

幾何学的な拡がりを考慮した Burgers 方程式に対する積分方程式法

阪大基礎工 杉本信正 (Nobumasa SUGIMOTO)
阪大基礎工 池田和史 (Kazufumi IKEDA)

Abstract

This paper presents a new integral-equation method to solve Burgers equation for nonlinear acoustic waves in a duct spreading geometrically along its axis. The nonlinear integral equation is derived by effecting the Cole-Hopf transformation to the Burgers equation and then by applying the Green's function to the equation thus transformed. Under a step initial condition, two methods are demonstrated to solve the integral equation, one being the method of perturbation expansion and the other the method of successive approximation. They are exemplified by solving propagation of an acoustic shock wave in a duct whose cross-sectional area changes abruptly in the form of a step function. It turns out that the method of perturbation expansion gives rise to the non-uniformity to fail in describing a long-time and far-field behavior. By contrast, the method of successive approximation solves the linearized integral equations by iterations in finite times to derive exact solutions if the convergence is attained. It is revealed that the method of successive approximation can yield a uniformly valid solution.

1. はじめに

本報告は、断面が変化する管の中を一方向に伝播する非線形音波の振る舞いを記述する、次のいわゆる“一般解された Burgers 方程式”⁽¹⁾を解析的に解く方法について考える：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{v}{2A} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (1)$$

ここで、 t, x をそれぞれ時刻、管の軸方向座標として、 $v(t, x)$ は断面にわたって平均された空気の軸方向の速度を表し、 $A(x)$ は断面積である。この方程式は、音波の代表波長 l 、音速 a_0 および基準断面積 A_0 で既に無次元化されている。音波によって誘起される空気の速度は音速に比べてはるかに遅いので、 $|v|$ は 1 に比べて十分小さく、また断面積 $A(x)$ は $O(1)$ であるが、波長のスケールでは緩やかに変化すると仮定しているため、 $|\partial A / \partial x|$ も十分小さい。 ν は散逸効果を表す小さなパラメータ ($0 < \nu \ll 1$) で、音の拡散率 ν_d を用いて $\nu_d / 2la_0$ と定義される。このように、非線形項、散逸項、右辺の断面の幾何学的な拡がりを表す項は、いずれも左辺の第 1 項、第 2 項に比べて小さいことに注意する。

式(1)で右辺のない Burgers 方程式は、Cole-Hopf の変換によって線形化され、厳密に解が得られることはよく知られている。⁽²⁾ しかし、右辺が存在するときには、筆者の知る限りでは、厳密解を求める手法はないようである。これまでの解析では、 ν が小さいことを使った接合漸近展開の手法が用いられてきた。⁽¹⁾ 本報告は、音響衝撃波が管の中を伝播する場合を想定し、方程式(1)を解析的に解く新しい手法について述べる。まず、(1)を Cole-Hopf の変換を用いて書き換え、こうして得られた方程式をグリーン関数を用いて非

線形の積分方程式に変換し、この積分方程式を解く。その解法には、式(1)の右辺が小さいことを利用して、摂動展開法を用いることが容易に考えられる。ところが、この方法では遠方場まで一様に成り立つ解を求めることができないことが分かる。そこで、これに代わって、逐次近似法なる方法を提案する。この方法の利点は、逐次近似解がもし収束すれば厳密解が得られることである。例として、断面積がステップ関数的に変化する場合の解を求め、衝撃波がステップを越えるときにどれだけ強さが変化するかを求める。

2. 断面変化のない場合の Burgers 方程式の解のまとめ

まず最初に普通の Burgers 方程式の解について纏めておく。方程式(1)の右辺が無いと、それは Cole-Hopf の変換

$$v(t, x) = -2\nu \frac{\varphi_x(t, x)}{\varphi(t, x)} \quad (2)$$

によって次の線形方程式に帰着される：

$$\mathcal{L}[\varphi] \equiv \varphi_t(t, x) + \varphi_x(t, x) - \nu \varphi_{xx}(t, x) = 0. \quad (3)$$

以下添え字は偏微分を表す。

いま x 方向に無限に長い管を考え、初期時刻 $t = 0$ 、で v が $x = x_0$ を境にその前方 ($x > x_0$) では静止しており、後方 ($x < x_0$) では一様に一定な速度 $v_0 (> 0)$ で動く、ステップ状の不連続な次の初期条件を考える：

$$v(t = 0, x) = v_0[1 - h(x - x_0)]. \quad (4)$$

ここで、 $h(x)$ は単位ステップ関数である。この条件は、変換(2)によって、 φ に対して次のように書き換えられる：

$$\varphi(0, x) \equiv B(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{v_0}{2\nu}(x - x_0)\right] & (x < x_0), \\ 1 & (x \geq x_0). \end{cases} \quad (5)$$

初期条件(5)から出発する式(3)の解は、グリーン関数 $G(t, x)$ を用いて

$$\varphi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x - \xi) B(\xi) d\xi \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $G(t, x)$ は

$$G(t, x) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{4\nu t}\right] \quad (7)$$

である。

初期条件(5)を式(6)に代入すると、

$$\varphi(t, X) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{X + v_0 t / 2}{\sqrt{4\nu t}} \right) \right] + \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{v_0}{2\nu} X \right) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{X - v_0 t / 2}{\sqrt{4\nu t}} \right) \right] \quad (8)$$

となる. ここで, $X = x - x_0 - ct$, $c = 1 + v_0/2$ であり, $\operatorname{erf}(x)$ は誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad (\operatorname{erf}(\infty) = 1) \quad (9)$$

である. この解で, X を固定して時間 t が十分経過した後の漸近形を求めると, 次のようになる:

$$\varphi(t, x) = 1 + \exp \left[-\frac{v_0}{2\nu} (x - x_0 - ct) \right]. \quad (10)$$

これに変換(2)を施すと, Burgers 方程式の定常衝撃波解が得られる:

$$v(t, x) = v_0 \left\{ \frac{\exp[-v_0(x - x_0 - ct)/2\nu]}{1 + \exp[-v_0(x - x_0 - ct)/2\nu]} \right\} = \frac{v_0}{2} \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{v_0(x - x_0 - ct)}{4\nu} \right] \right\}. \quad (11)$$

図1は, 初期に $v_0 = 0.1$ をもつ不連続がどのように定常状態に落ち着くかを示したものであり, v の空間的な波形が時刻 $t/\nu = 0, 10, 100, 1000, \infty$ で描かれている. ν の値は十分小さいので, t の時間では速やかに定常状態に落ち着くことが分かる.

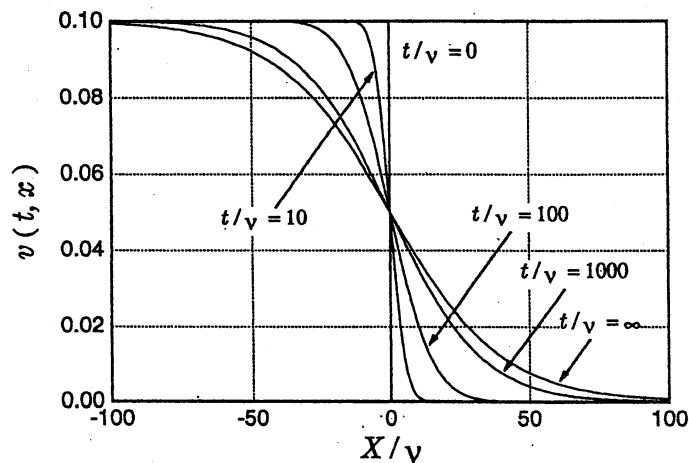


図1 : ステップ関数で与えた初期状態が定常衝撃波に発展する様子

3. 非線形積分方程式への変換

一般化された Burgers 方程式に Cole-Hopf の変換を施しても、左辺は線形化されるものの、右辺が次式に見られる新たな非線形項を生じさせる：

$$\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi] \varphi. \quad (12)$$

ここで、 $\mathcal{L}[\varphi]$ は既に式(3)で定義されており、 \mathcal{N} は

$$\mathcal{N}[\varphi] \equiv -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x d\eta \frac{\varphi_\eta(t, \eta) A_\eta(\eta)}{\varphi(t, \eta) A(\eta)} \quad (13)$$

である。この方程式は、グリーン関数 $G(t, x)$ を用いると以下のように書き直すことができる：

$$\varphi(t, x) = \varphi^{(0)}(t, x) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^t d\tau G(t - \tau, x - \xi) \mathcal{N}[\varphi(\tau, \xi)] \varphi(\tau, \xi). \quad (14)$$

ここで、 $\varphi^{(0)}(t, x)$ は初期条件(5)をうける方程式(3)の解である。

ところで、第2節で示したように、 $\varphi^{(0)}$ は時間が経つにつれ

$$\varphi^{(0)}(t, x) = 1 + \exp\left[-\frac{v_0}{2\nu}(x - x_0 - ct)\right] \quad (15)$$

に漸近することから、以下の解析では初期値に於ける不連続点 x_0 を十分上流 ($x_0 \rightarrow -\infty$) にとることによって、式(14)の $\varphi^{(0)}$ を定常衝撃波解(15)で与える。したがって、以後 x_0 は初期の不連続点ではなく、 $t = 0$ での衝撃波の中心の位置を表す。

4. 摂動展開法による解

さて、方程式(14)を解くことを考える。いま、断面積が緩やかに変化する、すなわち $|\partial A / \partial x|$ が十分小さいので、このオーダーを $\alpha (\ll 1)$ として、解をこの小さなパラメータによる摂動展開で求めてみる：

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \alpha \varphi^{(1)} + \alpha^2 \varphi^{(2)} + \dots \quad (16)$$

いま第1次項 $\varphi^{(1)}$ まで求めるとして、展開を

$$\varphi(t, x) \simeq \varphi^{(0)}(t, x) + \alpha \varphi^{(1)}(t, x) \equiv \varphi^{\{1\}}(t, x) \quad (17)$$

で打ち切り、式(14)に代入すると、第1次展開 $\varphi^{\{1\}}(t, x)$ は容易に次のように求められる：

$$\varphi^{\{1\}}(t, x) = \varphi^{(0)}(t, x) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^t d\tau G(t - \tau, x - \xi) N^{(0)}(\tau, \xi) \varphi^{(0)}(\tau, \xi). \quad (18)$$

ここで

$$N^{(0)}(t, x) \equiv \mathcal{N}[\varphi^{(0)}] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \frac{\varphi_\eta^{(0)}(t, \eta) A_\eta(\eta)}{\varphi^{(0)}(t, \eta) A(\eta)} d\eta \quad (19)$$

である。このようにして、展開を実際高次にまで進めていくことができる。

ところで、滑らかな関数 $A(x)$ は無限小の跳びをもつステップ関数を無限個重ね合わせるにより表現される。すなわち、 $A(x)$ は次式の積分で表現される：

$$A(x) = A(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{dA(\eta)}{d\eta} h(x - \eta). \quad (20)$$

そこで、最も簡単な例として、 $x = x_1$ でステップ状の跳びをもつ管を考える：

$$A(x) = A_1 \left[1 + \frac{A_2 - A_1}{A_1} h(x - x_1) \right]. \quad (21)$$

これより $x < x_1$ では $A(x) = A_1$, $x > x_1$ では $A(x) = A_2$ である。ただし、 x_1 は x_0 よりはるかに下流側にあるものとし、断面積比 $|(A_1 - A_2)/A_1|$ は十分小さいものとする。この比がいくら小さくても有限である限り、方程式(1)の導出の仮定に矛盾するという批判はあるが、数学的にはこのような場合の解を求めてみる価値は十分ある。

断面積(21)を仮定すると、

$$\begin{aligned} N^{(0)}(t, x) &= \int_{-\infty}^x \frac{\varphi_{\eta}^{(0)}(t, \eta)}{\varphi^{(0)}(t, \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \log [A^{-\frac{1}{2}}(\eta)] d\eta \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\varphi_{\eta}^{(0)}(t, \eta)}{\varphi^{(0)}(t, \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\log \frac{1}{\sqrt{A_1}} + \log \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} h(x - x_1) \right] d\eta \\ &= \alpha \int_{-\infty}^x \frac{\varphi_{\eta}^{(0)}(t, \eta)}{\varphi^{(0)}(t, \eta)} \delta(x - x_1) d\eta \\ &= \alpha E(t) h(x - x_1) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここで、 $\alpha \equiv \frac{1}{2} \log A_1/A_2$ ($|\alpha| \ll 1$) であり、 $E(t)$ は

$$E(t) \equiv -\frac{v_0}{2\nu} \left\{ \frac{\exp[-v_0(x_1 - x_0 - ct)/2\nu]}{1 + \exp[-v_0(x_1 - x_0 - ct)/2\nu]} \right\} \quad (23)$$

である。式(22)と(23)を式(18)に代入し、積分中の $\varphi^{(0)}$ における指数関数を $G(t - \tau, x - \xi)$ の中にいれ、 $\exp[-v_0(x - x_0 - ct)/2\nu]$ を積分の外に出す。すると $\varphi^{\{1\}}$ は次のように求まる：

$$\varphi^{\{1\}}(t, x) = 1 + f(t, x) + [1 + g(t, x)] \exp \left[-\frac{v_0}{2\nu} (x - x_0 - ct) \right]. \quad (24)$$

ここで、 $f(t, x)$ および $g(t, x)$ は

$$f(t, x) = \frac{\alpha}{2} \int_0^t d\tau E(\tau) \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{x - x_1 - k^-(t - \tau)}{\sqrt{4\nu(t - \tau)}} \right] \right\}, \quad (25)$$

$$g(t, x) = \frac{\alpha}{2} \int_0^t d\tau E(\tau) \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{x - x_1 - k^+(t - \tau)}{\sqrt{4\nu(t - \tau)}} \right] \right\} \quad (26)$$

である。ただし、 $k^+ = c + v_0/2 = 1 + v_0$, $k^- = c - v_0/2 = 1$.

いま ν が小さいことを用いて、式(25)および(26)の誤差関数をステップ関数で近似すると、

$$f(t, x) = \alpha \int_0^t d\tau E(\tau) h[x - x_1 - k^-(t - \tau)], \quad (27)$$

および

$$g(t, x) = \alpha \int_0^t d\tau E(\tau) h[x - x_1 - k^+(t - \tau)] \quad (28)$$

となる。また、また、 $\nu \rightarrow 0$ では、 $E(t)$ も漸近的に $-(v_0/2\nu)h[-(x_1 - x_0 - ct)]$ となるので、 $f(t, x)$ および $g(t, x)$ はそれぞれ次のように求まる： $f = g = 0$ in $x < x_1$, 一方 $x > x_1$ では、(i) $f = g = 0$ for $t < t_c [\equiv (x_1 - x_0)/c]$, (ii) $f = g = -(\alpha v_0/2\nu)(t - t_c)$ for $t_c < t < t_{\pm} [\equiv t_c + (x - x_1)/k^{\pm}]$, (iii) $f = -(\alpha v_0/2\nu)(x - x_1)/k^-$, $g = -(\alpha v_0/2\nu)(x - x_1)/k^+$ for $t > t_{\pm}$.

図2は、強さ $v_0 = 0.1$ をもつ衝撃波が $x_1 = 0$ に位置する断面積比 $\alpha = -0.2$ をもつステップを越え、拡大管に入った後の v の発展の様子を時刻 $t/\nu = 200$ から 900 まで、時間間隔 $t/\nu = 100$ で描いたものである。初期の衝撃波の中心は $x_0/\nu = -300$ に置かれている。時間が経過するにつれ、衝撃波の強さは本来の値を取り戻すように見える。一方、図3は、断面積比が 0.2 の収縮管に衝撃波が入った場合の v の波形を示す。図3では、波形が x のある点で発散することが見られる。

以上で求めた解は、物理的に不自然な結果を示しているように思われる。そこで、解に含まれる誤差を調べる。いま誤差を次式で定義する：

$$\text{Error}[\varphi] \equiv \frac{\varphi_t(t, x) + \varphi_x(t, x) - \nu \varphi_{xx}(t, x) - \mathcal{N}[\varphi] \varphi(t, x)}{v_0 \varphi(t, x) / 2\nu}. \quad (29)$$

これに第1次展開(24)を代入すると、

$$\text{Error}[\varphi^{\{1\}}] = \frac{2\nu}{v_0} \left\{ N^{(0)}(t, x) \frac{\varphi^{\{0\}}}{\varphi^{\{1\}}} - \mathcal{N}[\varphi^{\{1\}}] \right\} \quad (30)$$

となる。漸近形(27)および(28)を用いると、誤差は $t \rightarrow \infty$ において次のように見積もられる：

$$\text{Error}[\varphi^{\{1\}}] = \alpha + \frac{\alpha^2}{k^+} - \frac{\alpha}{1 - \alpha v_0(x - x_1)/2\nu k^+} \quad (x > x_1). \quad (31)$$

ここで、 $\mathcal{N}[\varphi^{\{1\}}]$ は $-(\alpha v_0/2\nu)(1 + \alpha/k^+)$ である。これから、誤差は $x - x_1$ が小さい間は α^2 のオーダーであるが、 $x - x_1$ が大きくなると、次第に増加し、 α のオーダーにまで成長することが分かる。このことから、摂動解は遠方場で破綻している。

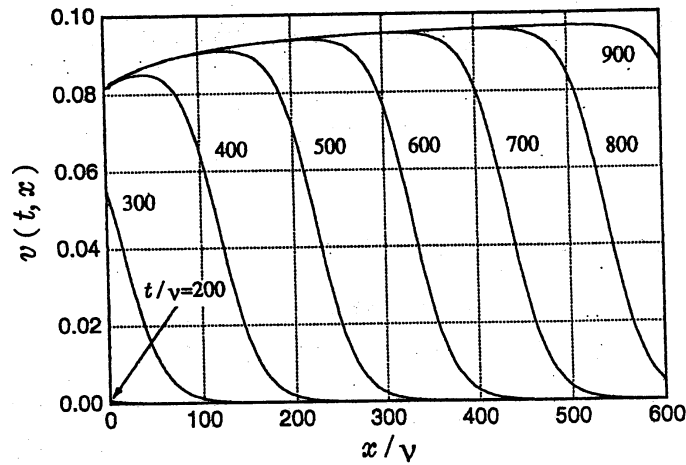


図2：拡大管部 ($x > 0$) におけるそれぞれの時刻における v の空間波形

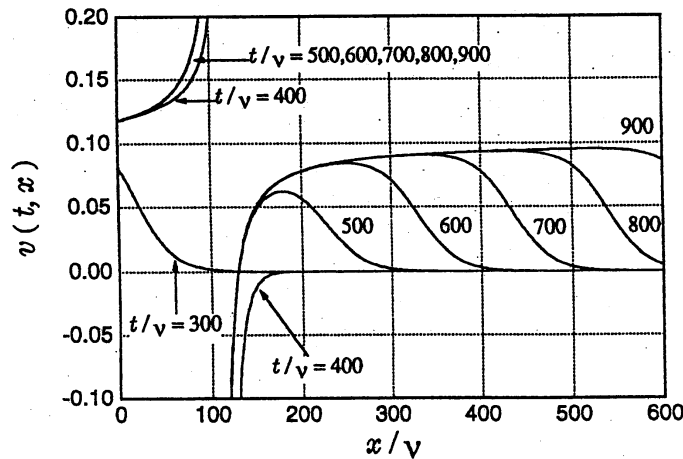


図3：収縮管部 ($x > 0$) におけるそれぞれの時刻における v の空間波形

5. 逐次近似法による解

前節でみたように、摂動展開法による解は x が大きくなるにつれ非一様性を示すことが分かった。そこで本節では、これに代わって逐次近似による解法を提案する。摂動展開法では、 $\varphi^{[1]}$ は $\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi^{(0)}]\varphi^{(0)}$ の解として求めた。逐次近似解法では、解 φ が $\varphi^{(0)}$ の近くにあると考え、 $\mathcal{N}[\varphi]$ を $\mathcal{N}[\varphi^{(0)}]$ で置き換え、次の方程式を解く：

$$\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi^{(0)}] \varphi. \quad (32)$$

この置き換えでは、方程式(12)は線形化されるが、しかし依然積分方程式として残る。この積分方程式を解くことにより、第一逐次近似解 $\varphi^{[1]}$ が得られると、次に方程式(12)の右辺を $\mathcal{N}[\varphi^{[1]}]$ で置き換えた

$$\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi^{[1]}] \varphi \quad (33)$$

与えられる方程式を解き、第2逐次近似解 $\varphi^{[2]}$ を求める。このプロセスを繰り返し、第 n 逐次近似解 $\varphi^{[n]}$ を以下の方程式を解くことによって求める：

$$\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi^{[n-1]}] \varphi. \quad (34)$$

もし、 $\varphi^{[n]}$ が $n \rightarrow \infty$ 収束するならば、すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{[n]}(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{[n-1]}(t, x) = \varphi(t, x), \quad (35)$$

そのとき厳密解 φ が得られたことになる。ここで、第 n 逐次近似解 $\varphi^{[n]}$ は次の積分方程式を解くことによって得られる：

$$\varphi^{[n]}(t, x) = \varphi^{[0]}(t, x) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^t d\tau G(t - \tau, x - \xi) N^{[n-1]}(\tau, \xi) \varphi^{[n]}(\tau, \xi). \quad (36)$$

ここで

$$N^{[n-1]}(t, x) \equiv \mathcal{N}[\varphi^{[n-1]}] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x d\eta \frac{\varphi_{\eta}^{[n-1]}(t, \eta) A_{\eta}(\eta)}{\varphi^{[n-1]}(t, \eta) A(\eta)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (37)$$

である。

さて、 $n = 1$ の場合の積分方程式(36)の解を求める。解の形を次のように仮定すると

$$\varphi^{[1]}(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(t, x) + \exp\left[-\frac{v_0}{2\nu}(x - x_0 - ct)\right] \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t, x), \quad (38)$$

$f_m(t, x)$ および $g_m(t, x)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) は $f_0(t, x) = g_0(t, x) = 1$ から逐次求めることができる：

$$f_m(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^t d\tau G^-(t - \tau, x - \xi) N^{[0]}(\tau, \xi) f_{m-1}(\tau, \xi), \quad (39)$$

および

$$g_m(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^t d\tau G^+(t - \tau, x - \xi) N^{[0]}(\tau, \xi) g_{m-1}(\tau, \xi). \quad (40)$$

ここで、 $G^{\pm}(t, x)$ は次のように定義される：

$$G^{\pm}(t, x) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp\left[-\frac{(x - k^{\pm}t)^2}{4\nu t}\right] \quad (41)$$

ただし、 $k^{\pm} \equiv c \pm v_0/2$ であり、複号同順である。

こうして解を形式的に書き下すことができるが、その値を求めることは無限級数のため困難である。そこで、 $\nu \rightarrow 0$ の漸近形を求めてみる。詳しくは省略するが、 $f_m(t, x)$ および $g_m(t, x)$ はそれぞれ次のように評価される：

$$f_m(t, x) = \int_0^t d\tau N^{[0]}[\tau, x - k^-(t - \tau)] f_{m-1}[\tau, x - k^-(t - \tau)], \quad (42)$$

および

$$g_m(t, x) = \int_0^t d\tau N^{[0]} [\tau, x - k^+(t - \tau)] g_{m-1} [\tau, x - k^+(t - \tau)] . \quad (43)$$

ここで, $f_0(t, x) = g_0(t, x) = 1$ を用いると, $f_m(t, x)$ および $g_m(t, x)$ は m 重積分に書き直され, その無限和は簡単に以下のように求まる:

$$\begin{aligned} f_m(t, x) &= \int_0^t d\tau_1 N^{[0]} [\tau_1, x - k^-(t - \tau_1)] \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_m N^{[0]} [\tau_m, x - k^-(t - \tau_m)] \\ &= \frac{1}{m!} \left\{ \int_0^t d\tau N^{[0]} [\tau, x - k^-(t - \tau)] \right\}^m , \end{aligned} \quad (44)$$

および

$$\begin{aligned} g_m(t, x) &= \int_0^t d\tau_1 N^{[0]} [\tau_1, x - k^+(t - \tau_1)] \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_m N^{[0]} [\tau_m, x - k^+(t - \tau_m)] \\ &= \frac{1}{m!} \left\{ \int_0^t d\tau N^{[0]} [\tau, x - k^+(t - \tau)] \right\}^m . \end{aligned} \quad (45)$$

以上より, 式(38)における無限和は指数関数で表すことができ, $\varphi^{[1]}$ は次のコンパクトな形で与えられる:

$$\begin{aligned} \varphi^{[1]}(t, x) &= \exp \left\{ \int_0^t d\tau N^{[0]} [\tau, x - k^-(t - \tau)] \right\} \\ &\quad + \exp \left\{ \int_0^t d\tau N^{[0]} [\tau, x - k^+(t - \tau)] \right\} \exp \left[-\frac{v_0}{2\nu} (x - x_0 - ct) \right] . \end{aligned} \quad (46)$$

式(46)における $N^{[0]}$ の積分は, 式(22)および(23)を用いることによって求まる. すると, 第1項目と第2項目の積分は, 式(27), (28)の f および g に他ならないことが分かる. したがって, 解(24)は式(46)を α で展開した第1次項に相当していることが分かる.

ここで, $\varphi^{[1]}$ の $\nu \rightarrow 0$ での漸近形を用いて, v を求めてみる. 図4は, 図2で用いたのと同じパラメータに対して, 時刻 $t/\nu = 200$ から 900 まで, 時間間隔 $t/\nu = 100$ での v の空間的な波形を描いたものである. ここで求めた逐次近似解 $v^{[1]}$ と摂動解 $v^{[1]}$ は, 特に遠方場で顕著に異なることが見られる. 逐次近似解による衝撃波の強さ $v^{[1]}$ は管の拡大部で v_0 より小さくなり, その値が時間が経過しても同じように続くのは, 摂動解とは大きく異なる. しかし, 両者は $x = 0$ の近傍場ではほぼ一致し, 実際, $x \rightarrow x_1+$ で同じ値 $v_0(1 + \alpha/k^+) \{= v_0[1 + \alpha/(1 + v_0)]\}$ をとる. この点においては, 摂動法と逐次近似法

は同じ結果を与える。また図5は、 $\alpha = 0.2$ をもつ収縮管の場合で、時刻 $t/\nu = 2000$ における摂動解 $v^{[1]}$ および逐次近似解 $v^{[1]}$ の波形を比較したものである。逐次近似解は発散しないことが分かる。

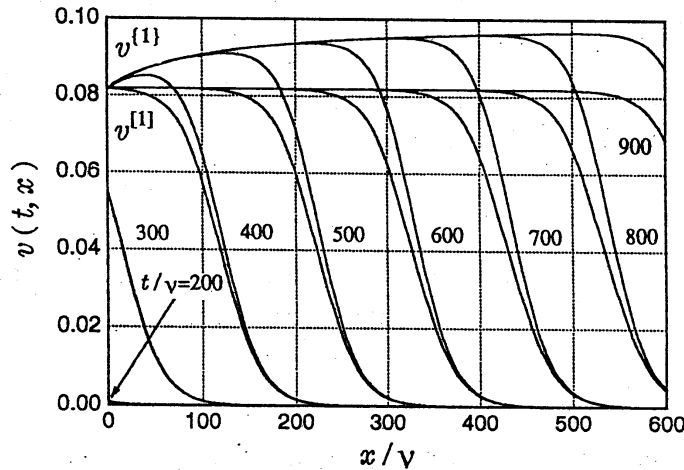


図4：拡大管部 ($x > 0$) における各時刻における摂動解 $v^{[1]}$ と逐次近似解 $v^{[1]}$ の空間波形の比較

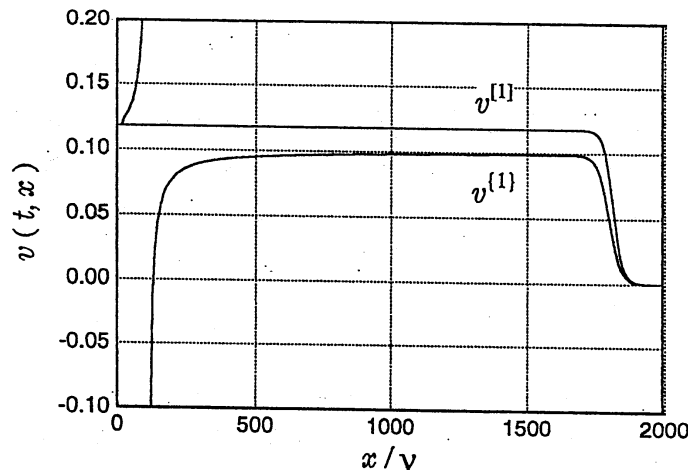


図5：収縮管部 ($x > 0$) における $t/\nu = 2000$ での摂動解 $v^{[1]}$ と逐次近似解 $v^{[1]}$ の波形の比較

最後に、逐次近似解の誤差について調べる。定義(29)にしたがうと、この場合の誤差は

$$\text{Error} [\varphi^{[1]}] = \frac{2\nu}{v_0} \{ N^{(0)}(t, x) - \mathcal{N}[\varphi^{[1]}] \} \quad (47)$$

で与えられる。漸近解(46)を用い、 $t \rightarrow \infty$ を考えると、 $\varphi^{[1]}$ は近似的に

$$\varphi^{[1]} = \exp \left[-\frac{\alpha v_0 (x - x_1)}{2\nu k^-} \right] + \exp \left[-\frac{\alpha v_0 (x - x_1)}{2\nu k^+} \right] \exp \left[-\frac{v_0}{2\nu} (x - x_0 - ct) \right] \quad (48)$$

となる。ただ、 $\mathcal{N}[\varphi^{[1]}]$ の評価について少し注意する。 $\nu \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\varphi_x^{[1]}/\varphi^{[1]}$ は $x = x_1$ で不連続になり、 $\mathcal{N}[\varphi^{[1]}]$ はステップ関数とデルタ関数の積を含んだ積分にな

る。この積分は、極限の取り方によって色々な値をとるように定義できるので、一意には決定できない。

ところで、 $\varphi_x^{[1]}/\varphi^{[1]}$ の値は $x = x_1$ で有限な ν の値に対しては連続である。 $\nu \rightarrow 0$ の極限をとったときには、その右極限值で与えられる。そこで、 $\varphi_x^{[1]}/\varphi^{[1]}$ の右極限值を用いて $\mathcal{N}[\varphi^{[1]}]$ を次のように計算する:

$$\mathcal{N}[\varphi^{[1]}] = -\frac{\alpha v_0}{2\nu} \left\{ \frac{\alpha/k^- + (1 + \alpha/k^+) \exp[-v_0(x_1 - x_0 - ct)/2\nu]}{1 + \exp[-v_0(x_1 - x_0 - ct)/2\nu]} \right\}. \quad (49)$$

これより $t \rightarrow \infty$ では、

$$\begin{aligned} \text{Error}[\varphi^{[1]}] &= \alpha^2 \left\{ \frac{1/k^- + 1/k^+ \exp[-v_0(x_1 - x_0 - ct)/2\nu]}{1 + \exp[-v_0(x_1 - x_0 - ct)/2\nu]} \right\} \\ &\rightarrow \frac{\alpha^2}{k^+} \end{aligned} \quad (50)$$

となり、 $\varphi^{[1]}$ に含まれる誤差のオーダーは、遠方場を含めて α^2 であることが分かる。これより、逐次近似解は一様に成り立つ。

6. おわりに

本報告は、幾何学的な拡がり効果を伴う一般化された Burgers 方程式を解く方法として、積分方程式法を考案した。具体的には、定常的に伝播してきた音響衝撃波が、ステップ状に断面が変化する急拡大（収縮）管に入射する場合を例に、積分方程式を解く2つの方法を示した。ちなみに、問題はこのとき次の方程式を解くことになる：

$$v_t + v_x + vv_x - \nu v_{xx} = \alpha v \delta(x - x_1). \quad (51)$$

一つの解法は摂動展開法であるが、その解は遠方場まで一様に成り立たないことが示された。この欠点を取り除き、厳密解をも得ることが可能な逐次近似解法をここで提案した。ステップの近傍場では、両者による解はほぼ等しい。特に、ステップ入射直後の衝撃波の強さは一致し、元の値 v_0 の $1 + \alpha/(1 + v_0) + O(\alpha^2)$ 倍になることが分かった。線形波の場合には ($v_0 \rightarrow 0$)、 $(1 + \alpha)$ 倍であるから、有限の v_0 の値は透過衝撃波の強さを元の値に近づけようとすることが分かる。逐次近似法は、断面が多段のステップから成る場合にも容易に拡張でき、さらには連続的に変化する場合にも適用できる。

参考文献

1. D. G. Crighton: *Frontiers in Physical Acoustics* (ed. D. Sette) *Proc. Intl. School of Physics 'Enrico Fermi,'* (North-Holland, Amsterdam, 1986).
2. G. B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves*, (Wiley-Interscience, New York, 1974).