h^i = \frac{1}{16}$ となる位置は $(h^i)$ に依存しない。それゆえ、この位置を２元ワード $\tilde{h}(W)$ で表示し、 $\frac{1}{16}$-位置ワードと呼ぶ。

## 3.2 分類

既約 $M_D$-加群を完全に決定しましょう。

コード頂点作用素代数の加群に関してもっとも基本的な事は、

**補題 3. 1** $\tilde{h}(X)$ は $D$ と直交している。

$K=\{\alpha\in D|\alpha\subseteq\tilde{h}(X)\}$ とおき、$H$ を極大な自己直交部分コードとする。$K$ は偶コードなので、 $H^{\perp}\cap K\subseteq H$ である。$\hat{K}=\{\pm e^k:k\in K\}$ で $K$ の $\pm1$ による中心拡大とする。この時、$\{\pm e^{\alpha}:\alpha\in H\}$ は $\hat{K}$ の極大なアーベル正規部分群である。$M_D$-加群 $X$ に対して、$X$ の既約 $M_H$-部分加群が $X$ 上の $M_D$-加群としての構造を決定していることを示そう。

**定理 3. 2** $(X,Y^X)$ を既約 $M_D$-加群とし、$\{X^i:i=1,...,k\}$ を既約 $T$-部分加群全体の集合とする。この時、既約$\hat{K}$-加群 $Q^i$ で $-e^0\in\hat{K}$ は$-1$ と作用するものが存在して、$M_K$-加群として、$X\cong\oplus_{i=1}^k(Q^i\otimes X^i)$ となる。

**[証明]** $U$ を$X$ $X^1$ と同型な $T$-加群全体で生成されたホモジニアス空間とし、$U=\oplus_{i=1}^kU^i$ を既約 $T$-部分加群での直和分解とする。$\alpha=(a^i)\in K$ に対して、$q^{\alpha}=\otimes q^{a^i}\in M_K$ を次の様に定義する。

$$\begin{array}{l} a^i=1 \text{ なら } (2.2) \text{ の } q \text{ を使って } q^{a^i}=q\in L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \text{ とし、}\\ a^i=0 \text{ なら } q^{a^i} \text{ は } L(\frac{1}{2},0) \text{ の真空とする。}\end{array} \tag{3.1}$$

(4.33) の様に定義する。イジング模型のフュージョン規則より、$\alpha\in K$ に対して、$Y^X(q^{\alpha}\otimes e^{\alpha},z)U\subset U[[z,z^{-1}]]$ が成り立つ。$L(\frac{1}{2},0)$ と $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ とは他の既約 $L(\frac{1}{2},0)$-加群とのテンソル積もまた既約となるので、$u^{\alpha}\otimes e^{\alpha}$ の頂点作用素$Y^X(u^{\alpha}\otimes e^{\alpha},z)_{|U}$ は$u^{\alpha}\otimes e^{\alpha}\in M_{\alpha}$ に対して、

$$A(e^{\alpha})\otimes((\otimes I)(u^{\alpha},z)),$$

の表示を持つ。ここで、$A(e^{\alpha})$ は $k\times k$-行列で $(\otimes I)(*,z)$ はintertwining 作用素のテンソル積である。$Y^X(u^{\alpha},z)$ は局所可換を満たし、$(\otimes I)(u^{\alpha},z)$ は局所超可換を満たすので、局所超可換

$$A(\alpha)A(\beta)=(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}A(\beta)A(\alpha).$$

を得る。しかも、 $Y^X(*,z)$ は結合性を満たし、$(\otimes I)(u^{\alpha},z)$ は超結合性を満たすので、結合性

$$A(e^{\alpha})A(e^{\beta})=A(e^{\alpha}e^{\beta})$$

を得る事ができ、$A(\alpha)A(\alpha)$ は任意の $\alpha\in K$ に対して単位元であるので、$A$ は中心拡大 $\hat{K}$ の表現であることが分かります。さらに、$Q^1$ が既約であるこも容易に証明できます。

∎

同じ論法で、次の事が証明できます。

**準定理 3.1** $M_D$ は有理型の頂点作用素代数である。

## 3.3 誘導加群と誘導頂点作用素代数

$K$ を $D$ の部分線形コードとし、 $W$ を 既約 $M_D$-加群とします。ここで、 $W$ の $\frac{1}{16}$-の位置ワードが $D$ と直交していると仮定する。この時、 $M_D$-既約加群で $M_K$-加群として、$W$ を含んでいるものを構成しましょう。

まず、中心拡大 $\hat{K}$ はアーベル群と extra-special 2-群との中心積なので、すべての既約 $\hat{K}$-表現 $\phi$ で $\phi(-e^0) = -1$ となるのものは、極大アーベル正規部分群 $\hat{H}$ の線形表現を誘導したものであることに注意してください。

$\beta \in D^{\perp}$ を一つ固定しておく、これが $\frac{1}{16}$-位置ワードに対応する。$K = \{\alpha = (a^i) \in D\,|\alpha \subseteq \beta\}$ とおき、$H$ で $K$ 極大の自己直交部分コードとする。$H$ の中心拡大 $\hat{H}$ の線形既約指標を$\chi : \pm\hat{H} \to \pm 1$ で $\chi(-e^0) = -1$ となるものを選び、$F_\chi$ で一次元 $\hat{H}$-加群で $p \in F_\chi, \alpha \in H$ に対して、$e^\alpha p = \chi(e^\alpha)p$ となるものとする。適当な $h^i = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ で $(h^i)$ の$\frac{1}{16}$-位置ワードが$\beta$ となるものとする。この時、$U = \otimes L(\frac{1}{2}, h^i) \otimes F_\chi$ は $T$-加群である。$(a^i) \in H$ とし、$U$ 上の $u^i \in M\overline{a^i}$ の加群頂点作用素 $Y^U((\otimes u^i) \otimes e^\alpha, z)$ を

$$(\otimes_{i=1}^n I^{a^i/2, h^i}(u^i, z)) \otimes \chi(e^\alpha)$$

によって定義し、$M_H$ に線形で拡張させる。

**補題 3.2** $Y^U(v, z)$ は $v \in M_H$ に対して定義可能であり、微分、結合性、局所可換をみたす。特に、$U$ は $M_H$-加群である。

上の $M_H$-加群を $U((h^i), \chi)$ で表す。

次に $D$ を $\tilde{h}(U)$ に直交していると仮定する。$U((h^i), \chi)$ から $M_D$-加群

$$X = \mathrm{Ind}_{M_H}^{M_D}(U(h^i), \chi)$$

を以下の様に誘導する。

$\{\beta^1 = (b_i^1), \ldots, \beta^s = (b_i^s)\}$ を$H$ の $D$ における代表系とする。このとき、$\{e^{\beta^i} : i = 1, \ldots, s\}$ は$\hat{H}$ の $\hat{D}$ における代表系です。

$$X = \oplus_{(\beta^i) \in D/H}\{U(h^i + \frac{b^i}{2}) \otimes (e^{\beta^i} \otimes_{\hat{H}} F_\chi)\},$$

とおきます。ここで $h^i + \frac{b^i}{2}$ はイジング模型のフュージョン規則に従います。容易に、$X$ は代表系の取り方に依存せず、$M_H$-加群となることがわかります。

$\gamma \in D$ とする。$q^\gamma \otimes e^\gamma$ に対する加群頂点作用素 $Y(q^\gamma \otimes e^\gamma, z)$ を最初の成分に対しては、$(\otimes I)(q^\gamma, z)$ とし、２番目の成分に対しては $e^\gamma$ で定義します。ここで、$(\otimes I)(q^\gamma, z)$ は (3.1) を使います。この加群を $Ind_{M_H}^{M_D}(U)$ で表します。これが定義可能な加群であることの証明は略します。[M3] を参照してください。

**準定理 3. 2** $Ind_{M_H}^{M_D}(U)$ は $M_D$-加群である。

$\gamma \in D - H$ に対しては $q^\gamma$ が $\frac{1}{16}$-位置ワード $\beta$ を持つ既約 , $T$-加群 $U$ 上に正則（固定点を持たない）に作用するので、

**定理 3. 3** $X$ を既約 $M_D$-加群で $\frac{1}{16}$-位置ワード $\beta$ を持つものとする。この時、最小次数列 $h = (h^1, ..., h^n)$ と $H$ の線形指標 $\chi$ の組み $((h^i), \chi)$ があって、$X = Ind_{M_H}^{M_D}(U((h^i), \chi)))$ となる。

上の定理の系とし、次の結果を得ます。

**定理 3. 4** $X$ を $M_D$-加群で、$\frac{1}{16}$-位置ワード $\tilde{h}$ を持つものとします。$K = \{\alpha \in D : \alpha \subseteq \tilde{h}\}$ とし、$H$ を極大の自己直交している $K$ の部分コードとします。この時、$X$ の $M_D$-加群としての構造は $M_H$-既約部分加群によって一意的に決まる。

# References


[B] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 83 (1986), 3068-3071

[DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, *Proc. Symp. Pure. Math., American Math. Soc.* **56** II (1994), 295-316.

[FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, "*On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules*", Memoirs Amer. Math. Soc. 104, 1993.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, 1988.

[FZ] I. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123-168.

[L1] H.-S. Li, Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Alg.*, to appear.

[M1] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179**, (1996) 523-548

[M2] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. algebra* **181**, (1996) 207-222

[M3] M. Miyamoto, Representation theory of Code VOA and construction of VOAs, preprint