数理解析研究所講究録
993巻 1997年 134-143

大振幅定在波の波形

九大応力研　　岡村　誠（OKAMURA Makoto）

前々回[1)]の講演では数値的に定在波を求めて，大振幅の極限での定在波の頂角が 90°になることを示そうとした．しかし，極限近くでは精度よく求まらず，大振幅の極限での定在波の頂角を確定することができなかった．今回は改良を加えた結果，ほぼ極限近くまで精度よく定在波を求めることができ，大振幅の極限での定在波の頂角が 90°になることがわかった．

1．これまでの研究

水の波の基礎方程式を直接数値的に解いて，かなり大きい振幅の定在波を初めて求めたのは Schwartz と Whitney[2)]である．彼らは速度ポテンシャルと表面変位を 25 次まで振幅展開して，定在波を求めた．そのままでは，最大振幅の約半分のところで展開パラメーターが収束半径を越えるので，速度ポテンシャルと表面変位は収束しなくなる．彼らはこれを回避するために Padé 近似を使って，かなり大きい振幅の定在波を求め，その最大波高（定在波の最大振幅と思っていてよい）は $0.64 \sim 0.67$ と予想している．

Mercer と Roberts[3)]は時間については数値積分，空間については自由表面上で渦糸近似をして，渦糸の強さを反復法で求め，定在波を計算している．この方法では Schwartz らに比べてはるかに精度よく定在波が計算できていて，かなり極限に近い定在波も求めている．彼らは最大振幅

定在波（最大波高は 0.6202）と極限定在波は異なるものであることを示した．また彼らは極限定在波の頂角は $60\sim70°$ と予想している．

ここで扱う問題も上記のものと全く同じである．しかし，彼らより精度よく求めたために結果が異なってきている．ここでの結果は

- 極限定在波の頂角は 90°
- 最大波高は極限定在波の時で 0.6272

である．

2. 問題の定式化

非圧縮非粘性流体の 2 次元渦なし運動を仮定する．自由表面での表面張力は特に極限波の峰付近では重要だろうけれども，ここでは無視する．また流体の深さは無限大とする．つまり，考えられる最も単純な定在波を求める．速度ポテンシャルを$\phi(x,y,t)$，圧力を $P(x,y,t)$, 重力加速度をgとすれば，基礎方程式は

$$\Delta\phi = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y\to-\infty} \to 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} P &= \phi_t + \tfrac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2) + gy, \\ &= 0, \qquad \text{自由表面上で} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{DP}{Dt} &= \phi_{tt} + 2\phi_{xt}\phi_x + 2\phi_{yt}\phi_y + 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_{xx}(\phi_x^2-\phi_y^2) + g\phi_y \\ &= 0 \qquad \text{自由表面上で} \end{aligned} \tag{4}$$

となる．x は水平方向，yは鉛直方向の座標を表わす．ここでは定在波の波数 k, 未知数である振動数ωにより，以下のような無次元化を行なっている．

$$kx\to x,\quad ky\to y,\quad \omega t\to t,\quad \frac{k^2}{\omega}\phi\to\phi,\quad \frac{k}{\omega^2}g\to g. \tag{5}$$

こうしておくと時間空間ともに2π周期の定在波を求めればよい．未知数である振動数はgに含まれている．対称性の条件としては

$$\phi(x,y,t)=\phi(x+2\pi,y,t), \quad \phi(x,y,t)=\phi(-x,y,t), \tag{6}$$

$$\phi(x,y,t)=\phi(x,y,t+2\pi), \quad \phi(x,y,t)=-\phi(x,y,-t), \tag{7}$$

$$\phi(x,y,t)=-\phi(-x+\pi,y,-t+\pi). \tag{8}$$

(6) は空間の 2π周期性と y軸についての対称性，(7) は時間の 2π周期性と $t=0$ についての反対称性を表わしている．最後の (8) は線形解（$\cos xe^y\sin t$）から，非線形相互作用で作られる全ての項が満たしている条件である．上の条件と基礎方程式 (1), (2) を満足する速度ポテンシャルは

$$\phi=\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{j=2-\mathrm{mod}(k,2)}^{N} A_{kj}\cos kx\exp ky\sin jt, \tag{9}$$

となる．ここで $\mathrm{mod}(k,2)$ は kを 2 で割った余り，Nは展開の最高次数のこと．

上の基礎方程式に加わる条件があと一つある．それは，振幅に関するパラメーター A_cと速度ポテンシャルとの間の関係式で

$$A_c=-\frac{1}{g}\frac{D}{Dt}\phi_y\bigg|_{y=\eta(x,t),x=0,t=0}, \tag{10}$$

となる．ここで$\eta(x,t)$は表面変位である．これは$t=0$での波の峰における流体の加速度を重力加速度で無次元化した量である．極限波の峰における流体の加速度は重力加速度に等しいので，極限波は $A_c=1$ に対応している．速度ポテンシャルを (9) のようにしたので，$t=0$ で最も波形の振幅が大きくなり，その峰の 1 つは $x=0$ となる．

以前の方法は，代表点（collocation point）を決めて独立な方程式を作った．ここでは，ガラーキン法と呼ばれる方法を採用する．まず，(3), (4)

から，yを数値的に消去する．すると，

$$f(A_{kj}, g; x, t) = 0, \tag{11}$$

という関係式が1つ得られる．これに$\sin lx \sin mt$をかけてxとtについて0から2πまで積分すると

$$F_{lm}(A_{kj}, g) = \int_{x=0}^{\pi} \int_{t=0}^{\pi} f(A_{kj}, g; x, t) \sin lx \sin mt \, dx \, dt = 0, \tag{12}$$

となる．これから，$N(N-1)/2$個の独立な方程式が得られる．同様の操作により，(10)からは

$$H(A_{kj}, g) = 0, \tag{13}$$

という1つの関係式が得られる．これで，独立な方程式は$N(N-1)/2+1$になる．

次に未知数の数について考えてみよう．(9)で

$$A_{11} = \epsilon \ll 1 \tag{14}$$

が主要項になる定在波を求めると

$$\begin{aligned} i < j \text{なら} \quad A_{ij} &= O(\epsilon^{j}) \\ i \geq j \text{なら} \quad A_{ij} &= O(\epsilon^{i+2}) \end{aligned} \tag{15}$$

となる．するとϵ^Nまでの未知数A_{kj}は$N(N-1)/2$個になる．(15)より(9)でkの和が$N-2$までしかない理由がわかる．そのほかに未知数gが1つあるので，未知数と方程式の数が一致する．

ここまでで，未知数A_{kj}, gの$N(N-1)/2+1$個の連立非線形方程式が得られた．ここではそれを反復法の一つであるNewton法で解く．反復法の初期解として$N = 5$の場合の弱非線形解をMathematicaで求めたものを使う．

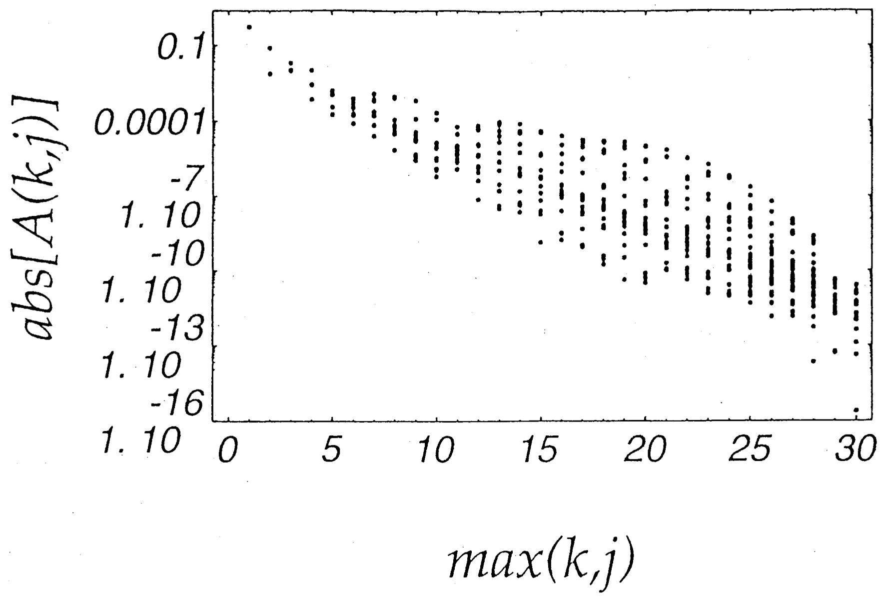

図 1: $A_c = 0.9998$, $N = 30$ の場合の $\max(k,j)$ と A_{kj}の関係.

3. 結果と考察

まず，(9) 式の速度ポテンシャルϕの展開係数 A_{kj}の k, j依存性を見てみよう．図 1 に $A_c = 0.9998$（ここで計算した定在波のうち最も極限波に近い場合），$N = 30$ の時の展開係数 A_{kj}の絶対値を示している．横軸は k, jのうちで大きい方の値 $M = \max(k,j)$ であり，縦軸は A_{kj}の絶対値で，対数スケールである．Mが増加するにつれて，A_{kj}が減少しているのがわかる．特に，Mが 20 から 30 になるにつれて，急激に減少している．$M = 30$ の時の A_{kj}の最大値は 2.5×10^{-11}である．よって，展開次数を $N = 30$ としてかまわないだろう．また，この図から，$A_c = 0.9998$ の時，展開次数を $N = 20$ とするのはよくないこともわかる．もちろん，もっと小さい A_cに対しては，早く収束していくので，$N < 30$ でもかまわない．

図 2 は A_cを 0.01 から 0.9998 まで変化させた時（振幅をどんどん大きくさせることに対応），時刻 $t = 0$ での定在波の波形の最大の傾きとその場所 x を表わしている．A_cを大きくしていくと，波形の最大の傾きも大きくなり，極限 ($A_c = 1$) では傾きが 45°になっているように見える．ま

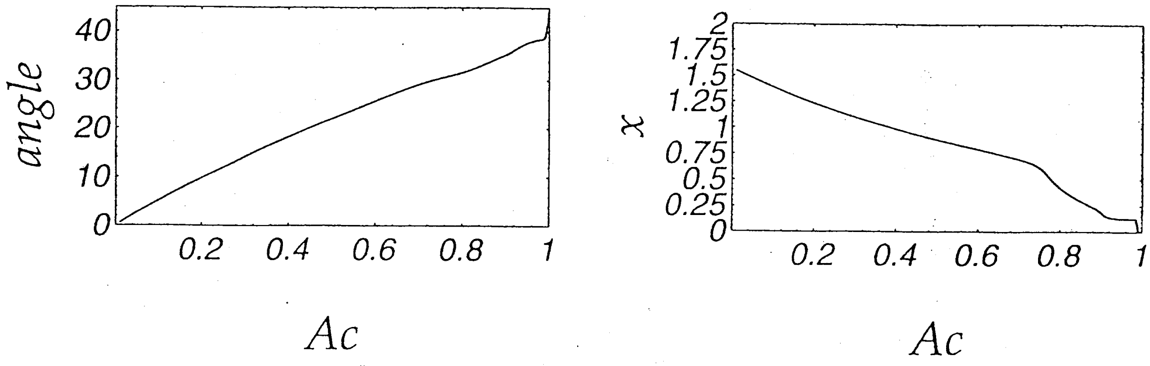

図 2: 時刻 $t = 0$ での定在波の波形の最大の傾きとその場所 x. $N = 30$ の場合.

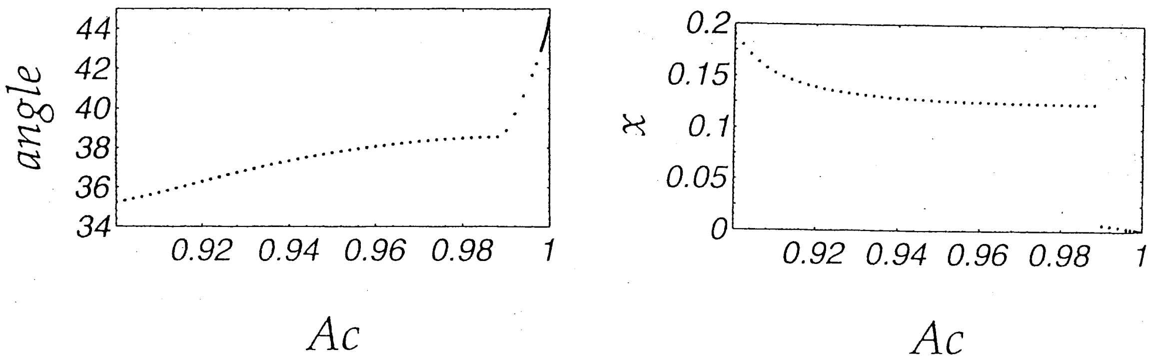

図 3: 時刻 $t = 0$ での定在波の波形の最大の傾きとその場所 x. $N = 30$ の場合. 図 2 の拡大図.

た，その最大の傾きをとる場所も $x = 0$ に近づいているように見える. $A_c \approx 0.99$ で傾きを表わす曲線の折れ曲がりの所をはっきり見るために，その近傍での拡大図を図 3 に示す. これを見ると $A_c \approx 0.99$ で傾きを表わす曲線は折れ曲がっていて，その場所を表わす曲線は不連続であることがわかる. これの原因を調べてみよう. 図 4 に $A_c = 0.986, 0.988, 0.99, 0.992$ （下から順に）の場合の表面の傾きを場所 x の関数として示している. $A_c < 0.988$ の時は図中の左のピークが右のピークよりも小さく，$A_c > 0.99$ の時は図中の左のピークが右のピークよりも大きくなっている. このために $A_c \approx 0.99$ で傾きを表わす曲線は折れ曲がっていて，その場所を表わす曲線は不連続になっている. A_cが 0.986 から 0.992 に変化

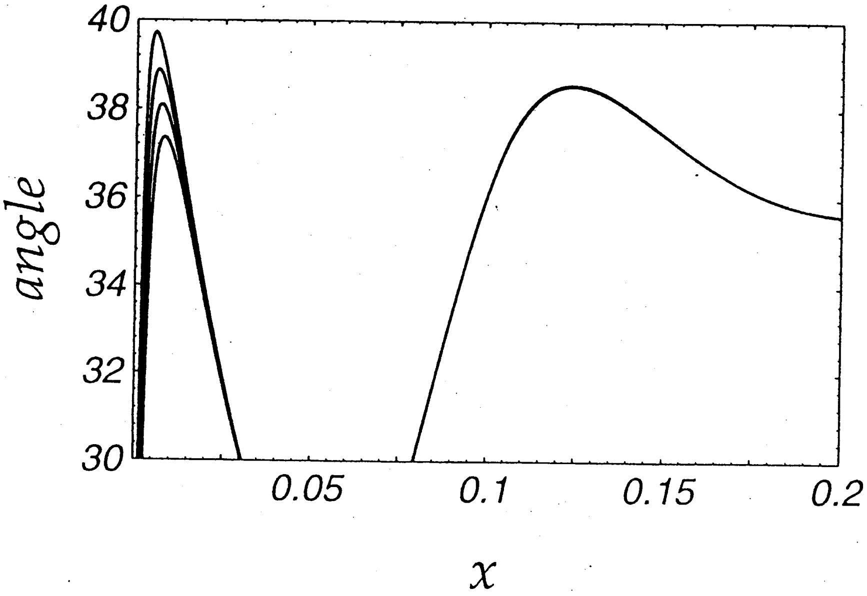

図 4: 時刻 $t=0$ で場所 x での表面の傾き．$N=30$ の場合．下から順に $A_c=0.986$, 0.988, 0.99, 0.992.

する間には右のピークはほとんど変化しない．このことは図 3 からもわかる．

図 3 を見ると，$A_c\to 1$ の時，表面の最大角度→ 45°（頂角→ 90°）を示している．もっとはっきり見るために，これをさらに拡大したものを図 5 に示す．この図は，ここで求めた数値計算の結果（•）と以前に求めた局所解析解[4)]から得られる結果（実線）を示している．局所解には深さに対応する未知のパラメーター B_3 が含まれている．局所解と数値解がうまく一致するように $B_3=0.65$ と選んだのが，図 5 である．このようにうまく一致するようにパラメーターが決められたことは，この局所解が数値解につながっていることを示している一つの証拠である．この局所解から $A_c=1$ で頂角が 90°（表面の最大角度は $x=0$ で 45°）になることがわかるので，極限定在波の頂角は 90°とみなすことができるだろう．数値解の結果を素直に（？）外挿しても表面の最大角度は $A_c=1$ で 45° になるだろう．局所解は図 4 の 2 つのピークの左側のみしか表わせないことを注意しておこう．

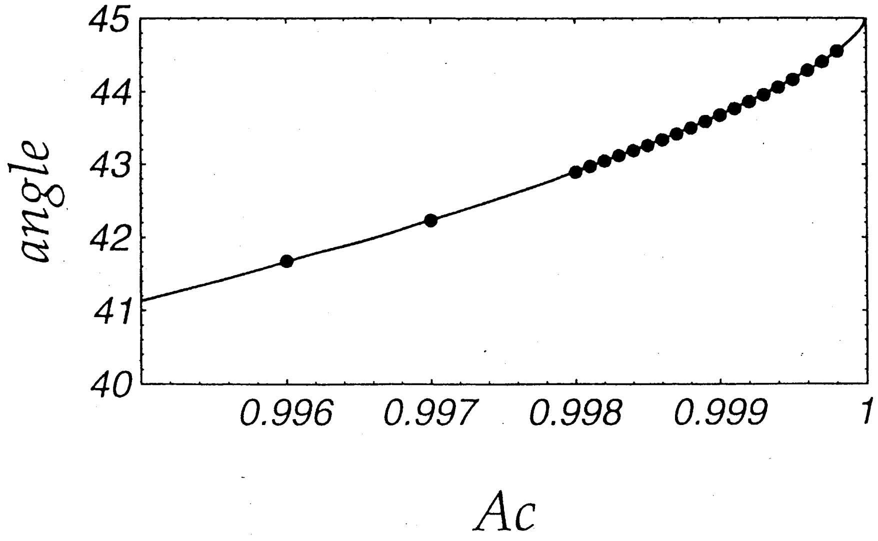

図 5: 時刻 $t=0$ で定在波の波形の最大の傾き．$N=30$ の場合．図 3 の拡大図．•は数値計算の結果．実線は局所解析解．

図 6 は A_c と波高（図中では steepness と書いている．今の場合 $t=0$ での表面変位の最大値と最小値との差の半分）の関係を示している．Mercer and Roberts[3)]は波高が A_c の単調関数でないという結果を求めているが，ここでの結果は単調関数であることを示している．最大波高は0.6272である．図 7 は A_c と波のエネルギーとの関係を示している．$A_c \approx 0.89$ の時，エネルギーが最大になる．その時には振動数は最小になっているようである．

ここで Mercer and Roberts の定式化には欠点を含んでいることを指摘しておこう．彼らは定在波を求めるのに表面変位の空間微分を使っている．ここで求めた方法には速度ポテンシャルの空間微分は含んでいるが，表面変位の空間微分はない．この議論の詳細は岡村[4)]を参照．もし極限定在波がここで求めたように峰で 90°にとがるならば，そこでの表面変位の空間微分は 2 つの値をもつ．これが彼らの方法では極限に近づくと，うまく定在波が求まらなかった理由である．彼らは $A_c = 0.98$ まで計算しているが，ここで求めた結果と一致するのは $A_c < 0.92$ の場合で

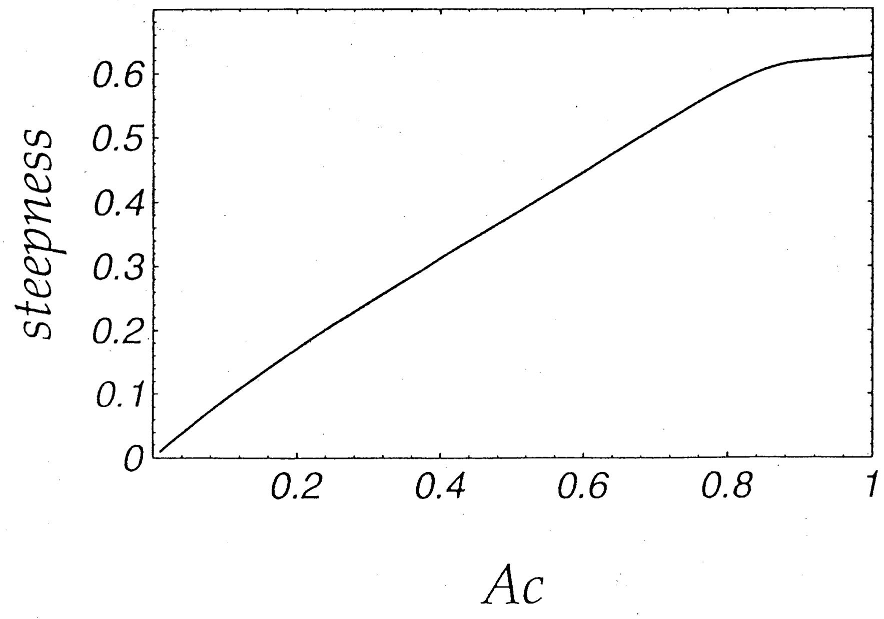

図 6: A_cと波高の関係. $N = 30$ の場合.

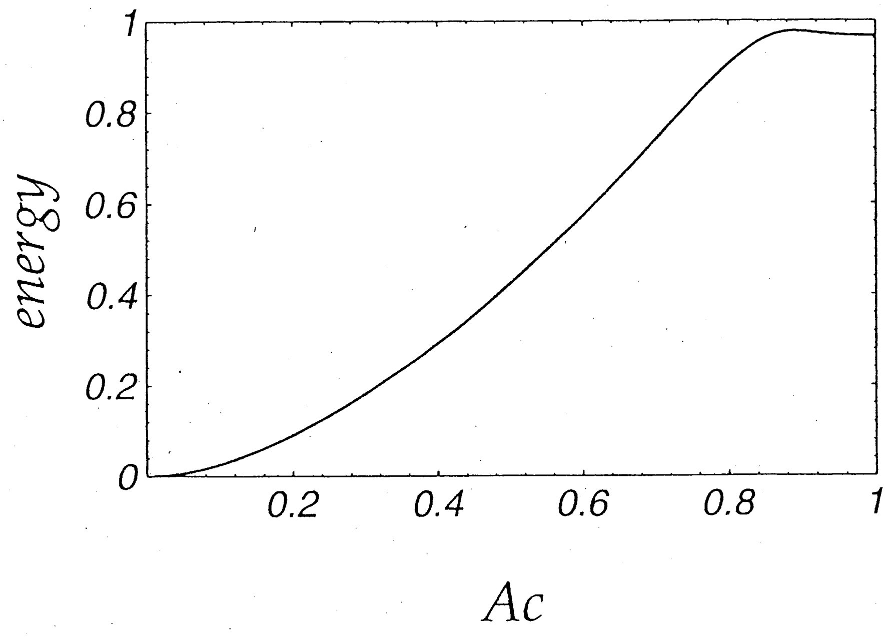

図 7: A_cと波のエネルギーとの関係. $N = 30$.

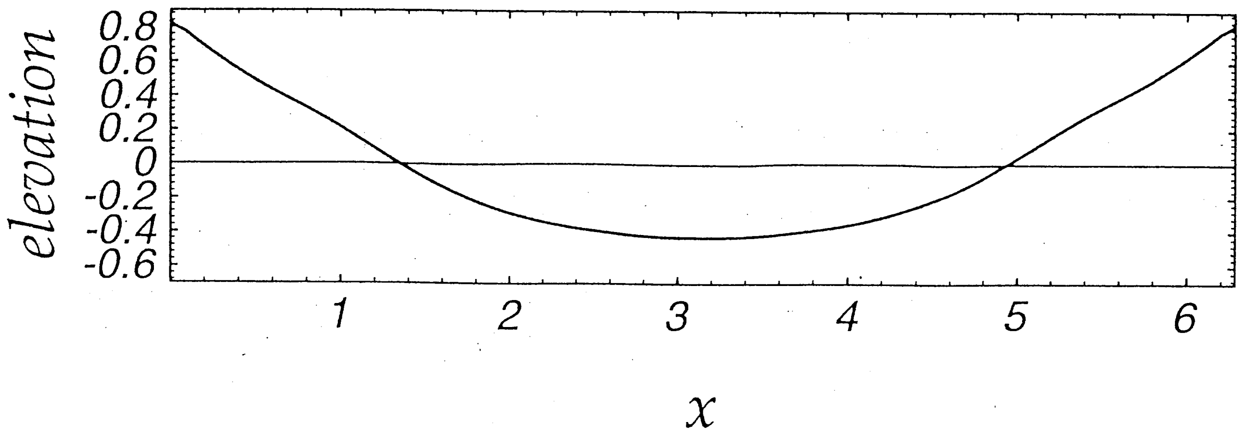

図 8: 時刻 $t=0$ での表面変位. $A_c=0.9998$. $N=30$.

ある.

最後に時刻 $t=0$ でのほぼ極限定在波 ($A_c=0.9998$) の表面変位を図 8 に示しておく.

参考文献

1) 岡村　誠 (1995) 京大数理研講究録 908, 217–224.

2) L.W. Schwartz & A.K. Whitney (1981) *J. Fluid Mech.*, **107**, 147–171.

3) G.N. Mercer & A.J. Roberts (1992) *Phys. Fluids*, **A4**, 259–269.

4) 岡村　誠 (1994) 京大数理研講究録 866, 240–251.