

可換不足群をもち惰性剰余群が基本可換 2-群の
主ブロックのパーフェクトアイソメトリーについて

お茶の水女子大学 (理) 宇佐美陽子

(Yoko Usami)

§1 序

本講演は、1995年7月東京大学駒場キャンパスで行なわれた第12回代数的組合せ論シンポジウムでの私の講演、
“可換不足群をもち惰性剰余群が位数8の2面体群である主
ブロックのパーフェクトアイソメトリーについて”に続くも
のである。従ってその時の報告集[U3]にこの問題の背景は
既に書いてある。つまり、この問題が、*derived category
equivalence* に関する Braue 予想 [B] から生じたも
のであることや、Alperin の *weight* 予想、Dade 予想
とも深く関連すること、及び、この問題に関し、既に知られ
ている事などは、そこで記述済みであり、重複を避ける為、
今回はそれらは省略し、その続きとして読んでもらえればと
思って書くこととする。([U3] §2, §4 参照。今回のシ
ンポジウムの Jianbei An 氏の講演とも関連があるので

その講演録の方で、文献は、詳しく述べられることと思われる。Dade 予想との関連を示す命題の証明は、Watanabe の手法によるものを [U4] 2.3 (命題 1.7) に載せてある。) ところで、ここでは、最小限の定義と定理、証明のスケッチ、及び、最近、学生と計算した新しい結果について、記述するにとどめたい。

はじめに、 O は、完備離散付値環で、商体が標数零の K 、 O を極大 ideal で割った剰余類の体が標数 $p > 0$ の k になるものとする。 K, k は、考える群に対し充分大きいとしておく。(共通の defect group (不足群) P を持つ p -block 達を、一般に考えるに当たっては、 k は代数的閉体、 K は、 1 の $|P|$ -乗根も含むと仮定しておくことよ。))

さて、Broué は、2つの block の一般指標の間の“きれいな” bijective isometry として、perfect isometry なる概念 (つまり、それを誘導することで、各々の block に属す O -valued class function 達の間の bijection が得られるだけでなく、更には、各々の block に属す K -valued class function で p -singular class 上では零となるもの達の間の bijection をも誘導できるもの) を導入した。ここで、Broué 予想に依れば、有限群 G で abelian defect group P を持つ p -block b については、 b と、 $N_G(P)$ に

おけるその Brauer 対応子 $\text{Br}_p(b)$ との間には, perfect isometry が存在するのみならず, isotypic (local な群論的条件のついた perfect isometry の族が存在する) であろうということになる。本稿は, 以下の定理を報告するものである。

定理 b は, abelian defect group P を持つ principal block (主ブロック) で, inertial quotient (惰性剰余群) E が elementary abelian 2-group であり, $p \neq 2, 3$ とする。この時, b と $\text{Br}_p(b)$ は isotypic となる。(ただし, ここで inertial quotient E とは, b の $C_G(P)$ での root を e とした時, $E = N_G(P, e) / PC_G(P)$ と定義されるものである。)

注意 $E = 1$ も考慮して, $p \neq 2$ としたが, $p = 2$ の場合は, [FH] で済んではいない。

§2 isotypy

詳しい用語解説は, [U3] §3 を見てもらうことにして, 定義 ([B] §4 の“良い”方の定義) のみを書く。

定義 b は, 有限群 G の block, b' は, 有限群 G' の block とし, P は, 両方に共通した defect group

とする。次の2条件の成り立つ時、 b と b' は *isotypic* といい、perfect isometry $I^{(1)}$ を b' と b の間の *isotypy* と呼ぶ。

(i) P の G' 及び G への包含は、Brauer category $\text{Br}_{\hat{e}P}(G')$ と $\text{Br}_{\hat{e}P}(G)$ の間の equivalence を誘導する。

(ii) Q を P の任意の subgroup とする。 G での b -subpair (Q, b_Q) と G' での b' -subpair (Q, b'_Q) に対し、 $C_{G'}(Q)$ の block b'_Q に属す一般指標と $C_G(Q)$ の block b_Q に属す一般指標の間に perfect isometry I^Q が存在し、それは次の条件をみたしている。任意の $z \in C_P(Q)$ に対し

$$d_{C_G(Q)}^{(z, b_{Q\langle z \rangle})} \circ I^Q = I_{P'}^{Q\langle z \rangle} \circ d_{C_{G'}(Q)}^{(z, b'_{Q\langle z \rangle})}$$

ここで、 $I_{P'}^{Q\langle z \rangle}$ とは、 $I^{Q\langle z \rangle}$ から各々の p -singular class 上零となる K -valued class function 間に誘導された bijection とし、 $d_{C_G(Q)}^{(z, b_{Q\langle z \rangle})}$ は b -element $(z, b_{Q\langle z \rangle})$ に関する decomposition map とする。

注意 P abelian group であれば、 G の block b と $N_G(P)$ での Brauer 対応子 $\text{Br}_P(b)$ の間で論じる

場合、(i)は、自明に成り立っている。 B が principal block の時は、 b_Q 達も全て principal block となる。

§3 定理の証明のスケッチ

principal blockに限った理由は、[U3] §5にも書いているが、そのほか、 B の中及び、任意の B -subpair (Q, b_Q) の b_Q の中に、trivial character という値の全てわかっている“土札”を持っており、その値を使って、幾つかの場合を起し得ぬとして簡単に除去できるということもある。

さて、簡単に証明をスケッチしてみる。 Külshammer [K] により、 B が principal block では、 $B_{\text{np}}(b)$ が $L = P \rtimes E$ (の principal block — L は principal block のみよりなる。) と森田同値故、 L と B が isotypic を言う。 [PU] にある Puig-Uzami の手法に則ることになると、荒っぽく言って、次の3点を検証すればよい。

- (1) $C_E(Q) \trianglelefteq E$ をみたす任意の p -subgroup $Q (\subseteq P)$ に対し、 $C_L(Q)$ と $C_G(Q)$ の block b_Q の間の perfect isometry I^Q が $N_E(Q)$ -stable か
- (2) 全体として、整合性のある $\{I_P^Q \mid Q \subseteq P\}$ が

揃えられそうか

- (3) $C_p(E) = 1$ の条件下、 $\mathcal{S} = \{p\text{-class 上零となる } L \text{ の一般指標}\}$ と $\mathcal{T} = \{p\text{-class 上零となる } G \text{ の一般指標}\}$ の間に *bijective isometry* の存在を仮定した時、これを拡張した L と G の一般指標の間の *bijective isometry* が存在するか

ちなみに、(1)の検証は易しく、(2)の検証には、 G が *principal block* であることを使う ([U3] §5 参照) が、(3)の検証には、*principal block* であることを使わず、次の §4 の言い方で、ねじれ型でない (分裂型) ならよい。さて、(3)の検証には、 \mathcal{S} の \mathbb{Z} -basis が必要となる。E の指標は、L の指標とも自然にみなすことにして、それ以外の L の既約指標 μ は、P に制限すると、P のある 1 次指標 θ の属す E-orbit を定めるので、その θ の E での *stabilizer* を F_μ とおくことにする。 μ を F_μ に制限すると、 F_μ のある 1 次指標 ξ_μ の *multiple* となり、

$$\{ \mu - \text{Ind}_{F_\mu}^E \xi_\mu \} \subset \mathcal{S} \quad \dots\dots (3.1)$$

達が、 \mathcal{S} の \mathbb{Z} -basis となる。ただし、ここで $\text{Ind}_{F_\mu}^E \xi_\mu$ は、 ξ_μ を E へ持ち上げた指標とする。今 F_μ が E の *maximal subgroup* であれば、

$$(\mu - \text{Ind}_{F_\mu}^E \xi_\mu, \mu - \text{Ind}_{F_\mu}^E \xi_\mu)_L = 3 \quad \dots\dots (3.2)$$

となり、このように自身との内積が3となる(小さい!)ものが、(3.1)内に多くある事を証明できる事が、重要なポイントとなる。なぜなら(3.1)をみたすもの達の間の内積は、 J に写されても、保たれるので、それらの像は、 \pm (既約指標)3個の和であって互いの間の内積を比較してゆくと、 \pm (既約指標)達への分解の仕方が唯一通りに決まるからである。($p=3$ では、唯一通りかの検証に、たくさんの例外ケースのチェックが必要となってしまう。) (3.1)なる8の \mathbb{Z} -basisの中で、自身との内積が3より大きいものが、 J に写された先での \pm (既約指標)達への分解の仕方は、既に決まった分との内積の比較から、容易に決まってしまう。

§4 小さい E について追加結果

B が principal block と限らぬ時は、Külshammer [K] によれば、 $\text{Br}_p(L)$ は、 L の K 上のある twisted group algebra $K_* \hat{L}$ と森田同値となる。 $K_* \hat{L}$ が分裂せぬ時、便宜上、ねじり型と呼ぶことにする。小さい E についての学生達との結果も、追加したい。次の各ケースで B と $\text{Br}_p(L)$ は isotypic となる。 P は必ずん全て abelian とする。

(i) (Naomi) $E \cong A_4$ (4次交代群)

(ii) (Kushita) B principal block $E \cong D_{10}$ (位数10の

2面体群) $p \neq 3$

(iii) (Ishibashi) のねじれ型, $E \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $p \neq 3$

(iv) (Kushita) のねじれ型, $E \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ $p \neq 2, 7$

(v) (Sugimoto) のねじれ型, $E \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$ 位数2

のえは, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ の各えと逆えにする作用, $p \neq 5, 7$

REFERENCES

- [B] M. BROUÉ, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque 181-182 (1990), 61-92.
- [FH] P. FONG and M. HARRIS, On perfect isometries and isotypies in finite groups, Invent. Math. 114 (1993), 139-191.
- [K] B. KÜLSHAMMER, Crossed products and blocks with normal defect groups, Comm. Algebra 13 (1985), 147-168.
- [PU] L. PUIG and Y. USAMI, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients, J. Algebra 160 (1993) 192-225.
- [U1] Y. USAMI, Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, J. Algebra 181 (1996), 727-759.
- [U2] Y. USAMI, Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, J. Algebra, 182 (1996), 140-164.
- [U3] 宇佐美陽子, 可換不足群を持ち情性剰余群が位数8の2面体群である主ブロックのパーフェクトアイソメトリーについて, (第12回代数的組合論シンポジウム報告集150-164)
- [U4] Y. USAMI, Perfect isometries for principal blocks with abelian defect groups and elementary abelian 2-inertial quotients, submitted to J. Algebra .