数理解析研究所講究録
994 巻 1997 年 1-14

Inverse Scattering Problem for Dirac Operators with Magnetic Potentials at a Fixed Energy

阪大理　後藤 政孝 (GOTO Masataka)

1. 序

vector potential $a(x)=(a_1(x),a_2(x),a_3(x))$、scalar potential $v(x)$ の中を運動する相対論的な一電子系を記述する Hamiltonian は、

$$H(a,V)=\sum_{j=1}^{3}A_j(D_j+a_j)+A_4+V,\quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^3;\mathbf{C}^4)$$

$$D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\quad V=v(x)I_4$$

で与えられる。ここで、$A_j, j=1,2,3,4$ はそれぞれ 4 行 4 列の Hermite 行列で、以下の反交換関係を満たすものである：

$$A_jA_k+A_kA_j=2\delta_{jk}I_4,\quad j,k=1,2,3,4 \tag{1}$$

(このような A_j としては、例えば、Pauli のスピン行列

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

を用いて、

$$A_j=\begin{pmatrix}0&\sigma_j\\\sigma_j&0\end{pmatrix},\ j=1,2,3,\quad A_4=\begin{pmatrix}I_2&0\\0&-I_2\end{pmatrix}$$

とすれば良い。)

逆散乱問題とは、散乱振幅 $A(E)$ が与えられたときにそれから potential a,v を求める、という問題である。

磁場を含む Dirac 作用素に対する逆散乱問題 に関しては、high energy problem と呼ばれるもの、即ち、散乱振幅 $A(E)$ の $E\to\infty$ における振る舞いから potential を求める、という問題が、H.T.Ito [4] および W.Jung [5] で取り扱われている。一方、今回取り扱ったのは fixed energy problem、即ち、ある一つの energy E での散乱振幅から potential を構成する、という問題である。

fixed energy problem に関する仕事としては、磁場を含んだ Schrödinger 作用素に対するもの (G.Eskin and J.Ralston [1]) 、磁場を含まない Dirac 作用素に対するもの (H.Isozaki [3]) が既にある。そこで、これらの手法を用いて、磁場を含む Dirac 作用素に対する fixed energy problem を考えた。得られた結果は次の通り：

<u>結果</u> $E > 1$ を固定する。

$a(x), v(x)$ はともに指数的に減衰しているとし、さらに、$a(x)$ は滑らかな関数であるとする。このとき、energy E での散乱振幅 $A(E)$ から、磁場 $\operatorname{rot} a(x)$ が構成できる。

なお、散乱振幅の gauge 不変性により、$a(x)$ そのものを決めることは不可能であり、vector potential に関しては、$\operatorname{rot} a(x)$ が決定できる、というのが最良の結果である。

また、fixed energy problem を考えるときには、potential の指数的減衰の仮定はおそらく外せないであろうと思われる。

scalar potential $v(x)$ についても、同様の方向で計算を進めることにより、散乱振幅から構成できるであろうと期待されるが、そのときには、$v(x)$ についても多少の微分可能性の仮定が必要であろうと思われる。

結果の証明には、通常の Green 作用素とは異なる、方向に依存する Green 作用素を用いる。まず §2 において、Schrödinger 作用素の場合に [1] で構成された Green 作用素の定義を述べ、§3 で、Dirac 作用素に対しても対応物を構成する。§4, 5 で、それの種々の性質を調べたあと、§6 で、磁場を構成する計算を行う。

2. 磁場を含む Schrödinger 作用素に対する、方向に依存する Green 作用素

$n \geq 2$ とする。

<u>記号</u>

$$\mathcal{H}_s = \left\{ u \;\middle|\; \|u\|^2_{\mathcal{H}_s} = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2s|x|}|u(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x|^2 = 1\}$$

$$D_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbf{C}_+ \;\middle|\; |\operatorname{Re} z| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

また、集合 $\{\cdots\}$ の定義関数を $F(\cdots)$ で表すことにする。

<u>非摂動作用素</u>

$E > 0,\ \gamma \in S^{n-1}$ を固定する。

まず、$\varphi_1(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ を、$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| > 2\varepsilon \\ 0, & |t| < \varepsilon \end{cases}$ なるものとし、

$$V_{\gamma,0}(E,z)f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{e^{ix\cdot\xi}\varphi_1(\gamma\cdot\xi)}{\xi^2 + 2z\gamma\cdot\xi + z^2 - E}\hat{f}(\xi)d\xi$$

と定義する。

以下しばらく、記述の簡単のために、$\gamma = (1, 0, \cdots, 0)$ である場合を考え、

$$\triangle' = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad \mathcal{H}'_\delta = \left\{ f \;\middle|\; \|f\|^2_{\mathcal{H}'_\delta} = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{2\delta |x'|} |f(x')|^2 dx' < \infty \right\}, \quad (x = (x_1, x'))$$

とする。

$\delta > 0$ に対して、$\mathbf{C}_\pm$ 上で定義された $(-\triangle' - z)^{-1}$ はそれぞれ、$\mathbf{B}(\mathcal{H}'_\delta; \mathcal{H}'_{-\delta})$ 内で、$(0, \infty)$ を越えて、領域 $\{z \mid \pm \mathrm{Im}\sqrt{z} > -\delta\}$ に解析接続される。この、解析接続された作用素をそれぞれ、$r_\pm(z)$ と書くことにする。

次に、$\varphi_0(t) = 1 - \varphi_1(t)$ とおき、

$$W_{\gamma,0}(E, z) =$$
$$(\mathcal{F}_{x_1 \to \xi_1})^{-1} \left\{ r_+(E - (\xi_1 + z)^2) F(\xi_1 < 0) + r_-(E - (\xi_1 + z)^2) F(\xi_1 > 0) \right\} \varphi_0(\xi_1) \mathcal{F}_{x_1 \to \xi_1}$$

と定義する。ここで、$\mathcal{F}_{x_1 \to \xi_1}$ は、x_1 に関する部分 Fourier 変換。

そして、

$$U_{\gamma,0}(E, z) = V_{\gamma,0}(E, z) + W_{\gamma,0}(E, z)$$

と定義すると、$U_{\gamma,0}(E, z)$ は以下の性質を持つ：

定理 1 $\delta > 0$ とすると、ある十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して、

1. $U_{\gamma,0}(E, z)$ は、$z \in D_\varepsilon$ の、$\mathbf{B}(\mathcal{H}_\delta; \mathcal{H}_{-\delta})$*-valued analytic function* である。

2. 任意の $f \in \mathcal{H}_\delta$ に対して、$U_{\gamma,0}(E, z) f$ は次の方程式を満たす：

$$(-\triangle - 2iz\gamma \cdot \nabla + z^2 - E) U_{\gamma,0}(E, z) f = f$$

3. $z \to t \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ のとき、$U_{\gamma,0}(E, z)$ は境界値 $U_{\gamma,0}(E, t)$ を持ち、$U_{\gamma,0}(E, t) \in \mathbf{B}(L^{2,s}; H^{2,-s})$, $s > \frac{1}{2}$, $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ である。

4. $\tau > 0$, $0 < s < 1$ に対して、$U_{\gamma,0}(E, i\tau) \in \mathbf{B}(L^{2,s}; L^{2,s-1})$ である。さらに、ある $C > 0$ があって、

$$\|U_{\gamma,0}(E, i\tau)\|_{\mathbf{B}(L^{2,s}; L^{2,s-1})} \le \frac{C}{\tau}, \quad \tau \gg 1$$

となる。

5. $\tau > 0$, $0 < s < 1$, $f \in L^{2,s}$ のとき、方程式 $(-\triangle + 2\tau\gamma \cdot \nabla - \tau^2 - E) u = f$, $u \in L^{2,s-1}$ は一意解を持ち、それは $u = U_{\gamma,0}(E, i\tau) f$ で与えられる。

<u>摂動作用素</u>

$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$ に対し、

$$H(a;\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_j(x) + \zeta_j \right)^2$$

$$H_0(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \zeta_j \right)^2$$

$$P(\zeta) = H(a;\zeta) - H_0(\zeta) = 2a(x) \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla_x + \zeta \right) - i \operatorname{div} a(x) + |a(x)|^2$$

とおく。

次の仮定を置く：

仮定 1 $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$
$\exists \delta_0 > 0 \ s.t. \ |\partial^\alpha a_j(x)| \le C_\alpha e^{-\delta_0 |x|}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^3$

摂動作用素に対する Green 作用素を、resolvent 方程式を介して定義したのでは具体的な計算には大変不便である。そこで、$(H(a; z\gamma) - E)$ の逆作用素を、計算可能な形で探すことにする。

まず、簡単な形式的計算により、

$$(H(a; z\gamma) - E) S U_{\gamma,0}(E,z) S^{-1} = 1 + ([H_0(z\gamma), S] + P(z\gamma) S) U_{\gamma,0}(E,z) S^{-1}.$$

この式で右辺が可逆であればよいが、そのためには、S の symbol が

$$(\xi + z\gamma) \cdot \nabla_x s(x, \xi + z\gamma) + i a(x) \cdot (\xi + z\gamma) s(x, \xi + z\gamma) = 0$$

を満たしていれば良いであろうことが、symbol 計算より推測される。

そこで、$\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ を $\chi_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & |t| > \varepsilon \end{cases}$ なるものとして、$z = i\tau, \ \tau > 0$ に対して、

$$b(x, \xi + i\tau\gamma) = \chi(\xi, \tau) \psi(x, \xi + i\tau\gamma)$$

$$\psi(x, \xi + i\tau\gamma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot k} \frac{\widehat{a}(k) \cdot (\xi + i\tau\gamma)}{k \cdot (\xi + i\tau\gamma)} dk \tag{2}$$

$$\chi(\xi, \tau) = \chi_0 \left(\frac{|\xi^2 + 2i\tau\gamma \cdot \xi - \tau^2 - E|}{\xi^2 + \tau^2 + E} \right)$$

と定義し、$s(x, \zeta) = e^{-b(x,\zeta)}$ とおく。このとき次が成り立つ。

補題 1　*1.* 十分大きい $\tau > 0$ に対して、$s(x,\xi+i\tau\gamma) = e^{-b(x,\xi+i\tau\gamma)}$ は、方程式

$$(\xi+i\tau\gamma)\cdot\nabla_x s(x,\xi+i\tau\gamma) + ia(x)\cdot(\xi+i\tau\gamma)s(x,\xi+i\tau\gamma) = 0$$

を満たす。

2. $\chi(\xi,\tau)$ の *support* 上で、

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(x,\xi+i\tau\gamma)| \le C_{\alpha\beta}\tau^{-|\beta|}\langle x\rangle^{-1}.$$

symbol が $s(x,\xi+i\tau\gamma)$, $s(x,\xi+i\tau\gamma)^{-1}$ である擬微分作用素をそれぞれ $S(\tau)$, $T(\tau)$ とすると、上の補題より、$S(\tau)$, $T(\tau) \in \mathbf{B}(L^{2,s})$ (τ について一様に有界) であり、

$$S(\tau)^{-1} = T(\tau) + O(\tau^{-1}), \quad \tau \gg 1$$

である。また、

$$K(\tau) = ([H_0(i\tau\gamma), S(\tau)] + P(i\tau\gamma)S(\tau))U_{\gamma,0}(E,i\tau)S(\tau)^{-1}$$

とおくと、

$$\|K(\tau)\|_{\mathbf{B}(L^{2,s})} \le \frac{C}{\tau}, \qquad \tau \gg 1$$

が成り立つ。($\frac{1}{2} < s < 1$)

十分大きい $\tau > 0$ に対し、

$$L_\gamma(\tau) = S(\tau)U_{\gamma,0}(E,i\tau)S(\tau)^{-1}(1+K(\tau))^{-1}$$

と定義すると、任意の $f \in L^{2,s}$ に対し、$(H(a;i\tau\gamma)-E)L_\gamma(\tau)f = f$ となる。これで求める Green 作用素が構成できた。

3. 磁場を含む Dirac 作用素に対する、方向に依存する Green 作用素

以下、$\mathbf{R}^3$ で考えることにし、$\gamma \in S^2$ を固定しておく。

非摂動作用素

以下では、原則的に、Schrödinger 作用素に対するものは小文字で、Dirac 作用素に対するものは対応する大文字で表すことにする。つまり、§2 での $H(a;\zeta), H_0(\zeta), U_{\gamma,0}(E,z)$ を以下ではそれぞれ $h(a;\zeta), h_0(\zeta), u_{\gamma,0}(E,z)$ と書き、あらためて、

$$H(a,V;\zeta) = \sum_{j=1}^{3} A_j(D_j + a_j + \zeta_j) + A_4 + V,$$

$$H_0(\zeta)=\sum_{j=1}^{3}A_j(D_j+\zeta_j)+A_4,\quad D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\quad V=v(x)I_4$$

および、

$$U_{\gamma,0}(E,z)=(H_0(z\gamma)+E)u_{\gamma,0}(E^2-1,z)$$

と定義する。

定理 1 と同様に、次が示される。

定理 2 $\delta>0$ とする。

1. $U_{\gamma,0}(E,z)$ は、$z\in D_\varepsilon$ の、$\mathbf{B}(\mathcal{H}_\delta;\mathcal{H}_{-\delta})$*-valued analytic function* である。
2. 任意の $f\in\mathcal{H}_\delta, z\in D_\varepsilon$ に対して、$(H_0(z\gamma)-E)U_{\gamma,0}(E,z)f=f$ となる。
3. $z\to t\in\left(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$ のとき、$U_{\gamma,0}(E,z)$ は境界値 $U_{\gamma,0}(E,t)$ を持つ。さらに、$U_{\gamma,0}(E,t)\in\mathbf{B}(L^{2,s};H^{1,-s})$, $s>\frac{1}{2}$, $t\in\left(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$ である。
4. $|E|>1, E\in\mathbf{R}, \tau>0, 0<s<1, f\in L^{2,s}$ とする。このとき、方程式

$$(H_0(i\tau\gamma)-E)u=f,\quad u\in L^{2,s-1}$$

の解は一意的である。

<u>摂動作用素</u>

以下、次のことを仮定する：

仮定 2 $a_j(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^3;\mathbf{R})$, $\quad v(x)$：実数値
$\exists\delta_0>0\ s.t.\ |\partial^\alpha a_j(x)|\le C_\alpha e^{-\delta_0|x|},\quad \forall\alpha\in\mathbf{N}^3$
$|v(x)|\le Ce^{-\delta_0|x|}$

§2 での $L_\gamma(\tau)$ の E を E^2-1 に変えたものを以下 $l_\gamma(\tau)$ と書くことにして、新たに、十分大きな $\tau>0$ に対し、

$$L_\gamma(\tau)=(1+l_\gamma(\tau)K)^{-1}l_\gamma(\tau)(H(a,V;i\tau\gamma)+E-2V)$$

と定義する。ここで、

$$K=\sum_{1\le j<k\le 3}A_jA_k((D_ja_k)-(D_ka_j))+\sum_{j=1}^{3}A_j(D_jV)-V^2+2EV.$$

このとき、十分大きい $\tau>0, f\in L^{2,s}$ に対し、

$$(H(a,V;i\tau\gamma)-E)L_\gamma(\tau)f=f.$$

$Q = H(a, V; \zeta) - H_0(\zeta) = \sum_{j=1}^{3} A_j a_j(x) + v(x) I_4$ とおき、

$$\mathcal{E}_\gamma(E) = \{z \in \overline{D_\varepsilon} \mid -1 \in \sigma_p(U_{\gamma,0}(E,z)Q)\}$$

と定義する。

定理 2 を用いて、Schrödinger 作用素の場合に [1] [3] で知られていることを Dirac 作用素の場合に移しかえることにより、以下のことが示される。

補題 2 *1.* $\mathcal{E}_\gamma(E) \cap D_\varepsilon$ は、D_ε の離散集合

2. $\mathcal{E}_\gamma(E) \cap \mathbf{R}$ は、測度 0 の閉集合

3. ある $C > 0$ があって、$\tau > C$ ならば $i\tau \notin \mathcal{E}_\gamma(E)$ となる。

$z \in D_\varepsilon \setminus \mathcal{E}_\gamma(E)$ に対して、

$$U_\gamma(E,z) = (1 + U_{\gamma,0}(E,z)Q)^{-1} U_{\gamma,0}(E,z)$$

と定義する。$f \in L^{2,s}$ に対し、$(H(a,V;z\gamma) - E)U_\gamma(E,z)f = f$ である。

補題 3 十分大きい $\tau > 0$ に対して、方程式

$$(H(a,V;i\tau\gamma) - E)u = f \in L^{2,s}, \quad u \in L^{2,s-1}$$

の解は一意的である。

補題 4 $U_\gamma(E,z)$ は D_ε 上の $\mathbf{B}(\mathcal{H}_\delta; \mathcal{H}_{-\delta})$*-valued meromorphic function* であり、$(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \mathcal{E}_\gamma(E)$ 上で連続な境界値を持つ。

さらに、$U_\gamma(E, i\tau) = L_\gamma(\tau)$, $\tau \gg 0$ となる。

補題 5

$$U_{\gamma,0}(E,z) - U_\gamma(E,z) = U_{\gamma,0}(E,z) Q U_\gamma(E,z).$$

4. 方向に依存する Green 作用素に対する resolvent 方程式

$$h_0 = -\triangle, \qquad r_0(z) = (h_0 - z)^{-1}$$

$$H_0 = \sum_{j=1}^{3} A_j D_j + A_4, \qquad R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$$

$$H(a,V) = \sum_{j=1}^{3} A_j(D_j + a_j) + A_4 + V, \qquad R(z) = (H(a,V) - z)^{-1}$$

とする。

H_0 の symbol $A\cdot\xi+A_4$ は固有値 $\pm\langle\xi\rangle$ を持つが、それぞれの固有空間への射影行列は

$$\Pi_\pm(\xi)=\frac{1}{2}\left(I_4\pm\frac{A\cdot\xi+A_4}{\langle\xi\rangle}\right)$$

で与えられる。ただしここで、$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\in\mathbf{C}^3$ に対し、$A\cdot\zeta=\sum_{j=1}^{3}A_j\zeta_j$ という記法を用いた。

さらに、

$$r_{\gamma,0}(E,t)=e^{itx\cdot\gamma}u_{\gamma,0}(E,t)e^{-itx\cdot\gamma}$$

$$M_\gamma^{(\pm)}(t)=(\mathcal{F}_{x\to\xi})^{-1}F(\pm\gamma\cdot(\xi-t\gamma)\geq 0)\mathcal{F}_{x\to\xi}$$

と定義すると、次の関係式が (formal に) 成り立つ ([2] Theorem 6.2) :

$$r_{\gamma,0}(E,t)=r_0(E-i0)M_\gamma^{(+)}(t)+r_0(E+i0)M_\gamma^{(-)}(t),\quad t\in\left(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{3}$$

$L^2(S^2)$ 上の作用素 $F_\gamma(t)$ を、$F\left(\gamma\cdot\cdot\geq\frac{t}{\sqrt{E}}\right)$ をかける作用素として定義する。$E>0$ に対し、

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0(E)f(\omega)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}2^{-\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{4}}\int_{\mathbf{R}^3}e^{-i\sqrt{E}\omega\cdot x}f(x)dx,\quad \omega\in S^2$$

と定義すると、(3) を用いることにより、

$$r_{\gamma,0}(E,t)=r_0(E+i0)-w_\gamma(E,t),\ E>0,\ t\in\left(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{4}$$

となる。ここで、$w_\gamma(E,t)=2\pi i\widetilde{\mathcal{F}}_0(E)^*F_\gamma(t)\widetilde{\mathcal{F}}_0(E)$.

$R_{\gamma,0}(E,t)=e^{itx\cdot\gamma}U_{\gamma,0}(E,t)e^{-itx\cdot\gamma}$ と定義すると、(4) より次の定理が得られる。

定理 3

$$R_{\gamma,0}(E,t)=R_0(E+i0)-W_\gamma(E,t).$$

ここで、$W_\gamma(E,t)=(H_0+E)w_\gamma(E^2-1,t)$.

さらに、$\mathbf{C}^4$ に値をとる f と、$\pm E>1$ に対して、

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)f(\omega)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}2^{-\frac{1}{2}}(E^2-1)^{\frac{1}{4}}\Pi_\pm(\sqrt{E^2-1}\omega)\int_{\mathbf{R}^3}e^{-i\sqrt{E^2-1}\omega\cdot x}f(x)dx,\quad \omega\in S^2$$

と定義すると、

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)\in\mathbf{B}((L^{2,s})^4;(L^2(S^2))^4),\quad s>\frac{1}{2}$$

であり、

$$H_0\mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)^* = E\mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)^*$$

となる。さらに、

$$W_\gamma(E,t) = 4\pi i E\mathcal{F}_0^{(+)}(E)^* F_\gamma(t)\mathcal{F}_0^{(+)}(E)$$

が成立する。

次に、$R_\gamma(E,t) = e^{itx\cdot\gamma}U_\gamma(E,t)e^{-itx\cdot\gamma}$ と定義すると、補題 5 より、

$$R_{\gamma,0}(E,t) - R_\gamma(E,t) = R_{\gamma,0}(E,t)QR_\gamma(E,t) \tag{5}$$

が出る。

以上の関係式を用いることにより、次が示される。

補題 6

$$R_\gamma = R - (1-RQ)W(1-QR_\gamma)$$

ここで、$R_\gamma = R_\gamma(E,t), \quad R = R(E+i0), \quad W = W_\gamma(E,t)$

5. 散乱振幅

$f \in L^{2,s}, s > \frac{1}{2}, \pm E > 1$ に対し、

$$\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)(1 - QR(E+i0)^*)$$

$$\mathcal{F}_\gamma(E,t) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)(1 - QR_\gamma(E,t)^*)$$

と定義する。このとき、

$$A(E) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)Q\mathcal{F}(E)^*$$

で定義される $A(E)$ を (物理的) 散乱振幅といい、一方、

$$A_\gamma(E,t) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)Q\mathcal{F}_\gamma(E,t)^*, \quad \pm E > 1$$

で定義される $A_\gamma(E,t)$ を、Faddeev の散乱振幅と呼ぶことにする。

補題 6 を用いれば、次の関係が成り立つことが分かる。

$$(1-K(t))A_\gamma(E,t) = A(E), \quad \text{ここで、}K(t) = 4\pi i E A(E)F_\gamma(t). \tag{6}$$

さらに、

$$t \in \mathcal{E}_\gamma(E) \Longleftrightarrow 1 \in \sigma_p(K(t))$$

が示されるので、(6) と合わせれば、$t \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \setminus \mathcal{E}_\gamma(E)$ のとき、
$A_\gamma(E,t) = (1-K(t))^{-1}A(E)$ となる。

これにより、物理的散乱振幅から、Faddeev の散乱振幅を構成することができる。

6. 散乱振幅からの磁場の構成

以下で、Faddeev の散乱振幅から磁場を再構成する計算をする。

この計算においては、公式

$$(A\cdot\xi)(A\cdot\xi) = (\xi\cdot\xi)I_4 \tag{7}$$

$$(A\cdot\xi)(A\cdot\eta)(A\cdot\xi) = A\cdot(2(\xi\cdot\eta)\xi-(\xi\cdot\xi)\eta) \tag{8}$$

$$(\xi,\eta\in\mathbf{C}^3,\quad \xi\cdot\eta=\sum_{j=1}^{3}\xi_j\eta_j)$$

が本質的に重要な役割を果たす。(これらは直接計算によって示される。)

まず、$E>1$ を固定する。

Faddeev の散乱振幅 $A_\gamma(E,t)$ の積分核を $A_\gamma(E,t;\theta,\theta')$ とする。

$S^1_\gamma=\{\omega\in S^2\mid\omega\cdot\gamma=0\}$ とし、$\omega,\omega'\in S^1_\gamma$ に対して、

$$B_\gamma(E,t;\omega,\omega') = A_\gamma\Big(E,t;\frac{1}{\sqrt{E^2-1}}(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega+t\gamma),\frac{1}{\sqrt{E^2-1}}(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega'+t\gamma)\Big)$$

と定義すると、$B_\gamma(E,t;\omega,\omega')$ は、定数倍を除いて次のように書ける：

$$\int\Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega+t\gamma)e^{-i\sqrt{E^2-1-t^2}(\omega-\omega')\cdot x}Q(x)\Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega'+t\gamma)dx$$
$$-\int\Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega+t\gamma)e^{-i\sqrt{E^2-1-t^2}\omega\cdot x}Q(x)$$
$$\times U_\gamma(E,t)\Big(Q(x)\Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega'+t\gamma)e^{i\sqrt{E^2-1-t^2}\omega'\cdot x}\Big)\,dx.$$

補題4より、t の関数としての $B_\gamma(E,t;\omega,\omega')$ は、一意的に、D_ε 上の meromorphic function に拡張される。

$\lambda(\tau)=\sqrt{E^2-1+\tau^2}$ と書くことにすれば、

$$B_\gamma(E,i\tau;\omega,\omega')=$$
$$\int\Pi_+(\lambda(\tau)\omega+i\tau\gamma)e^{-i\lambda(\tau)(\omega-\omega')\cdot x}Q(x)\Pi_+(\lambda(\tau)\omega'+i\tau\gamma)dx$$
$$-\int\Pi_+(\lambda(\tau)\omega+i\tau\gamma)e^{-i\lambda(\tau)\omega\cdot x}Q(x)U_\gamma(E,i\tau)\Big(Q(x)\Pi_+(\lambda(\tau)\omega'+i\tau\gamma)e^{-i\lambda(\tau)\omega'\cdot x}\Big)\,dx$$

となる。

$k\in\mathbf{R}^3$ を任意にとって固定する。

$\eta,\gamma\in S^2$ を、$\eta\cdot k=\gamma\cdot k=\eta\cdot\gamma=0$ となるようにとり、

$$\omega(\tau)=\left(1-\frac{k^2}{4\lambda(\tau)^2}\right)^{\frac12}\eta+\frac{k}{2\lambda(\tau)},\quad \omega(\tau)'=\left(1-\frac{k^2}{4\lambda(\tau)^2}\right)^{\frac12}\eta-\frac{k}{2\lambda(\tau)}$$

とすると、

$$\omega(\tau),\ \omega(\tau)' \in S^1_\gamma, \qquad \lambda(\tau)(\omega(\tau)-\omega(\tau)')=k,$$
$$\omega(\tau),\ \omega(\tau)' \to \eta, \qquad \omega(\tau)\cdot k,\ \omega(\tau)'\cdot k \to 0, \quad (\tau\to\infty)$$

となる。

さらに、$\zeta(\tau)=\lambda(\tau)\omega(\tau)+i\tau\gamma$, $\zeta(\tau)'=\lambda(\tau)\omega(\tau)'+i\tau\gamma$ と書くことにして、

$$\begin{aligned}
&B_\gamma(E,i\tau;\omega(\tau),\omega(\tau)')\\
&=\int e^{-ik\cdot x}\Pi_+(\zeta(\tau))Q(x)\Pi_+(\zeta(\tau)')dx\\
&-\int e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau)\cdot x}\Pi_+(\zeta(\tau))Q(x)U_\gamma(E,i\tau)\left(Q(x)\Pi_+(\zeta(\tau)')e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x}\right)dx\\
&=B_1(\tau)-B_2(\tau)
\end{aligned}$$

と書き、$B_\gamma(E,i\tau;\omega(\tau),\omega(\tau)')$ の $\tau\to\infty$ のときの挙動を調べる。

(i) $B_1(\tau)$ について

$$\frac{1}{\tau}\Pi_+(\zeta(\tau)),\ \frac{1}{\tau}\Pi_+(\zeta(\tau)')\to\frac{1}{2E}A\cdot(\eta+i\gamma), \quad (\tau\to\infty)$$

であることと、(7)、(8) を用いれば、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau^2}B_1(\tau) &\to \frac{1}{4E^2}\int e^{-ik\cdot x}(A\cdot\theta)Q(x)(A\cdot\theta)dx, \qquad \theta=\eta+i\gamma\\
&= \frac{1}{2E^2}\int e^{-ik\cdot x}(a(x)\cdot\theta)dx(A\cdot\theta).
\end{aligned}$$

(ii) $B_2(\tau)$ について

$$L_\gamma(\tau)=S(\tau)u_{\gamma,0}(E^2-1,i\tau)T(\tau)(H+E-2V)+O(\tau^{-1})$$

であるから、

$$(H(a,V;i\tau\gamma)+E-2V)(Q(x)e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x})=\tau(A\cdot\theta)(Q(x)e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x})+O(1)$$

に注意して、(7)、(8) を二度用いれば、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau^2}B_2(\tau)\\
&=\frac{1}{E^2}\int e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau)\cdot x}(a(x)\cdot\theta)(A\cdot\theta)S(\tau)\\
&\qquad\times u_{\gamma,0}(E^2-1,i\tau)T(\tau)\left(\tau(a(x)\cdot\theta)e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x}\right)dx+O(\tau^{-1})\\
&=\frac{\tau}{E^2}(u_{\gamma,0}(E^2-1,i\tau)f(\tau),g(\tau))(A\cdot\theta)+O(\tau^{-1}),\\
&f(\tau)=T(\tau)\left((a(x)\cdot\theta)e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x}\right), \quad g(\tau)=S(\tau)^*\left(e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)\cdot x}(a(x)\cdot\overline{\theta})\right)
\end{aligned}$$

となる。

$\tau \to \infty$ のとき、$f(\tau), g(\tau)$ は、(2) 式の ψ を用いて、それぞれ、

$$f(\tau) = e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x} e^{\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta) + o(1)$$

$$\overline{g(\tau)} = e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau)\cdot x} e^{-\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta) + o(1)$$

という漸近展開を持つことが分かるので、

$$\frac{1}{\tau^2}B_2(\tau) = \frac{\tau}{E^2}\int e^{-ik\cdot x}e^{-\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)\widetilde{G}(\zeta(\tau)')\left(e^{\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)\right)dx(A\cdot\theta) + o(1)$$

となる。ここで、$\widetilde{G}(\zeta(\tau)') = e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x}u_{\gamma,0}(E^2-1, i\tau)e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)'\cdot x}$ とおいた。

いま、

$$N_\gamma f(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int e^{i\xi\cdot x}\frac{1}{2\xi\cdot(\eta+i\gamma)}\widehat{f}(\xi)d\xi$$

と定義すると、

補題 7 ([3] Theorem 4.6) 任意の $f \in L^{2,s}$ に対し、

$$\tau\widetilde{G}(\zeta(\tau)')f \to N_\gamma f,\ in\ L^{2,s-1}, \quad \tau \to \infty$$

が成り立つので、

$$\frac{1}{\tau^2}B_2(\tau) = \frac{1}{E^2}\int e^{-ik\cdot x}e^{-\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)N_\gamma\left(e^{\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)\right)dx(A\cdot\theta) + o(1)$$

となる。

ここで、$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\eta+i\gamma)\cdot\nabla_x$ とおくと、$\overline{\partial}N_\gamma = \frac{i}{4}$ であるから、

$$\overline{\partial}\left(N_\gamma(e^{\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)) - \frac{1}{2}e^{\psi(x,\theta)}\right) = 0.$$

よって Liouville の定理により、

$$N_\gamma(e^{\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)) = \frac{1}{2}(e^{\psi(x,\theta)}-1)$$

となることが分かる。

したがって、

$$\frac{1}{\tau^2}B_2(\tau) = \frac{1}{2E^2}\int e^{-ik\cdot x}(1-e^{-\psi(x,\theta)})(a(x)\cdot\theta)dx(A\cdot\theta) + o(1).$$

(i)、(ii) より、$\tau \to \infty$ のとき、

$$\frac{1}{\tau^2}B_\gamma(E, i\tau; \omega(\tau), \omega(\tau)') \to \frac{1}{2E^2}\int e^{-ik\cdot x}e^{-\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)dx(A\cdot\theta).$$

以下、この右辺を計算する。

一般性を失うことなく、$\eta=(1,0,0),\ \gamma=(0,1,0),\ k=(0,0,k_3)$ としてよい。

$$\begin{aligned}
\psi(x,\eta+i\gamma) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int e^{i\xi\cdot x}\frac{\widehat{a}(\xi)\cdot(\eta+i\gamma)}{\xi_1+i\xi_2}d\xi \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{a(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3)\cdot(\eta+i\gamma)}{y_1+iy_2}dy_1dy_2 \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{z}\int_{\mathbf{C}}a(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\cdot(\eta+i\gamma)+O(|z|^{-2}),\quad |z|\to\infty \\
&\quad (z=x_1+ix_2,\ \zeta=y_1+iy_2)
\end{aligned}$$

より、

$$e^{-\psi(x,\eta+i\gamma)}=1-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{z}\int_{\mathbf{C}}a(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\cdot(\eta+i\gamma)+O(|z|^{-2})$$

であることを用いれば、$r>0$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1^2+x_2^2<r^2}e^{-ik\cdot x}a(x)\cdot(\eta+i\gamma)e^{-\psi(x,\eta+i\gamma)}dx_1dx_2 \\
&= -2i\int_{x_1^2+x_2^2<r^2}e^{-ik_3x_3}\overline{\partial}(e^{-\psi(x,\eta+i\gamma)})dx_1dx_2 \\
&= -e^{-ik_3x_3}\int_{x_1^2+x_2^2=r^2}e^{-\psi(x,\eta+i\gamma)}dx_1+idx_2 \\
&= e^{-ik_3x_3}\int_{\mathbf{R}^2}a(y_1,y_2,x_3)\cdot(\eta+i\gamma)dy_1dy_2+O(|x_1+ix_2|^{-1}).
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^3}e^{-ik\cdot x}e^{-\psi(x,\theta)}(a(x)\cdot\theta)dx &= \int_{\mathbf{R}^3}e^{-ik\cdot x}(a(x)\cdot\theta)dx \\
&= (2\pi)^{\frac{3}{2}}\widehat{a}(k)\cdot(\eta+i\gamma)
\end{aligned}$$

となる。

以上により、$B_\gamma(E,i\tau;\omega(\tau),\omega(\tau)')$ から $\widehat{a}(k)\cdot(\eta+i\gamma)$ が計算できることが分かった。

γ を $-\gamma$ にとりかえて同じ計算をすれば、結局、各 $k\in\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$ に対し、$\widehat{a}(k)$ を k に垂直な平面に射影したもの、即ち、

$$\widetilde{a}(k)=\widehat{a}(k)-\frac{1}{|k|^2}(\widehat{a}(k)\cdot k)k$$

が計算できたことになる。

$k\times\widetilde{a}(k)=k\times\widehat{a}(k)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\int e^{ik\cdot x}(k\times\widetilde{a}(k))dk &= \int e^{ik\cdot x}(k\times\widehat{a}(k))dk \\
&= -i(2\pi)^{\frac{3}{2}}\operatorname{rot}a(x)
\end{aligned}$$

となり、これで、目標の $\operatorname{rot}a(x)$ が求められた。

参考文献

[1] G.Eskin and J.Ralston, *Inverse Scattering Problem for the Schrödinger Equation with Magnetic Potential at a Fixed Energy*, Comm. Math. Phys., 173 (1995), 199-224.

[2] H.Isozaki, *Multi-dimensional Inverse Scattering Theory for Schrödinger Operators*, Reviews in Math. Phys., 8 (1996), 591-622.

[3] H.Isozaki, *Inverse Scattering Theory for Dirac Operators*, to appear in Ann. l'I.H.P. Physique Théorique.

[4] H.T.Ito, *High-energy behavior of the scattering amplitude for a Dirac operator*, to appear in Publ. RIMS.

[5] W.Jung, *Geometrical Approach to Inverse Scattering for the Dirac Equation*, preprint.

[6] J.Sylvester and G.Uhlmann, *A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem*, Ann. Math., 125 (1987), 153-169.

[7] R.Weder, *Generalized Limiting Absorption Method and Multidimensional Inverse Scattering Theory*, Math. Meth. Appl. Sci., 14 (1991), 509-524.