数理解析研究所講究録
991 巻 1997 年 68-79

Shintani Descent for Special Linear Groups

東京理科大 理工　庄司俊明 (Toshiaki SHOJI)

§0. 序

G を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された reductive な連結代数群, $F: G \to G$ を $\mathbf{F}_q$- 構造に付随する Frobenius 写像とする. G の F- 固定点全体のなす有限群, 即ち有限 reductive 群 G^F の既約指標を統一的に計算するために, 1980 年代中頃に Lusztig は指標層の理論を構築し, 指標層の特性関数として得られる G^F の類関数と G^F の既約指標との間の関係を予想として提出した. Lusztig の予想が示されると, G^F の既約指標を決定する統一的なアルゴリズムが得られることになる. Lusztig の予想は G の中心が連結な場合には [S3] により解決されたが, その際 G^F の Shintani descent の理論が重要な役割を演じた. 実際 G の中心が連結の場合, 十分大きな m に対して, G^{F^m} の F- 不変な既約指標 の Shintani descent $Sh_{F^m/F}$ による像は既に決定されている ([S1], [S2]).

G の中心が不連結の場合には, Lusztig 予想はまだ解決されていない. また, Shintani descent も決定されていない. ここでは, その最も典型的な例である特殊線形群 SL_n の場合に, その Shintani descent を決定する. G の中心が連結な場合と同様に, Shintani descent の決定は SL_n の Lusztig 予想の解決に大きな力になることが期待される.

Shintani descent の決定には, G^F の既約指標の精密なパラメトリゼーションが必要になる. $G = SL_n$ に対しては, GL_n の既約指標を SL_n に制限することにより既約指標の分類がなされているが, それでは十分ではない. ここでは浅井 [A] のアイディアにならって, 川中により導入, 発展された一般 Gelfand-Graev 表現を利用することにより $SL_n(\mathbf{F}_q)$ のパラメトリゼーションを与える. これにはまた, 一般 Gelfand-Graevh 表現が誘導表現ということで Shintani descent とは相性が良いという利点もある. $SL_n(\mathbf{F}_q)$ の Shintani descent を決定するには, 先ず一般 Gelfand-Graev 指標の Shintani descent を決定し, それを利用して $SL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合を

考えることになる. p を 体 $\mathbf{F}_q$ の標数とすると, $SL_n(\mathbf{F}_q)$ に関する本稿の結果は全ての p について成立する. なお, 詳しい議論については [S4] を参照されたい.

§1. 代数群の Shintani descent

3 節以降は $G = SL_n$ の場合に話を限るが, この節では一般の代数群について考える. G を $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結代数群とし, $F: G \to G$ を対応する Frobenius 写像とする. 先ず Shintani descent の定義を与えておく. 正の整数 m に対し, $G^{F^m}/\sim_F$ を G^{F^m} の F-twisted な共役類の集合, また $G^F/\sim$ を G^F の共役類の集合とする. ($x, y \in G^{F^m}$ が F-twisted 共役とは, $y = z^{-1}xF(z)$ となる $z \in G^{F^m}$ が存在することをいう.) 対応 $x = \alpha^{-1}F(\alpha) \in G^{F^m} \to x' = F^m(\alpha)\alpha^{-1} \in G^F$、($\alpha$ は適当な G の元) により Norm map と呼ばれる 全単射 $N_{F^m/F}$: $G^{F^m}/\sim_F \to G^F/\sim$ が定義される. ここで, 有限集合 X に対して, $C(X)$ を X 上の $\bar{\mathbf{Q}}_l$- 値関数全体のなす $\bar{\mathbf{Q}}_l$- ベクトル空間とする. 写像 $N_{F^m/F}$ の転置を取ることにより, ベクトル空間の同型写像 $N^*_{F^m/F}: C(G^F/\sim) \to C(G^{F^m}/\sim_F)$ が導かれる. $Sh_{F^m/F} = N^{*-1}_{F^m/F}$ を G^{F^m} から G^F への Shintani descent という. 今 σ を F の G^{F^m} への制限とし, $G^{F^m}\langle\sigma\rangle$ を G^{F^m} と, σ で生成された位数 m の巡回群 $\langle\sigma\rangle$ との半直積とする. ベクトル空間 $C(G^{F^m}/\sim_F)$ は自然に $G^{F^m}\langle\sigma\rangle$ の coset $G^{F^m}\sigma$ 上の $G^{F^m}\langle\sigma\rangle$- 共役類の空間 $C(G^{F^m}\sigma/\sim)$ と同一視される. 一方, G^{F^m} の F- 不変な既約指標 ρ は $G^{F^m}\langle\sigma\rangle$ の既約指標 $\tilde{\rho}$ に拡張され, $\tilde{\rho}$ の $G^{F^m}\sigma$ への制限 $\tilde{\rho}|_{G^{F^m}\sigma}$ は $C(G^{F^m}\sigma/\sim)$ の元とみなすことが出来る. 与えられた ρ に対して m 通りの拡張 $\tilde{\rho}$ が存在するが, $\tilde{\rho}|_{G^{F^m}\sigma}$ は 1 の m 乗根によるスカラー倍を除いて ρ により一意的に定まる. また, ρ が G^{F^m} の F- 不変な既約指標を全て動くとき, それらの $\tilde{\rho}|_{G^{F^m}\sigma}$ が $C(G^{F^m}\sigma/\sim)$ の基底を与えることが知られている.

さて Shintani descent を巡る基本的な問題は, F- 不変な ρ に対して $Sh_{F^m/F}(\tilde{\rho}|_{G^{F^m}\sigma})$ を記述することにある. また, 指標層の理論との関連で重要になるのは m が十分大きい場合 (つまり, m がある $m_0 \gg 0$ の倍数になる場合) である. 後に, 一般 Gelfand-Graev 指標の Shintani descent に適用するために, ここでは次の様な特別な状況を考える.

仮定 1. $H = L \ltimes U$ を $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結代数群 L と U の半直積とする. U は巾単群であり, U の Lie 環を $\mathfrak{u}$ とするとき U から $\mathfrak{u}$ への (共役の作用に関して) L- 同変かつ F- 不変な全単射 $f: U \to \mathfrak{u}$ が存在する. また, F- 不変な線形写像 $\lambda: \mathfrak{u} \to k$ で $\lambda \circ f: U \to k$ が F- 不変な群の準同型を与えるものが存在する. (ここで, k は $\mathbf{F}_q$ の代数的閉包とする) .

以上の性質を仮定しておく．ここで，自明でない additive character $\psi : \mathbf{F}_q \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ をひとつ固定する．すると，$\Lambda = \psi \circ \lambda \circ f$ により U^F の線形指標 $\Lambda : U^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ が定義される．今，$Z_L(\lambda)$ は F- 不変な代数群になり，$A = Z_L(\lambda)/Z_L^0(\lambda)$ とおくと，有限群 A に F が自然に作用する．各 $c \in A$ に対し，代表元 $\dot{c} \in Z_L(\lambda)$ を取り，$\alpha_c^{-1}F(\alpha_c) = \dot{c}$ となる $\alpha_c \in L$ を選ぶ．そのとき，線形写像 $\lambda_c = \lambda \circ \mathrm{Ad}\,\alpha_c^{-1} : \mathfrak{u} \to k$ は F- 不変になり，これから U^F の線形指標 $\Lambda_c : U^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ が定義される．このとき $Z_L(\lambda)^F = Z_{L^F}(\Lambda_c)$ が成り立つ．Λ_c は半直積 $Z_L(\lambda_c)^F U^F$ の線形指標に拡張できる．今その中で，自明な拡張を $\widetilde{\Lambda}_c$ とする．一方，自然な同型

$$Z_L(\lambda_c)^F/Z_L^0(\lambda_c)^F \simeq Z_L(\lambda)^{\dot{c}F}/Z_L^0(\lambda)^{\dot{c}F} \simeq A^{cF}$$

により，A^{cF} の既約指標 ξ から $Z_L(\lambda_c)^F$ の既約指標が得られる．それを $\xi^\natural$ と表すことにする．$c \in A$ と $\xi \in \widehat{A}^{cF}$ の組に対して，H^F の誘導指標 $\theta_{(c,\xi)}$ を

$$\theta_{(c,\xi)} = \mathrm{Ind}_{Z_L(\lambda_c)^F U^F}^{H^F}(\xi^\natural \otimes \widetilde{\Lambda}_c)$$

により定義する．（$\widehat{A}^{cF}$ は A^{cF} の既約指標の集合を表す.）ここで，パラメーター集合 $\overline{\mathcal{M}}$ を $\overline{\mathcal{M}} = \{(c,\xi) \mid c \in A/\sim_F, \xi \in \widehat{A}^{cF}\}$ により定める．このとき，容易にわかる様に各 $(c,\xi) \in \overline{\mathcal{M}}$ に対し，$\theta_{(c,\xi)}$ は相異なる H^F の既約指標を与える．

次に，H^{F^m} の F- 不変な既約指標について考える．正の整数 m に対し，additive character $\psi_m : \mathbf{F}_{q^m} \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ を $\psi_m = \psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{F}_{q^m}/\mathbf{F}_q}$ により定める．各 $c \in A$ に対し $\dot{c} \in Z_L(\lambda)$ を取り，$\beta_c^{-1}F^m(\beta_c) = \dot{c}$ となる $\beta_c \in L$ を選ぶ．前と同様に，$\lambda_c^{(m)} : \mathfrak{u} \to k$ を $\lambda_c^{(m)} = \lambda \circ \mathrm{Ad}\,\beta_c^{-1}$ により定め，線形指標 $\Lambda_c^{(m)} : U^{F^m} \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ を $\Lambda_c^{(m)} = \psi_m \circ \lambda_c^{(m)} \circ f$ により定義する．ここで，次の仮定をおく．

仮定 2. 整数 m は，F^m が A に自明に作用する様に十分大きいものとする．

仮定より先程の (F^m に関する) パラメーター集合は $\overline{\mathcal{M}}^{(m)} = \{(c,\xi) \mid c \in A/\sim, \xi \in \widehat{A}^c\}$ となり，各 $(c,\xi) \in \overline{\mathcal{M}}^{(m)}$ に対して H^{F^m} の既約指標 $\theta_{(c,\xi)}^{(m)}$ が構成される．これらの $\theta_{(c,\xi)}^{(m)}$ の中で F- 不変なものを取りだそう．今 $A^F/\approx$ を写像 $A \to A/\sim$ による A^F の像とし，また各 $c \in A^F$ に対し，$\widehat{A}_{\mathrm{ex}}^c$ を A^c の F- 不変な既約指標の全体とする．$\overline{\mathcal{M}}^{(m)}$ の部分集合 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} = \{(c,\xi) \mid c \in A^F/\approx, \xi \in \widehat{A}_{\mathrm{ex}}^c\}$ として定義する．そのとき，各 $(c,\xi) \in \mathcal{M}$ に対応する $\theta_{(c,\xi)}^{(m)}$ が F- 不変な既約指標を与える．

次にこれらの既約指標の $H^{F^m}\langle\sigma\rangle$ への拡張を構成する．$c \in A^F$ に対し，代表元 $\dot{c}$ を $Z_L(\lambda_c^{(m)})^F$

から取り, $\hat{c} = \beta_c F(\beta_c^{-1})$ とおく. ($\beta_c \in L$ は前出のもの). すると, $\hat{c} \in L^{F^m}$ であり, $\Lambda_c^{(m)}$ は $\hat{c}F$- 不変になる. ここで $M_c = Z_L(\lambda_c^{(m)})^{F^m}$ とおき, $\hat{c}\sigma$ と $M_c U^{F^m}$ で生成される $H^{F^m}\langle\sigma\rangle$ の部分群 $M_c U^{F^m}\langle\hat{c}\sigma\rangle$ を考える. $M_c U^{F^m}\langle\hat{c}\sigma\rangle = M_c\langle\hat{c}\sigma\rangle \ltimes U^{F^m}$ であり, $\Lambda_c^{(m)}$ は $M_c U^{F^m}\langle\hat{c}\sigma\rangle$ への自明な拡張 $\widetilde{\Lambda}_c^{(m)}$ を持つ. 一方, 前述の様に $\xi \in \widehat{A}_{\mathrm{ex}}^c$ は $\xi^\natural \in M_c^\wedge$ を定め, $\xi^\natural$ は $M_c\langle\hat{c}\sigma\rangle$ への m 通りの拡張を持つ. 今, $A^c\langle F\rangle$ を A^c と, 位数 m の巡回群 $\langle F\rangle$ との半直積とし, $\widetilde{\xi}$ を ξ の $A^c\langle F\rangle$ へのひとつの拡張とする. このとき $\xi^\natural$ の拡張 $\widetilde{\xi}^\natural$ は次の様に特徴付けられる. $\hat{c}_0 = (\hat{c}\sigma)^m \in M_c$ とおく. $\hat{c}_0$ の A^c への像は A^c の中心に含まれ, 従って $\hat{c}_0$ は $\xi^\natural$ の表現空間にスカラー倍 $\xi^\natural(\hat{c}_0)/\xi(1)$ で作用する. $\mu_{(c,\xi)}$ を $\xi^\natural(\hat{c}_0)/\xi(1)$ の m 乗根とする. すると, $\widetilde{\xi}^\natural(\hat{c}_0\sigma) = \mu_{(c,\xi)}\widetilde{\xi}(F)$ となり, 拡張 $\widetilde{\xi}^\natural$ は $\mu_{(c,\xi)}$ (及び $\widetilde{\xi}$) により定まる. $\widetilde{\xi}^\natural$ は $M_c U^{F^m}\langle\hat{c}\sigma\rangle$ の既約指標に自然に拡張出来る. これを同じ記号で表す. ここで,

$$\widetilde{\theta}_{(c,\xi)}^{(m)} = \mathrm{Ind}_{M_c U^{F^m}\langle\hat{c}\sigma\rangle}^{H^{F^m}\langle\sigma\rangle}(\widetilde{\xi}^\natural \otimes \widetilde{\Lambda}_c^{(m)})$$

により, $\theta_{(c,\xi)}^{(m)}$ の $H^{F^m}\langle\sigma\rangle$ への拡張 $\widetilde{\theta}_{(c,\xi)}^{(m)}$ が得られる. 作り方より, $\mu_{(c,\xi)}^{-1}\theta_{(c,\xi)}^{(m)}$ の coset $H^{F^m}\sigma$ への制限は $(c,\widetilde{\xi})$ のみによって定まる.

$\mathcal{M}$ の各元 (c,ξ) に対して $\xi \in \widehat{A}_{\mathrm{ex}}^c$ の $A^c\langle F\rangle$ への拡張 $\widetilde{\xi}$ を固定する. pairing $\{\ ,\ \}$: $\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{M}} \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を次の式で定義する. $(c,\xi) \in \mathcal{M}, (c',\xi') \in \overline{\mathcal{M}}$ に対し

$$\{(c,\xi),(c',\xi')\} = |A^c|^{-1}|A^{c'F}|^{-1} \sum_{\substack{g\in A \\ gcg^{-1}\in A^{c'F}}} \widetilde{\xi}(g^{-1}c'Fg)\xi(gcg^{-1}).$$

この pairing は Lusztig の非可換 Fourier 変換に使われる pairing の類似ではあるが, 同じではない. pairing $\{(c^{-1},\xi),(c',\xi')\}$ が Lusztig の意味での (c,ξ) と (c',ξ') の pairing になる.

さて, $(c',\xi') \in \overline{\mathcal{M}}$ に対し, 1 の巾根 $\lambda_{(c',\xi')}^{(m)}$ を次の様に定める. $(c'F)^{-m}$ は $A^{c'F}$ の中心に含まれ, 従って $\xi' \in \widehat{A}^{c'F}$ の表現空間にスカラー倍で作用する. このスカラー $= \xi'((c'F)^{-m})/\xi'(1)$ を $\lambda_{(c',\xi')}^{(m)}$ とおく. 次の定理は $(c,\xi) \in \mathcal{M}$ に対し $\theta_{(c,\xi)}^{(m)} \in \widehat{H}^{F^m}$ の Shintani descent が Lusztig の概指標と似たものを与えることを示している.

定理 1. m は仮定 2 を満たすとする. このとき, $x \in \mathcal{M}$ に対し,

$$Sh_{F^m/F}(\mu_x^{-1}\widetilde{\theta}_x^{(m)}|_{H^{F^m}\sigma}) = \sum_{y\in\overline{\mathcal{M}}}\{x,y\}\lambda_y^{(m)}\theta_y.$$

§2. 一般 Gelfand-Graev 指標

この節では G を reductive な (連結) 代数群とし, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする. G と $\mathfrak{g}$ の Frobenius 写像を F で表す. 巾零元 $N \in \mathfrak{g}^F$ に対して, 川中 [K1], [K2] により G^F の一般 Gelfand-Graev 指標 Γ_N が構成された. 更に川中は [K3] で, Γ_N の変形（あるいは精密化）として得られる G^F の誘導表現を構成している. $SL_n(\mathbf{F}_q)$ の Shintani descent の決定に役立つのはこの変形 Γ_N （これも一般 Gelfand-Graev 指標と呼ぶ）の方である. ここでは 1 節との関連で, Γ_N とその変形を以下の様に定義する.

今 G_{uni} を G の巾単多様体, $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}$ を $\mathfrak{g}$ の巾零多様体とする. Springer により $\mathbf{F}_q$ の標数 p が小さくないとき 同型 $f : G_{\mathrm{uni}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}$ が存在することが知られている. $G = GL_n$ または SL_n で, F が標準的な Frobenius 写像の場合, $f : x \to x - 1$ として良い. (この場合 f は全ての素数 p に対して定義できる). また一般には p が十分大きいという仮定のもとに, f を通常の指数写像の逆写像として取ることができる. いずれの場合も, f は F- 不変であり, かつ G- 不変になる. 以下ではこの様な f を固定して考える. G の F- 不変な極大 torus T とそれを含む F- 不変な Borel 部分群 B の組を定め, それに関するルート系を Σ, 単純ルート系を Π とする. $N \in \mathfrak{g}^F$ を巾零元とする. N の G- 軌道 $\mathcal{O}_N \subset$ に対し, Dynkin-Kostant 理論により $\mathbb{Z}$- 線形写像 $h : \mathbb{Z}\Sigma \to \mathbb{Z}$ で, 各 $\alpha \in \Pi$ に対し $h(\alpha) \in \{0,1,2\}$ を満たすものが取れる. Dynkin 図形の各頂点 $\alpha \in \Pi$ に数 $h(\alpha)$ を付け加えたものを $\mathcal{O}_N$ に付随した weighted Dynkin 図形という. 関数 h は F- 不変であり, h により $\mathfrak{g}$ の F- 不変な次数付け $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ が得られる. ここに, $\mathfrak{g}_i$ は $h(\alpha) = i$ となる様なルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ の直和である. 各 $i \geq 1$ に対して $\mathfrak{u}_i = \bigoplus_{j\geq i} \mathfrak{g}_j$ とおく. $\mathfrak{u}_i$ は $\mathfrak{g}$ の巾零 Lie 環であり, $f^{-1}(\mathfrak{u}_i) = U_i$ は G の F- 不変な巾単部分群になる. $P = LU_P$ を N に付随した G の F- 不変な放物部分群とする. ここで, L は T を含む P の Levi 部分群であり, $\mathrm{Lie}\, L = \mathfrak{g}_0$, $U_P = U_1$ である. 今, $\mathcal{O}_N$ の代表元 N は $\mathfrak{g}_2^F$ に含まれる様に取ることができる. $N^* \in \mathfrak{g}_{-2}^F$ を $\mathfrak{g}$ の opposition $\mathbf{F}_q$- 同型による N の像とする. ここで, $\langle\, ,\, \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ を $\mathfrak{g}$ 上の G- 不変かつ F- 不変な, 結合的, 非退化な双線形形式とする. F- 不変な線形写像 $\lambda : \mathfrak{u}_1 \to k$ を $\lambda(x) = \langle N^*, x\rangle$ により定義する. このとき [K1], [K2] により, 写像 $(x, y) \mapsto \lambda([x, y])$ は $\mathfrak{g}_1$ 上に非退化な交代形式を与える. $\mathfrak{g}_1$ の F- 不変な Lagrangian subspace $\mathfrak{s}$ をひとつ選び, $\mathfrak{u}_{1.5} = \mathfrak{s} + \mathfrak{u}_2$ とおく. このとき, $\mathfrak{u}_{1.5}$ は $\mathfrak{u}_1$ の F- 不変な部分 Lie 環であり, $U_{1.5} = f^{-1}(\mathfrak{u}_{1.5})$ とおくと, $U_{1.5}$ は $\mathfrak{u}_1$ の F- 不変な閉部分群となる. さらに, [K1] により, $\lambda \circ f : U_{1.5} \to k$ は群の準同型になることが分かる. 従って, $\Lambda_N = \psi \circ \lambda \circ f$ は $U_{1.5}^F$ の線形

指標を与える. $\Gamma_N = \mathrm{Ind}_{U_{1.5}^F}^{G^F} \Lambda_N$ とおいて得られる G^F の誘導指標が [K1] で構成された N に付随する一般 Gelfand-Graev 指標である. 指標 Γ_N は $\mathfrak{s}$ の取り方に依らない.

次に [K3] に従って Γ_N の変形 (精密化) を定義しよう. 実は [K3] では, 一般の reductive 群に対して変形 Γ_N が構成されているが, ここでは 1 節の結果を使う必要上, より限定された (計算しやすい) 状況で考える. Γ_N の定義に使われる部分群 $U_{1.5}$ は $\mathfrak{s}$ の取り方に依存し, $U_{1.5}$ は必ずしも L の作用で不変にはならないことに注意して, 次の仮定をする.

仮定 3. F- 不変かつ L- 不変な Lagrangian subspace $\mathfrak{s}$ が $\mathfrak{g}_1$ に存在する.

この仮定のもとで, $U_{1.5}$ は L- 不変になり, 半直積 $H = L \ltimes U_{1.5}$ と $f : U_{1.5} \to \mathfrak{u}_{1.5}, \lambda : \mathfrak{u}_{1.5} \to k$ に関して仮定 1 の条件が全て満たされる. またそのとき,

$$A = Z_L(\lambda)/Z_L^0(\lambda) \simeq Z_G(N)/Z_G^0(N)$$

となっていることにも注意しておく. $\overline{\mathcal{M}}$ を 1 節で定義したパラメーター集合とする. $(c,\xi) \in \overline{\mathcal{M}}$ に対し, H^F の既約指標 $\theta_{(c,\xi)}$ が定義される.

$$\Gamma_{(c,\xi)} = \mathrm{Ind}_{H^F}^{G^F} \theta_{(c,\xi)} = \mathrm{Ind}_{Z_L(\lambda_c)^F U_{1.5}^F}^{G^F} (\xi^\natural \otimes \widetilde{\Lambda}_c)$$

を, 組 (c,ξ) により定まる (変形) 一般 Gelfand-Graev 指標という. $N_c \in \mathcal{O}_N^F$ を $c \in A$ に対応する巾零元とすると, $\Gamma_{(c,\xi)}$ は Γ_{N_c} の直和成分であり, その意味で一般 gelfand-Graev 指標の精密化になっている.

注意. G が GL_n または SL_n で, F が標準的 Frobenius 写像の場合, 関数 $h : \mathbb{Z}\Sigma \to \mathbb{Z}$ を調べることにより, 仮定 3 を満たす $\mathfrak{s}$ の存在が確かめられる. また, N の weighted Dynkin 図形が $\{0,2\}$ のみからなる場合には, $\mathfrak{s} = \{0\}$ なので, 仮定は自動的に成立する. 例外群の場合, 最も興味のある巾零類は, G_2, F_4, E_8 の場合に, それぞれ $Z_G(N)/Z_G^0(N) \simeq S_3, S_4, S_5$ (S_n は n 次の対称群) となる類であるが, これらは全て前記の例であり, 従って仮定 3 を満たす.

さて, $m > 0$ を仮定 2 を満たす整数とすると, $x = (c,\xi) \in \mathcal{M}$ に対して $\theta_x^{(m)} \in H^{F^m}$ は F-不変であり, $H^{F^m}\langle\sigma\rangle$ への拡張 $\widetilde{\theta}_x^{(m)}$ が得られる. このとき, $\widetilde{\Gamma}_x^{(m)} = \mathrm{Ind}_{H^{F^m}\langle\sigma\rangle}^{G^{F^m}\langle\sigma\rangle} \widetilde{\theta}_x^{(m)}$ とおくと $\widetilde{\Gamma}_x^{(m)}$ は G^{F^m} の F- 不変な一般 Gelfand-Graev 指標 $\Gamma_x^{(m)}$ の $G^{F^m}\langle\sigma\rangle$ への拡張を与える. 次の結果は定理 1 の系として容易に得られる.

系 1. $x \in \mathcal{M}$ に対し,

$$Sh_{F^m/F}(\mu_x^{-1}\widetilde{\Gamma}_x^{(m)}|_{G^{F^m}\sigma}) = \sum_{y\in\overline{\mathcal{M}}} \{x,y\}\lambda_y^{(m)}\Gamma_y.$$

§3. $SL_n(\mathbf{F}_q)$ の一般 Gelfand-Graev 指標

この節以降, $G = SL_n$, F は標準的 Frobenius 写像と仮定する. 従って $G^F = SL_n(\mathbf{F}_q)$ である. G^F の既約指標をパラメトライズするために, $G \hookrightarrow \widetilde{G} = GL_n$ として $\widetilde{G}^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標と比較して考える. $\widetilde{B} \supset \widetilde{T}$ を $\widetilde{G}$ の F- 不変な Borel 部分群と極大 torus の組とし, $W = N_{\widetilde{G}}(\widetilde{T})/\widetilde{T}$ を $\widetilde{G}$ の Weyl 群とする. また, $\widetilde{G}^*$ を $\widetilde{G}$ の双対群とする. GL_n の場合, $\widetilde{G}^* \simeq \widetilde{G}$ であり, $\widetilde{G}^*$ の極大 torus $\widetilde{T}^*$, Weyl 群 W^* はそれぞれ $\widetilde{T}, W$ と同一視できる. ここで, Lusztig による $\widetilde{G}^F$ の既約指標の分類を説明する. $(\widetilde{G}^F)^\wedge$ を $\widetilde{G}^F$ の既約指標全体の集合とすると,

$$(\widetilde{G}^F)^\wedge = \coprod_{\{s\}} \mathcal{E}(\widetilde{G}^F, \{s\})$$

と分割できる. ここで, $\{s\}$ は $\widetilde{G}^*$ の F- 不変な半単純共役類を全て動く. 今 $\{s\}$ を F- 不変な半単純類とし, 代表元 $s \in \widetilde{T}^*$ を取る. このとき, $Z_s = \{w \in W \mid wF(s) = s\} \neq \emptyset$ であり, $W_s = \{w \in W \mid w(s) = s\}$ とおくと, $Z_s = W_s w_1$ $(w_1 \in W)$ と表される. w_1F は W_s を不変にし, それより同型 $\gamma : W_s \to W_s$ が導かれる. $(W_s)^\wedge_{\mathrm{ex}}$ を W_s の既約指標で γ で不変なもの全体とする. そのとき $\mathcal{E}(\widetilde{G}^F, \{s\})$ は $(W_s)^\wedge_{\mathrm{ex}}$ によってパラメトライズされ,

$$\mathcal{E}(\widetilde{G}^F, \{s\}) = \{\rho_{s,E} \mid E \in (W_s)^\wedge_{\mathrm{ex}}\}$$

と表される.

今, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ を $\widetilde{G}$ の Lie 環とする. $\widetilde{\mathfrak{g}}^F$ の巾零元 N に対して $\widetilde{\Gamma}_N$ を $\widetilde{G}^F$ の一般 Gelfand-Graev 指標とする. GL_n の場合, $Z_{\widetilde{G}}(N)$ は連結であり, 従って $\widetilde{\Gamma}_N$ は巾零類 $\mathcal{O}_N$ により唯一つ定まる. $\widetilde{G}^F$ の既約指標の分類と $\widetilde{\Gamma}_N$ との密接な関係を与える川中 [K3] の結果を述べるために, 少し準備をする. Lusztig により, 中心が連結な reductive 群 H に対して, H^F の既約指標の集合から Lie H の F- 不変な巾零類全体への自然な写像が構成されている. 特に GL_n の場合には次の様になる. $\rho_{s,E} \in \mathcal{E}(\widetilde{G}^F, \{s\})$ とする. W_s の符合表現を ε として, $E' = E \otimes \varepsilon \in W_s^\wedge$ とおく. $\widehat{E} \in W^\wedge$ を $\mathrm{Ind}_{W_s}^W E'$ の分解に現れる W の既約指標で $b_{\widehat{E}} = b_{E'}$ を満たす唯一つのものとする. (ここに, W の鏡映表現を $W \to GL(V)$ とするとき, $E_1 \in W^\wedge$ に対して V の i 番目の symmetric power に E_1 が表れる様な最小の i を b_{E_1} とする). そこで, Springer 対応によ

り $\widehat{E}$ に対応する $\tilde{\mathfrak{g}}$ の巾零類を $\mathcal{O}_\rho$ とする. $\rho \to \mathcal{O}_\rho$ が求める写像を与える. $H = GL_n$ の場合, $W \simeq S_n$ なので, $\widehat{E}$ は n の分割 μ により $\widehat{E} = \chi_\mu$ と表され, μ に対応する $\tilde{\mathfrak{g}}$ の巾零類が $\mathcal{O}_\rho$ となる. このとき次が成立する.

定理 2 (川中 [K3]). $\tilde{\Gamma}_N$ を N に対応する $\tilde{G}^F$ の一般 Gelfand-Graev 指標とする. このとき $\rho \in (\tilde{G}^F)^\wedge$ に対して,

$$\langle \tilde{\Gamma}_N, \rho \rangle_{\tilde{G}^F} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_N, \\ 0 & \text{if } \mathcal{O}_N \not\subseteq \overline{\mathcal{O}}_\rho. \end{cases}$$

ここで, $\langle\, , \rangle_{\tilde{G}^F}$ は, $\tilde{G}^F$ の指標の内積を表し, また $\overline{\mathcal{O}}_\rho$ は巾零類 $\mathcal{O}_\rho$ の $\tilde{\mathfrak{g}}$ での閉包を表す.

次に $G^F = SL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標について考える. $\rho \in \tilde{G}^F$ の G^F への制限 $\rho|_{G^F}$ は multiplicity free であり, G^F の既約指標は全て $\rho|_{G^F}$ を分解することにより得られる. 従って, これで一応 $\widehat{G}^F$ の分類ができるが, Shintani descent を扱うときには, $\rho|_{G^F}$ の分解をしかるべくパラメトライズする必要がある. 定理 2 は $(\tilde{G}^F)^\wedge$ の各元が一般 Gelfand-Graev 指標によって, ある意味で分離できることを示しているが, 類似の現象が G^F についても成立する. 今, $N \in \mathfrak{g}^F$ を巾零元とし, 2 節に従って G^F の一般 Gelfand-Graev 指標 $\Gamma_{(c,\xi)}$ $((c, \xi) \in \overline{\mathcal{M}})$ を定義する. $G = SL_n$ の場合, $A \simeq Z_G(N)/Z_G^0(N)$ は Abel 群になることに注意する. このとき, A の F-twisted 共役類の集合 $A/\sim_F$ は A の商群 A_F(F が自明に作用する様な最大の商群) と同一視できる. 従って, $\overline{\mathcal{M}} = A_F \times \widehat{A}^F$ と表せる.

さて, G^* を G の双対群とする. $G^* \simeq PGL_n$ であり, 埋め込み $G \hookrightarrow \tilde{G}$ は全射 $\pi : \tilde{G}^* \to G^*$ を誘導する. 半単純元 $s \in \tilde{G}^*$ に対し, $\bar{s} = \pi(s) \in G^*$ とおく. G^* の Weyl 群は $\tilde{G}^*$ の Weyl 群 W と同一視でき, $W_{\bar{s}} = \{w \in W \mid w(\bar{s}) = \bar{s}\}$ とすると, $W_{\bar{s}} = W_s \rtimes \Omega_s$ と表される. ここに, $\Omega_s \simeq Z_{G^*}(\bar{s})/Z^0_{G^*}(\bar{s})$ は巡回群になる. 今, $\rho = \rho_{s,E} \in \mathcal{E}(\tilde{G}^F, \{s\})$ に対し, 次を仮定する.

仮定 4. $W_{\bar{s}} = W_s\Omega_s$ とするとき, Ω_s は W_s の各因子 (W_s は対称群 S_i 達の直積になっている) の上に推移的に作用する. また, $E \in W_s^\wedge$ は Ω_s- 不変である.

次の定理が $G^F = SL_n(\mathbf{F}_q)$ に対する定理 2 の類似を与える.

定理 3. $\rho = \rho_{s,E} \in (\tilde{G}^F)^\wedge$ に対し, 組 (s, E) は仮定 3 を満たすとする. このとき, 各元 $(c, \xi) \in \overline{\mathcal{M}}$ に対して次が成立する.

(i) $\mathcal{O}_N \not\subseteq \overline{\mathcal{O}}_\rho$ ならば $\langle \Gamma_{(c,\xi)}, \rho|_{G^F} \rangle_{G^F} = 0$.

(ii) $\mathcal{O}_N = \mathcal{O}_\rho$ とする. このとき,

$$\langle \Gamma_{(c,\xi)}, \rho|_{G^F} \rangle_{G^F} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi = \xi_0, \\ 0 & \text{if } \xi \neq \xi_0, \end{cases}$$

となる $\xi_0 \in \widehat{A}^F$ が唯一つ存在する.

注意. 仮定 4 を外すと定理 3 は一般に成立しない. $N \in \mathfrak{g}^F$ が正則巾零元の場合 $\Gamma_{(c,\xi)}$ は Gelfand-Graev 指標であり, (ii) の条件は ρ が $\widetilde{G}^F$ の正則な既約指標であることを意味する. この場合, 定理の結果は浅井 [A] により既に得られていた.

定理 3 により $\mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_N$ の場合に, $\Gamma_{(c,\xi_0)}$ と $\rho|_{G^F}$ は共通な G^F の既約指標を唯一つ持つことが分かる. これを $\rho_{(c,\xi_0)}$ と表す. すると, c が A_F の元を動くとき $\rho_{(c,\xi_0)}$ は $\rho|_{G^F}$ の既約成分の全てを尽くすことが確かめられる. しかし, 異なった $c, c' \in A_F$ が同じ G^F の既約指標を与えることも起こる. 今, $\mathcal{T}_\rho$ を $\rho|_{G^F}$ の分解に表れる G^F の既約指標の全体とすると, 次が成り立つ : A のある F- 不変な部分群による商群 $\bar{A}$ に対して, $\mathcal{T}_\rho$ は $\bar{A}_F$ と全単射になる. 即ち, 自然な全射 $A_F \to \bar{A}_F$ による $c \in A_F$ の像を $\bar{c}$ とすると, $(\bar{c}, \xi_0) \mapsto \rho_{(c,\xi_0)}$ が $\bar{A}_F \simeq \mathcal{T}_\rho$ を与える.

さて, $\bar{s} \in T^*$ の G^*- 共役類 $\{\bar{s}\}$ は F- 不変になる. また, ある $w_1 \in W$ に対して $\bar{s}$ は w_1F- 不変になる. $F' = w_1F$ とおくと $\{\bar{s}\}^F$ の G^{*F}- 共役類は $\Omega_s/\sim_{F'} \simeq (\Omega_s)_{F'}$ でパラメトライズされる. 各 $x \in (\Omega_s)_{F'}$ に対して $\pi(s_x) = \bar{s}$ となる $s_x \in (\widetilde{T}^*)^{xF'}$ を選ぶ. 各 $x \in (\Omega_s)_{F'}$ に対して $\{s_x\}$ は互いに異なる F- 不変な共役類を与える. またこのとき W_{s_x} は W_s と同型になり, 組 (s_x, E) は仮定 4 を満たす. $\rho_x = \rho_{s_x,E}$ とおき, $\mathcal{T}_{\rho_x}$ を $\mathcal{T}_\rho$ と同様に定義する. $\mathcal{T}_{\rho_x}$ は各 $x \in (\Omega_s)_{F'}$ に対して互いに共通部分を持たない. 今, $\mathcal{T}_{\bar{s},E}$ を $\mathcal{T}_{\rho_x}$ $(x \in (\Omega_s)_{F'})$ の和集合として定義する. すると $\mathcal{T}_{\bar{s},E}$ は次の様に一般 Gelfand-Graev 指標を使ってパラメトライズされる. $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},N} = \bar{A}_F \times (\bar{A}^F)^\wedge$ とおく. ここで, $(\bar{A}^F)^\wedge$ は $(A^F)^\wedge$ の部分集合とみなすことができる. また, $A_F \to \bar{A}_F$ は全射になる. $\overline{\mathcal{M}} = A_F \times \widehat{A}^F$ の部分集合 $\overline{\mathcal{M}}_0$ を $\overline{\mathcal{M}}_0 = A_F \times (\bar{A}^F)^\wedge$ で定義すれば, 自然な全射 $\varphi : \overline{\mathcal{M}}_0 \to \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},N}$ が得られる. このとき, 定理 3 の系として次の結果が得られる.

系 2. $\mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_N$ とする. $\pi(s) = \bar{s}$ とおく. このとき以下の性質を満たす様な全単射 $\mathcal{T}_{\bar{s},E} \leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},N}$ が存在する. $(c,\xi) \in \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},N}$ に対し, 対応する $\mathcal{T}_{\bar{s},E}$ の元を $\rho_{(c,\xi)}$ と表す. このとき, 任意の $(c',\xi') \in \overline{\mathcal{M}}_0$ に対して

$$\langle \Gamma_{(c',\xi')}, \rho_{(c,\xi)} \rangle_{G^F} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varphi((c',\xi')) = (c,\xi), \\ 0 & \text{if } \varphi((c',\xi')) \neq (c,\xi). \end{cases}$$

更に, $(c',\xi') \in \overline{\mathcal{M}} - \overline{\mathcal{M}}_0$ に対しては, 任意の $\rho_1 \in \mathcal{T}_{\bar{s},E}$ に対して$\langle \Gamma_{(c',\xi')}, \rho_1 \rangle_{G^F} = 0$ となる.

§4. $SL_n(\mathbf{F}_q)$ の Shintani descent

3 節でも少し述べたが, ここで Lusztig [L] による $SL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標の分類を説明する. 一般論により $\widehat{G}^F = \coprod_{\{\bar{s}\}} \mathcal{E}(G^F, \{\bar{s}\})$ と分割できる. ここに $\{\bar{s}\}$ は F- 不変な G^* の半単純類を全て動く. 今, $\{\bar{s}\}$ を G^* の F- 不変な半単純類とする. $\bar{s} \in T^*$ とし, $\pi(s) = \bar{s}$ となる $s \in \widetilde{T}^*$ で $\{s\}$ が F- 不変になるものを選ぶ. 3 節で述べた様に, $\bar{s}$ は $F' = w_1 F$- 不変になり, 各 $x \in (\Omega_s)_{F'}$ に対して $s_x \in (\widetilde{T}^*)^{xF'}$ が選べる. このとき, $W_{s_x} = W_x$ であり, 各 x に対して, 同型 $\gamma_x = xF' : W_s \to W_s$ が定まる. $(W_s^\wedge)^{\gamma_x}/\Omega_s^{F'}$ を γ_x- 不変な W_s の既約指標の集合 $(W_s^\wedge)^{\gamma_x}$ における, $\Omega_s^{\gamma_x} = \Omega_s^{F'}$- 軌道の全体とする. 各 $E \in (W_s^\wedge)^{\gamma_x}/\Omega_s^{F'}$ に対し, $\rho_{s_x,E} \in (\widetilde{G}^F)^\wedge$ を取り, $\mathcal{T}_{x,E}$ を $\rho_{s_x,E}|_{G^F}$ の分解に表れる G^F の既約指標全体の集合とする. このとき, [L] により

$$\mathcal{E}(G^F, \{\bar{s}\}) = \coprod_{(x,E)} \mathcal{T}_{x,E}$$

と表される. ここに (x,E) は, $x \in (\Omega_s)_{F'}$, $E \in (W_s^\wedge)^{\gamma_x}/\Omega_s^{F'}$ を全て動く. 更に, 集合 $\mathcal{T}_{x,E}$ は $\Omega_s^{xF'}(E)^\wedge = \Omega_s^{F'}(E)^\wedge$ と全単射になることも分かる. ($\Omega_s^{F'}(E)$ は $\Omega_s^{F'}$ における E の固定化群を表す). しかし canonical な対応は与えられていないことに注意する. ここで次の様な自然な全単射 f が存在する.

$$f : \coprod_{E \in (W_s^\wedge/\Omega_s)^{F'}} \Omega_s(E)_{F'} \simeq \coprod_{x \in (\Omega_S)_{F'}} (W_s^\wedge)^{\gamma_x}/\Omega_s^{F'}.$$

ただし, $(W_s^\wedge/\Omega_s)^{F'}$ は $W_s^\wedge$ における F- 不変な Ω_s- 軌道の集合を表す. 今, $E \in (W_s^\wedge/\Omega_s)^{F'}$ に対し, $\mathcal{T}_{\bar{s},E}$ を下記の様な (x,E') に対応する $\mathcal{T}_{x,E'}$ の和集合として定義する. ここに (x,E') は f による $\Omega_s(E)_{F'}$ の像に含まれる組 (x,E') を全て動く. すると, 前記のことから

$$\mathcal{E}(G^F, \{\bar{s}\}) = \coprod_{E \in (W_s^\wedge/\Omega_s)^{F'}} \mathcal{T}_{\bar{s},E}$$

と表される.

ここで, パラメーター集合 $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}$ を $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E} = \Omega_s^{F'}(E)^\wedge \times \Omega_s(E)_{F'}$ として定義する. すると上に述べたことから, $\mathcal{T}_{\bar{s},E}$ は $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}$ と全単射に対応する. (しかし, canonical な対応は与えられていない). 次の結果は $\widehat{G}^F$ の自然なパラメトリゼーションを与える.

命題 1. 各 $E \in (W_s^\wedge/\Omega_s)^{F'}$ に対し, 自然な対応 $\mathcal{T}_{\bar{s},E} \leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}$ が存在し,

$$\mathcal{E}(G^F, \{\bar{s}\}) \simeq \coprod_{E \in (W_s^\wedge/\Omega_s)^{F'}} \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}$$

となる.

実際, (s,E) が仮定 4 を満すときは, $\mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_N$ を満す巾零類 $\mathcal{O}_N$ に対して, $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},N} = \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}$ となり, 命題 1 の対応は 系 2 より得られる. 一般の場合は. 系 2 の結果を G の Levi 部分群に対して拡張し, Lusztig の twisted induction を使って, 仮定 3 を満す場合に帰着させることにより示される.

次に十分大きい m に対して G^{F^m} の F- 不変な既約指標をパラメトライズする. 前の様に G^* の F- 不変な半単純類 $\{\bar{s}\}$ を考え, $\bar{s} \in T^{*F'}$ としておく. $\pi(s) = \bar{s}$ となる $s \in \tilde{T}^*$ で $\{s\}$ が F- 不変なものを取る. 今, m を十分大きく取って, $s \in T^{*F^m}$, かつ F^m は Ω_s に自明に作用する様にしておく. 各 $E \in W_s^\wedge$ に対して $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}^{(m)}$ と $\mathcal{T}_{\bar{s},E}^{(m)}$ を (F' を F^m で置き換えることにより) $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}, \mathcal{T}_{\bar{s},E}$ と同様に定義する. すると $\mathcal{T}_{\bar{s},E}^{(m)}$ は $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}^{(m)}$ と全単射になり, $\mathcal{E}(G^{F^m}, \{\bar{s}\})$ は $\mathcal{T}_{\bar{s},E}^{(m)}$ のいくつかの和集合として表される. m の取り方から $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}^{(m)} = \Omega_s(E)^\wedge \times \Omega_s(E)$ となることに注意する. $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}^{(m)}$ の部分集合 $\mathcal{M}_{\bar{s},E}$ を $\mathcal{M}_{\bar{s},E} = \Omega_s(E)^\wedge_{\mathrm{ex}} \times \Omega_s(E)^{F'}$ で定義する. ただし, $\Omega_s(E)^\wedge_{\mathrm{ex}}$ は $\Omega_s(E)$ の F'- 不変な既約指標の集合を表す. 以上の設定のもとに, $\mathcal{E}(G^{F^m}, \{\bar{s}\})$ に含まれる F- 不変な既約指標は次の様にパラメトライズされる.

$$\mathcal{E}(G^{F^m}, \{\bar{s}\})^F \simeq \coprod_{E \in (W_s^\wedge/\Omega_s)^{F'}} \mathcal{M}_{\bar{s},E}.$$

ここで, $\mathcal{M}_{\bar{s},E}$ は $(\mathcal{T}_{\bar{s},E}^{(m)})^F$ と全単射に対応している.

上の対応で, $y \in \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}$ に対応する $\mathcal{T}_{\bar{s},E}$ に属する G^F の既約指標を ρ_y と表し, また $x \in \mathcal{M}_{\bar{s},E}$ に対応する $\mathcal{T}_{\bar{s},E}^{(m)}$ に属する G^{F^m} の F- 不変な既約指標を $\rho_x^{(m)}$ と表す.

ここで, pairing $\{\ ,\ \} : \mathcal{M}_{\bar{s},E} \times \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E} \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を $x = (\eta, z) \in \mathcal{M}_{\bar{s},E}, y = (\eta', z') \in \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}$ に対して,

$$\{x, y\} = |\Omega_s(E)^{F'}|^{-1} \eta(z') \eta'(z)$$

により定義する. (ここで, $\eta \in \Omega_s(E)^\wedge_{\mathrm{ex}}$ は自然に $\Omega_s(E)_{F'}$ 上の指標とみなせる). また各 $x \in \mathcal{M}_{\bar{s},E}$ に対し, $R_x \in C(G^F/\sim)$ を

$$R_x = \sum_{y \in \overline{\mathcal{M}}_{\bar{s},E}} \{x, y\} \rho_y$$

により定義する．次の定理が G^{F^m} の F- 不変な既約指標の Shintani descent を記述する．

定理 4. 組 $(\bar{s}, E)$ は上の通りとし，m は十分大きいとする．各 $x \in \mathcal{M}_{\bar{s},E}$ に対し，F- 不変な既約指標 $\rho_x^{(m)} \in \mathcal{T}_{\bar{s},E}^{(m)}$ の $G^{F^m}\langle\sigma\rangle$ への拡張を $\tilde{\rho}_x^{(m)}$ とする．このとき

$$Sh_{F^m/F}(\tilde{\rho}_x^{(m)}|_{G^{F^m}\sigma}) = \mu_x R_x$$

となる．ただし，μ_x は拡張 $\tilde{\rho}_x^{(m)}$ の取り方に依存して定まる 1 の m 乗根である．

定理 4 の証明は $SL_n(\mathbf{F}_q)$ に関する Shintani descent 等式（Shintani descent により，G^F の twisted induction と G^{F^m} の Harish-Chandra induction を結び付ける等式）を適用することにより，(s, E) が仮定 4 を満す場合に帰着される．そしてその場合には系 1 と系 2 を使い，$\mathcal{O}_\rho$ の余次元に関する帰納法により，更に $\mathcal{O}_\rho$ が正則巾零類の場合に帰着されて定理が示される．

References

[A] T. Asai, Twisting operators on the space of class functions of finite special linear groups, in "The Arcata conference on representations of finite groups," Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. **47–2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 99–148.

[K1] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, in "Algebraic groups and related topics," Advanced Studies in Pure Math., Vol **6**, Kinokuniya, Tokyo and North Holland, Amsterdam, 1985, 179–206.

[K2] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations of exceptional simple algebraic groups over a finite field, I, Invent. Math. **84** (1986), 575–616.

[K3] N. Kawanaka, Sintani lifting and Gelfand-Graev representations, in "The Arcata conference on representations of finite groups," Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol.**47–1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 147–163

[L] G. Lusztig, On the representations of reductive groups with disconnected centre, Astérisque **168** (1988), 157–166.

[S1] T. Shoji, Some generalization of Asai's result for classical groups, In "Algebraic groups and related topics", Advanced Studies in Pure Math., Vol.**6**, Kinokuniya, Tokyo and North Holland, Amsterdam, 1985, 207–229.

[S2] T. Shoji, Shintani descent for exceptional groups over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **34** (1987), 599–653.

[S3] Shoji, T.: Character sheaves and almost characters of reductive groups, Adv. in Math. **111** (1995), 244 - 313, II, ibid. **111** (1995), 314 - 354.

[S4] Shoji, T.: Shintani descent for special linear groups, preprint.