数理解析研究所講究録
992 巻 1997 年 236-243

分散相互排除システムの可用度を改善するコーラム再割当アルゴリズム

原田 隆
広島大学総合情報処理センター

山下 雅史
広島大学工学部第二類

1 はじめに

分散システムにおいて, 複数のプロセスにより共有される資源, 例えば, プロセッサ, 共有メモリ, 複製データベースにおけるデータ項目など, の競合解決問題は分散相互排除問題と呼ばれる. その基本的要求は, 複数のプロセスが共有資源へ同時にアクセスしないよう調停することである. そのような要求を満たすことを意図して作成されたアルゴリズムは, 分散相互排除アルゴリズムと呼ばれる. コータリとは, そのアルゴリズムにおいて用いられるデータ構造であり, 互いに交わるプロセスの部分集合 (コーラムと呼ばれる) の集合である. プロセスが共有資源にアクセスするとき, あるコーラムに属するすべてのプロセスから許可を得なければならないようにすれば, 任意の 2 つのコーラムが交わることにより, 高々1 つのプロセスしか共有資源にアクセスしないことが保証される.

コータリを用いた分散相互排除システムの特徴は耐故障性が高いことであり, これまで, 可用度に関するコータリの特徴づけや可用度の高いコータリの構成方法などについて, 多くの研究が行なわれてきた (例えば, [1, 2, 3, 5, 6, 7]). しかしながら, それらのほとんどは分散システムのトポロジーが完全結合である場合を仮定している. トポロジーが非完全結合の場合におけるコータリの理論的な特性は, リングや木などの単純な場合しか明らかでなく, また, コータリ構成手法も経験主義的なものしか提案されていない.

我々はこれまで, 茨木ら [5] の提案した G-支配 (G-domination) という概念に基づき, 非完全結合ネットワークにおける可用度の高いコータリの特徴づけを行ってきた [4]. 本稿では, その特徴づけに基づいたコータリ構成アルゴリズムを提案する. それは, 与えられたネットワーク上に定義されたコータリを, そのコーラムの接続性に応じて再割り当てし, より可用度の高いコータリを得るものである. 本稿は, 以下の節から構成される. 第 2 節に必要な定義を示す. 第 3 節では, アルゴリズムの基礎となる定理について述べる. 第 4 節で 2 つのコーラム再割当アルゴリズムを提案し, 第 5 節でそれらの評価を行なう.

2 定義

無向グラフ $G=(V,E)$ を分散システムのトポロジーとする. ここで, 各頂点 $v_i \in V$ はプロセス (またはノード), 各辺 $e_k=(v_i,v_j) \in E$ はプロセス v_i と v_j 間の通信リンクを表す.

定義 1 [3] V を頂点の全体集合とする. 以下の式を満たす V の非空な集合 C を V 上のコータリという.

(i) (Intersection property) $\forall p,q \in C\ [p \cap q \neq \emptyset]$,

(ii) (Minimality) $\forall p,q \in C\ [p \not\subset q]$.

コータリ C の要素はコーラムと呼ばれる. □

定義 2 [3] C と D を V 上のコータリとする. $C \neq D$, かつ, 任意の $p \in D$ に対して $q \subseteq p$ であるような $q \in C$ が存在するとき, C は D を支配する (dominate) という。また, 他のいかなるコータリに支配されないコータリは, ND コータリ (nondominated coterie) と呼ばれる. □

ここで, コータリを用いた相互排除アルゴリズムの概略を述べる. 臨界領域に入ろうとするプロセス (頂点) は, いずれかのコーラムに属するすべてのプロセスから許可を得なければならない. 許可を与えたプロセスは, その許可が戻るまで別のプロセスに許可を与えないようにすれば, コータリの intersection property により, 同時に臨界領域に入るプロセスの数が高々1であることが保証される.

定義 2はコータリの可用度と密接な関係がある. グラフ G 上のコータリ C の可用度とは, G の各頂点あるいは各辺に稼働確率 (operating probability) が与えられたとき, C を用いる相互排除アルゴリズムで, 少なくとも 1 つのプロセスが相互排除を実行できる確率である (故障形態は停止故障 (fail-stop) を仮定する). コータリ C がコータリ D を支配するならば, 可用度の点で C は D よりも優れているといえる. なぜならば, D を用いるアルゴリズムにおいて, あるプロセスが D のコーラム q に属するすべてのプロセスから許可を得ることに成功したとすると, C を用いるアルゴリズムでも C のコーラム $q'(\subseteq q)$ に属するすべてのプロセスから必ず許可を得ることができるからである. それゆえ, ND コータリのみが (可用度に関する) 最適コータリの候補となる.

定義 2は分散システムのトポロジーが完全結合である場合, 可用度の高い相互排除システムを設計するための良い指標となるが、トポロジーが非完全結合の場合には, その影響を反映することはできない. このため, 茨木らは G-支配という概念を提案し, 木およびリング型ネットワークでの最適コータリの解析を行なった [5].

定義 3 [5] $G = (V, E)$ をグラフ, C を V 上のコータリとする. ある $q \in C$ に対して $q \subseteq V_h$であるような G のすべての連結極小部分グラフ $h = (V_h, E_h)$ の集合を $\mathcal{H}_G(C)$ で示す. ここで, h が極小とは, いかなる h の真部分グラフも上の条件を満たさないことを意味する. それゆえ, $\mathcal{H}_G(C)$ は木の集合である.

$\mathcal{H}_G(C)$ に属する木のうち, その真部分木もまた $\mathcal{H}_G(C)$ に属しているような木を $\mathcal{H}_G(C)$ から取り除いた結果得られる集合 ($\mathcal{H}_G(C)$ の部分集合) を $\mathcal{H}^*_G(C)$ で示す. ならば, $\mathcal{H}^*_G(C)$ に属する任意の相異なる 2 つの木 g, h に対し, g が h の部分グラフである, という関係は成り立たない. この性質を $\mathcal{H}^*_G(C)$ の minimality と呼ぶ. □

定義 4 [5] $G = (V, E)$ をグラフ, C と D を V 上の 2 つのコータリとする. $\mathcal{H}^*_G(C) \neq \mathcal{H}^*_G(D)$, かつ, 任意の $g \in \mathcal{H}^*_G(D)$ に対して h が g の部分木であるような $h \in \mathcal{H}^*_G(C)$ が存在するとき, C は D を G-支配する (G-dominate) という。また, 他のいかなるコータリに G-支配されないコータリは, G-ND コータリ (G-nondominated coterie) と呼ばれる. □

コータリ C がコータリ D を G-支配するならば, グラフ G において, C を用いるアルゴリズムは D を用いるものよりも高い可用度を持つことが保証される. また, ND コータリと同様に, G-ND コータリのみが G 上の最適コータリの候補となる.

定義 5 Q を V の非空な部分集合の集合とする. Q に属する要素のうち, その真部分集合もまた Q に属しているような要素を Q から取り除いた結果得られる集合を $MinSet(Q)$ で示す. ある $q \in Q$ に対し, $q \subseteq r$ であるような V のすべての部分集合 r の集合を $MaxSet(Q)$ で示す. □

定義 6 C を V 上のコータリ, s を V の部分集合とする. $MinSet(\{q | q \in MaxSets(C) \wedge q \not\subseteq s\})$ という式で表される V の部分集合の集合を $C \backslash \{s\}$ で示す. □

3 基本的定理

本節では, グラフ上のコータリに関する特徴づけの結果を示す. これらは, 今回提案するアルゴリズムの基礎となるものである. なお, 以降より, グラフ f が g の部分グラフ (真部分グラフ) であることを $f \subseteq g$ ($f \subset g$) という式で表すことにする. また, $\mathcal{T}(G)$ という記号により, グラフ G のすべての非サイクル的な連結部分グラフ (すなわち, 木) の集合を示す.

定理 1 [5] $G = (V, E)$ をグラフ, C と D を V 上の 2 つのコータリとする. D が C を支配するならば, 以下の式が成り立つ.

$$A_G(C) \leq A_G(D),$$

ここで, $A_G(C)$ はグラフ G 上のコータリ C の可用度を示す. □

定理 2 [5] $G = (V, E)$ をグラフ, C と D を V 上の 2 つのコータリとする. D が C を G-支配するならば, 以下の式が成り立つ.

$$A_G(C) \leq A_G(D).$$

□

以下の定理 3および 4は, それぞれ, グラフ G 上のコータリが他のコータリから G-支配されるための必要十分条件と十分条件を与える. 定理 4は必要条件ではないが, 定理 3に比べてより少ない計算量で G-支配性のチェックができる. 今回提案するアルゴリズムのひとつは定理4に基づいている. なお, 証明は [4] を参照のこと.

定理 3 [4] $G = (V, E)$ をグラフ, C を V 上のコータリとする. 以下の式を満たす $f = (V_f, E_f) \in \mathcal{T}(G)$ が存在するとき, およびそのときに限り, C は他のコータリから G-支配される.

$$\text{任意の } h = (V_h, E_h) \in \mathcal{H}^*_G(C) \text{ に対し,} \quad h \not\subseteq f \text{ かつ } V_h \cap V_f \neq \emptyset. \tag{1}$$

□

V の部分集合を s とする. 頂点集合が s であるような G の連結成分が存在するならば, s は自己連結であるという, さもなければ, s は自己非連結であるという.

定理 4 [4] $G = (V, E)$ をグラフ, C を V 上のコータリとする. 以下の式を満たすコーラム $q \in C$ が存在するとき, C は他のコータリから G-支配される.

$$q \text{ は自己非連結かつ, } \overline{q} \text{ は自己連結.} \tag{2}$$

□

以下の補題 1と 2は, 定理 5の証明に用いられる.

補題 1 [4] $G = (V, E)$ をグラフ, C を V 上のコータリとする. $f = (V_f, E_f)$ を $\mathcal{T}(G)$ に属する任意の木とする. このとき, $q \subseteq V_f$であるような $q \in C$ が存在するならば, $h \subseteq f$ であるような $h \in \mathcal{H}^*_G(C)$ が存在する. □

補題 2 [3] C を V 上のコータリとする. 以下の式を満たす V の部分集合 s が存在するとき, およびそのときに限り C は他のコータリから支配される.

$$\text{任意の } q \in C \text{ に対し,} q \not\subseteq s \text{ かつ } q \cap s \neq \emptyset. \tag{3}$$

□

定理 5は, グラフ G 上の ND コータリが他のコータリから G-支配されるための必要十分条件であり, 今回提案するもうひとつのアルゴリズムの基礎となる.

定理 5 $G=(V,E)$ をグラフ, C を V 上の ND コータリとする. 以下の式を満たすコーラム $q\in C$ および $G-q$ の連結成分 $W=(V_W,E_W)$ が存在するとき, およびそのときに限り, C は他のコータリから G-支配される.

$$G-V_W\text{の任意の連結成分 } W'=(V_{W'},E_{W'}) \text{ および, 任意のコーラム } p\in C \text{ に対して, } p\not\subseteq V_{W'}, \tag{4}$$

ここで, $G-s$ (s は V の部分集合) は, $V-s$ から誘導される G の部分グラフである.

Proof. C を G 上の ND コータリとする. ならば, 式 (4) を満たす $q\in C$ と $G-q$ の連結成分 W が存在することが, 定理 3の式 (1) を満たす G の部分木が存在することと同値であることを示す.

If part: C は他のコータリから G-支配されると仮定する. ならば, 定理 3により任意の $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ に対して $h\not\subseteq f$ かつ $V_h\cap V_f\neq\emptyset$ であるような G の部分木 $f=(V_f,E_f)$ が存在する.

C は ND なので補題 2によって, $q\subseteq V_f$ または $q\cap V_f=\emptyset$ であるようなコーラム $q\in C$ が存在する. $q\subseteq V_f$ であるような $q\in C$ が存在すると仮定すると, 補題 1によって, $h\subseteq f$ であるような $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ が存在することになり, 最初の仮定に矛盾する. ゆえに, $q\cap V_f=\emptyset$ であるようなコーラム $q\in C$ が存在すると仮定してよい.

まず, $G-q$ 内の連結成分について考える. $q\cap V_f=\emptyset$ という事実より, $G-q$ 内に木 f を部分グラフとして含むような連結成分が存在すると推論してよい. このような $G-q$ の連結成分を $W=(V_W,E_W)$ とする (すなわち, $f\subseteq W$). 次に, $G-V_W$ 内の任意の連結成分を固定し, $W'=(V_{W'},E_{W'})$ とする. ならば, $V_W\cap V_{W'}=\emptyset$ が成り立つことは明らかである.

以下, 任意のコーラム $p\in C$ に対して $p\not\subseteq V_{W'}$ という関係が成り立つことを背理法により証明する. $p\subseteq V_{W'}$ であるような $p\in C$ が存在すると仮定する. 連結成分 W' の生成部分木が存在し, それを $f'=(V_{f'},E_{f'})$ とする (すなわち, $V_{f'}=V_{W'}$). ならば, $p\subseteq V_{f'}$ であり, 補題 1より $h\subseteq f'$ であるような $\mathcal{H}_G^*(C)$ の要素 $h=(V_h,E_h)$ が存在する. ならば, $V_W\cap V_{W'}=\emptyset$, $V_f\subseteq V_W$ ($f\subseteq W$ より) および $V_h\subseteq V_{W'}$ ($h\subseteq f', V_{f'}=V_{W'}$ より) という関係から, $V_h\cap V_f=\emptyset$ という式が導かれ, 仮定に矛盾する. ゆえに, 任意の $p\in C$ に対して $p\not\subseteq V_{W'}$ という関係が成り立つ. 以上から, C が他のコータリから G-支配されるならば, 式 (4) を満たす $q\in C$ および $G-q$ の連結成分 W が存在することが示された.

Only if part: 式 (4) を満たす C のコーラム q および $G-q$ の連結成分が存在するならば, この連結成分に対応する生成部分木に対して定理 3の式 (1) が成り立つことを示す. いま, 式 (4) を満たすコーラム q および $G-q$ の連結成分 $W=(V_W,E_W)$ が存在すると仮定する. $q\cap V_W=\emptyset$ が成り立つことは明らかである. また, W の生成部分木が存在し, それを $f=(V_f,E_f)$ とする (すなわち, $V_f=V_W$).

まず, 任意の $h=(V_h,E_h)\in\mathcal{H}_G^*(C)$ に対して $h\not\subseteq f$ という関係が成り立つことを背理法により示す. $h\subseteq f$ であるような $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ が存在すると仮定する (すなわち, $V_h\subseteq V_f$). ならば, $\mathcal{H}_G^*(C)$ の定義によって, $q'\subseteq V_h$ であるようなコーラム q' が存在する. ならば, $q\cap V_W=\emptyset$ および $V_h\subseteq V_f=V_W$ という関係より, $q\cap q'=\emptyset$ という関係が導かれ, コータリ C の intersection property に矛盾する. ゆえに, 任意の $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ に対して $h\not\subseteq f$ という関係が成り立つ.

次に, 任意の $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ に対して $V_h\cap V_f\neq\emptyset$ という関係が成り立つことを示す. $\mathcal{H}_G^*(C)$ の任意の要素 h を固定する. $\mathcal{H}_G^*(C)$ の定義により $q'\subseteq V_h$ であるようなコーラム q' が存在する. ならば, 仮定より $G-V_W$ の任意の連結成分 $W'=(V_{W'},V_{F'})$ に対して $q'\not\subseteq V_{W'}$ という関係が成り立つので, $V_h\not\subseteq V_{W'}$ という関係が導かれる. このことは, 任意の $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ は $G-V_W$ 内の単一の連結成分内に含まれないことを意味している. したがって, 任意の $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ は必ず $V_W(=V_f)$ 内のある頂点を含んでいなければならない. すなわち, 任意の $h\in\mathcal{H}_G^*(C)$ に対して $V_h\cap V_f\neq\emptyset$ という関係が成り立つ. 以上から, 式 (4) を満たす C のコーラムおよび $G-q$ の連結成分が存在するならば, この連結成分に対応する生成部分木に対して式 (1) が保持される, すなわち C が他のコータリから G-支配されることが示された. □

4 コーラム再割当アルゴリズム

まず, 与えられた頂点集合から別のコータリを構成する関数 *Replace* の定義を示す. これは, Pascal 風に記述したものである.

Quorum Replace Function

```
function Replace(var V: universal set of vertices;
    C: coterie; s: subset of V): coterie;
var
    C' : set of subsets of V;
begin
    C' := C\{s};
    Replace := MinSet(C' ∪ {s̄})
end.
```

補題 3 V を頂点の全体集合, C を V 上のコータリとする. そして s を V の任意の真部分集合とする. ならば, *Replace*(V,C,s) は V 上のコータリである.

Proof. *Replace*(V,C,s) が minimarity を満たすことは明らかである. Intersection property に関しては, $MaxSet(C')$ は $MaxSet(C)$ の部分集合であり, $C'\neq\emptyset$ なので, C' 内の任意の 2 つの要素は互いに交わる. q を C' に属する任意の要素とする. $q\not\subseteq s$ なので, $q\cap\overline{s}\neq\emptyset$

という式が成り立つ. ゆえに, $MinSet(C' \cup \{\overline{s}\})$, すなわち $Replace(V, C, s)$, は intersection property を満たす. □

定理 4 をベースにしたコーラム再割当アルゴリズムを以下に示す.

Reassignment Algorithm I

1 **program** *Reassignment1* $(INPUT, OUTPUT)$;
2 **var**
3 　$G(V, E)$: graph; C: coterie; x: subset of V;
4 **function** *Detect* (**var** $G(V, E)$: graph; C: coterie): subset of V;
5 **var**
6 　$check$: $Boolean$;
7 　Q : set of subsets of V; 　{set of quorums}
8 　q : subset of V; 　{quorum}
9 **begin**
10 　$Q := C$; $check := false$; $Detect := \emptyset$;
11 　**while** $Q \neq \emptyset$ **and** $check = false$ **do**
12 　**begin**
13 　　Let q be any element in Q, and $Q := Q - \{q\}$;
14 　　**if** q は自己非連結 **and** $\overline{q}$ は自己連結 **then**
15 　　**begin**
16 　　　$Detect := q$; $check := true$
17 　　**end**
18 　**end**
19 **end**;
20 **begin**
21 　$READ(G, C)$;
22 　$x := Detect(G, C)$;
23 　**while** $x \neq \emptyset$ **do**
24 　**begin**
25 　　$C := Replace(V, C, x)$; $x := Detect(G, C)$
26 　**end**
27 　$writeln(C)$
28 **end.**

定理 6 $G = (V, E)$ をグラフ, C を V 上のコータリとする. D を Algorithm I により C から構成したコータリとする. ならば, 以下の式が成り立つ.

$$A_G(C) \leq A_G(D).$$

Proof. Algorithm I の 23 行から 26 行までの **while** 文の実行により置き換えられ変化するコータリの列を $(C =)C_1, C_2, ..., C_k(= D)$ とする, ここで $k \geq 1$ である. ならば, 任意の i $(1 \leq i \leq k)$ について $A_G(C) \leq A_G(C_i)$ という式が成り立つことを示せば十分である. 以下, i に関する帰納法により証明を行なう.

$i = 1$ のとき, $C = C_1$ より $A_G(C) \leq A_G(C_1)$ が成り立つことは明らかである. 次に, $A_G(C) \leq A_G(C_i)$, ここで $1 \leq i < k$, が成り立つと仮定する. $i < k$ なので, q が自己非連結かつ $\overline{q}$ が自己連結であるようなコーラム $q \in C_i$ が存在する. ならば定理 4の証明部分より, 頂点集合が $\overline{q}$ であるような G の部分木 $f = (V_f(= \overline{q}), E_f)$ が存在し, f が $\mathcal{H}^*_G(C_i)$ に関して定理 3の (1) 式を満たすことを示すことができる. いま, $C' = C_i \backslash \{\overline{V_f}\}$ とする. C' がコータリであることは明らかである. さらに, *Replace* 関数の定義より, C_{i+1} は $MinSet(C' \cup \{V_f\})$ という式で表されるコータリである.

以下, C_{i+1} が C_i を G-支配することを示すために, $\mathcal{H}^*_G(C') = \mathcal{H}^*_G(C_i)$, および C_{i+1} が C' を G-支配することを示す.

f は (1) 式を満たすので, 任意の $h \in \mathcal{H}^*_G(C_i)$ に対し $V_h \cap V_f \neq \emptyset$ という関係が成り立つ. したがって, $V_h \subseteq \overline{V_f}$ であるような $\mathcal{H}^*_G(C_i)$ の要素 h は存在しない. ならば, C_i から C' の構成より, $\mathcal{H}^*_G(C') = \mathcal{H}^*_G(C_i)$ という式が成り立つことは明らかである. さらに, f が (1) 式を満たすこと, および $\mathcal{H}^*_G(C') = \mathcal{H}^*_G(C_i)$ より, 任意の $h \in \mathcal{H}^*_G(C')$ に対し $h \not\subseteq f$ という関係が成り立つ. ならば, C' から C_{i+1} の構成より, $\mathcal{H}^*_G(C_{i+1})$ は, $\mathcal{H}^*_G(C')$ に f を加え, f の超グラフであるような要素を $\mathcal{H}^*_G(C')$ から取り除いた結果得られる集合であることは明らかであり, 定義 4より, C_{i+1} が C' を G-支配するという関係が成り立つ.

したがって, C_{i+1} が C_i を G-支配することが成り立ち, 定理 2より $A_G(C_i) \leq A_G(C_{i+1})$ という式が成り立つ. 仮定より, $A_G(C) \leq A_G(C_i)$ なので, $A_G(C) \leq A_G(C_{i+1})$ が示された. ゆえに, 任意の i $(1 \leq i \leq k)$ について $A_G(C) \leq A_G(C_i)$ という関係が成り立つ. □

以下は, 定理 5 に基づくコーラム再割当アルゴリズムである.

Reassignment Algorithm II

program *Reassignment2* $(INPUT, OUTPUT)$;
var
　$G(V, E)$: graph; C: coterie; x: subset of V;
function *Detect* (**var** $G(V, E)$: graph; C: coterie): subset of V;
var
　$result, check$: $Boolean$;
　Q_1, Q_2: set of subsets of V; 　{set of quorums}
　T_1, T_2: set of subsets of V;
　　{set of vertex sets of connected components}
　p, q: subset of V; 　{quorum}
begin
　$Q_1 := C$; $result := false$;
　while $Q_1 \neq \emptyset$ **and** $result = false$ **do**
　begin
　　Let q be any element in Q_1, and $Q_1 := Q_1 - \{q\}$;
　　Determine the vertex sets T_1 of the components of $G - q$;
　　while $T_1 \neq \emptyset$ **and** $result = false$ **do**
　　begin
　　　Let V_W be an arbitrary element in T_1, and $T_1 := T_1 - \{V_W\}$;
　　　Determine the vertex sets T_2 of the components of $G - V_W$;
　　　$check := true$;
　　　while $T_2 \neq \emptyset$ **and** $check = true$ **do**
　　　begin
　　　　Let $V_{W'}$ be an arbitrary element in T_2, and $T_2 := T_2 - \{V_{W'}\}$;

```
          Q2 := C;
          while Q2 ≠ ∅ and check = true do
          begin
            Let p be an arbitrary element in Q2,
              and Q2 := Q2 − {p};
            if p ⊆ VW' then check := false
          end
        end ;
        if check = true then
        begin
          Detect := ¬VW;  result := true
        end
      end
    end
  end;
  begin
    READ(G,C);
    x := Detect(G,C);
    while x ≠ ∅ do
    begin
      C := Replace(V,C,x);  x := Detect(G,C)
    end
    writeln(C)
  end.
```

定理 7 $G=(V,E)$ をグラフ, C を V 上の ND コータリとする. D を Algorithm II により C から構成したコータリとする. ならば, 以下の式が成り立つ.

$$A_G(C) \le A_G(D).$$

Proof. 定理 6の証明における f を頂点集合 V_Wがであるような G の部分木に置き換えることにより, 同じ論証を用いて証明することができるので省略する. □

以下の補題は, 入力されたコータリが ND ならば, *Replace* 関数は ND 性を保存することを示す.

補題 4 C を V 上のコータリ, s を V の任意の真部分集合とする. C が ND ならば, $Replace(V,C,s)$ もまた ND である.

Proof. C が ND コータリであると仮定する. V の任意の部分集合 x を固定する. ならば, 補題 2より, $q \subseteq x$ または $q \cap x = \emptyset$ (すなわち, $q \subseteq \overline{x}$) であるようなコーラム $q \in C$ が存在する.

最初に, $q \subseteq x$ を仮定する. $x \subseteq s$ ならば, $\overline{s} \subseteq \overline{x}$である. $\overline{s} \in Replace(V,C,s)$ なので, $p \subseteq \overline{x}$であるようなコーラム $p \in Replace(V,C,s)$ が存在する. $x \not\subseteq s$ ならば, $x \in MaxSet(Replace(V,C,s))$ となるので, ある $p \in Replace(V,C,s)$ に対し $p \subseteq x$ という関係が成り立つ.

次に, $q \subseteq \overline{x}$を仮定する. $\overline{x} \subseteq s$ ならば, $\overline{s} \subseteq x$ であり, ゆえに $p \subseteq x$ であるようなコーラム $p \in Replace(V,C,s)$ が存在する. $\overline{x} \not\subseteq s$ ならば, ある $p \in Replace(V,C,s)$ に対し $p \subseteq \overline{x}$という関係が成り立つ.

いずれの場合においても, $p \subseteq x$ または $p \subseteq \overline{x}$であるようなコーラム $p \in Replace(V,C,s)$ が存在することが示された. したがって, $Replace(V,C,s)$ は ND である. □

以下の定理は, Algorithm II において, 入力されるコータリが ND ならば, 出力されるコータリの G-ND 性が保証されることを述べている.

定理 8 $G=(V,E)$ をグラフ, C を V 上の ND コータリとする. D を Algorithm II により C から構成したコータリとする. ならば, D は G-ND コータリである.

Proof. 補題 4より, コータリ D は ND であることが保証される. ならば Algotithm II より, コータリ D は定理 5の (4) 式を満たすようなコーラム $q \in D$ および $G-q$ 内の連結成分 W を持たないことが明らかである. ゆえに, D は G-ND である. □

5 評価

本節では, コーラム再割当アルゴリズムを評価するため, ネットワークのトポロジーや入力コータリを変化させたいくつかのケースにおける計算結果を示す. 計算に用いたトポロジーを図-1 に示す. 頂点数が 7 で, 辺の数が異なる 5 種類のネットワークである. 入力コータリは, 表-1 に示される 4 つのタイプのものを用いた. ひとつのタイプのコータリには, コーラムに割り当てる頂点の組合せにより, 複数のコータリが存在する. 例えば, 頂点数が 7 のネットワークにおける 3-Majority コータリは${}_7C_3$個存在する. 計算では, それぞれのタイプにおけるすべてのコータリの可用度を求めたが, 以降に示す結果では, その平均値のみを掲載している. また, 各頂点の稼働確率は表-2 に示すように 2 つのケースに分かれる. いずれもすべての頂点について一様である. 非一様なケースでも計算可能であるが, トポロジーや入力コータリの違いによる比較を容易にするため, 一様としている. また, 辺は故障しないものと仮定している.

表 2: 稼働確率

ケース	各頂点の稼働確率
A	すべて 0.8
B	すべて 0.6

オリジナルのコータリと再割当後のコータリの可用度の比較を表-3 と 4 に示す. 表-3 がケース A, 表-4 がケース B での計算結果である. 可用度の行には, 該当するタイプのすべてのコータリの可用度の平均値が示されている.

計算結果から得られた考察を以下に示す.

図 1: トポロジー

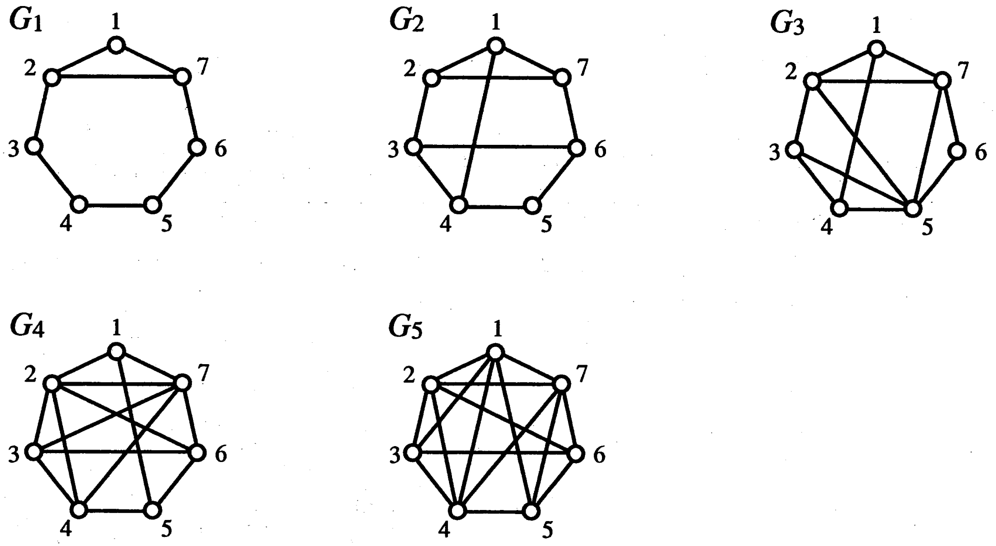

表 1: コータリ

コータリのタイプ	組合せの数	例
3-Majority	35	{{1,2},{1,3},{2,3}}
6-Array	7	{{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{1,6},{1,7},{2,3,4,5,6,7}}
5-Majority	21	{{1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4},{1,2,5},{1,3,5},{2,3,5}, {1,4,5},{2,4,5},{3,4,5}}
7-Majority	1	{{1,2,3,4},{1,2,3,5},{1,2,3,6},{1,2,3,7},{1,2,4,5},{1,2,4,6}, {1,2,4,7},{1,2,5,6},{1,2,5,7},{1,2,6,7},...}

- グラフの辺の数により改善率が異なる. 辺の最も少ない G_1 と最も多い G_5 で改善率が低く, 中間の G_3 で改善率が最も高くなる傾向がある. 提案したアルゴリズムは, それ自身では非連結であるようなコーラムあるいはコーラムを含む頂点集合に対し, その補集合が連結ならば, コーラムをその補集合で置き換えるということを基本にしているが, 辺の数が極端に少ない場合や多い場合では, そのような状況が生じにくいためで あろう.

- 頂点の稼働確率が低いほど改善率が高い. 全体の稼働確率が高い場合, 多くの頂点が稼働している状況ほど確率が高く, 停止している頂点が多くなるほどその確率が低くなる. 一方, 全体の稼働確率が 0.5 に近くなるにつれ, それらの差は小さくなる. このため, 全体の稼働確率が低くなるほど, 置き換えにより改善される可用度は多くなる.

- Algorithm I と II による差は, 今回計算した中では, G_1 の場合でしか現れなかった. これは, 定理 4 の (2) 式を満たさないが, 定理 5の (4) 式を満たすという状況は, グラフの辺が少ない場合でしか生じないことによるものと思われる.

- 3-Majority や 6-Array コータリのほうが, 5-Majority や 7-Majority コータリに比べて改善率が高い傾向があるが, これは, 小さなサイズのコーラムを多く持つコータリの方が置き換えが起こりやすいことに起因すると思われる.

6 まとめ

グラフ G 上の 2 つのコータリを関連付ける G-支配という概念は, トポロジーが G で表現されるネットワーク上の相互排除システムの可用度と密接な関わりを持つ. 本稿で我々は, コータリが G-支配される条件式を提示し, それらの条件に基づいた 2 つのコーラム再割当アルゴリズム, Algorithm I と II, を提案した. これらのアルゴリズムはオリジナルよりも高い可用度を持つコータリを出力する. Algorithm II は Algorithm I より若干複雑となるが, 入力コータリが ND であれば, G-ND コータリが出力されることが保証される. また, トポロジーや入力コータリを変化させたいくつかの計算例により,

表 3: オリジナルと再割当後の可用度の比較 (ケース A)

トポロジー	コータリ	オリジナルの可用度	Algorithm I		Algorithm II	
			可用度	改善率	可用度	改善率
G_1	3-Majority	0.8267	0.8321	0.65%	0.8397	1.57%
	6-Array	0.8277	0.8441	1.98%	0.8460	2.21%
	5-Majority	0.8250	0.8304	0.65%	0.8328	0.95%
	7-Majority	0.8192	0.8274	1.00%	0.8274	1.00%
G_2	3-Majority	0.8784	0.9033	2.83%	0.9033	2.83%
	6-Array	0.8423	0.8837	4.92%	0.8837	4.92%
	5-Majority	0.9159	0.9237	0.85%	0.9237	0.85%
	7-Majority	0.9306	0.9314	0.09%	0.9314	0.09%
G_3	3-Majority	0.8831	0.9105	3.10%	0.9105	3.10%
	6-Array	0.8447	0.8860	4.89%	0.8860	4.89%
	5-Majority	0.9231	0.9358	1.38%	0.9358	1.38%
	7-Majority	0.9404	0.9454	0.53%	0.9454	0.53%
G_4	3-Majority	0.8927	0.9095	1.88%	0.9095	1.88%
	6-Array	0.8500	0.8785	3.35%	0.8785	3.35%
	5-Majority	0.9376	0.9423	0.50%	0.9423	0.50%
	7-Majority	0.9601	0.9601	0.00%	0.9601	0.00%
G_5	3-Majority	0.8953	0.9069	1.30%	0.9069	1.30%
	6-Array	0.8517	0.8719	2.37%	0.8719	2.37%
	5-Majority	0.9414	0.9442	0.30%	0.9442	0.30%
	7-Majority	0.9667	0.9667	0.00%	0.9667	0.00%

表 4: オリジナルと再割当後の可用度の比較 (ケース B)

トポロジー	コータリ	オリジナルの可用度	Algorithm I		Algorithm II	
			可用度	改善率	可用度	改善率
G_1	6-Array	0.5392	0.5569	3.28%	0.5641	4.62%
	7-Majority	0.4406	0.4683	6.29%	0.4683	6.29%
G_2	6-Array	0.5721	0.6178	7.99%	0.6178	7.99%
	7-Majority	0.6190	0.6245	0.89%	0.6245	0.89%
G_3	6-Array	0.5832	0.6375	9.31%	0.6375	9.31%
	7-Majority	0.6438	0.6770	5.16%	0.6770	5.16%
G_4	6-Array	0.5994	0.6302	5.14%	0.6302	5.14%
	7-Majority	0.6936	0.6936	0.00%	0.6936	0.00%
G_5	6-Array	0.6086	0.6299	3.50%	0.6299	3.50%
	7-Majority	0.7102	0.7102	0.00%	0.7102	0.00%

アルゴリズムの有効性を示した.

今後の課題としては, アルゴリズムの計算量の評価およびアルゴリズムの改善による計算量の低減が挙げられる.

参考文献

[1] D. Barbara and H. Garcia-Molina. The vulnerability of vote assignments. *ACM Trans. Computer Systems*, Vol. 4, No. 3, pp. 187–213, August 1986.

[2] D. Barbara and H. Garcia-Molina. The reliability of voting mechanisms. *IEEE Trans. Computers*, Vol. C-36, No. 10, pp. 1197–1208, October 1987.

[3] H. Garcia-Molina and D. Barbara. How to assign votes in a distributed systems. *J. ACM*, Vol. 32, No. 43, pp. 841–860, October 1985.

[4] T. Harada and M. Yamashita. Characterizing G-nondominated coteries on incomplete distributed networks. In *Proc. 10th Int. Conf. on Information Networking*, January 1996.

[5] T. Ibaraki, H. Nagamochi, and T. Kameda. Optimal coteries for rings and related networks. *Distributed Computing*, Vol. 8, pp. 191–201, 1995.

[6] M. Spasojevic and P. Berman. Voting as the optimal static pessimistic scheme for managing replicated data. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, Vol. 5, No. 1, pp. 64–73, January 1994.

[7] Z. Tong and R.Y. Kain. Vote assignments in weighted voting mechanisms. In *Proc. 7th Symp. Reliable Distributed Systems*. IEEE, October 1988.