数理解析研究所講究録
994巻 1997年 131-137

相対論的シュレディンガー作用素に対する一般固有関数展開

姫路工大理学部　梅田登美男 (Tomio Umeda)

§1. 序

相対論的シュレディンガー作用素は１９３０年代に Chandrasekhar による恒星の理論の出発点として用いられたものであるが、この理論に対して数学的に厳密なアプローチがなされたのは１９８０年代のことである．そこで問題とされたのは系の基底エネルギーであり、したがって変分法的な取り扱いであった．このことに関しては Lieb[5] に興味深い解説がある．他方、この作用素のスペクトル的な性質の研究は Weder[9] に始まるが、その後の発展については Umeda[7] の Introduction、及び References を参照して頂きたい．この講演では相対論的シュレディンガー作用素に対してはこれまで論じられてこなかった話題として、一般固有関数展開を取り上げる．

私見によれば、一般固有関数展開定理はきれいな定理であって、これをなるべく多くの作用素に対して示そうと試みるのは自然なことであろう．偏微分作用素に対して、次節で述べる形の一般固有関数展開定理が最初に示されたのは Ikebe[3] であって、$\mathbf{R}^3$ におけるシュレディンガー作用素 $-\triangle+V(x)$ が扱われた．ポテンシャルの遠方における減衰は $O(|x|^{-2-\epsilon})$ である．以降、主に ($\mathbf{R}^n$ での) シュレディンガー作用素に対して、ポテンシャルに課す条件を緩くする方向で拡張がなされてきた．Agmon[1] では、短距離型のポテンシャルを持つシュレディンガー作用素を一般化した形の、高階の楕円型偏微分作用素に対しても一般固有関数展開定理が示せることを喚起している．ディラック作用素に関しては Yamada[8] 及びその文献表を参照されたい．

§2. 主定理

つぎの相対論的シュレディンガー作用素を考える：

$$H := \sqrt{-\triangle+1}+V(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^3.$$

ここで $V(x)$ は実数値可測関数で

$$|V(x)| \le C(1+|x|)^{-\sigma}, \quad \sigma > 2 \tag{1}$$

を満たすとする．このとき、ソボレフ空間 $H^1(\mathbf{R}^3)$ を定義域に取れば H は $L^2(\mathbf{R}^3)$ における自己共役作用素になる．これを再び H と書く．$V=0$ のときの H を H_0 と書く．議論の出発点は

波動作用素の完全性である：

(a) 波動作用素 $W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}\, e^{-itH_0}$ が存在する；

(b) $\mathrm{Ran}(W_\pm) = \mathcal{H}_{ac}(H) = \mathcal{H}_c(H)$；

(c) $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ac}(H) = [1, \infty)$；

(d) $\sigma_p(H)$ の集積点はあるとしても 1 のみである

(Simon [6] による)．ここで H の固有値の存在に関しては何も主張していないことを注意しておく．このとき、(b) により、任意の $f \in L^2$ は

$$f = P_{ac}(H)f + \sum_n (f, \varphi_n)\varphi_n$$

（但し $\{\varphi_n\}$ は H の L^2-固有関数系）と表わされる．さらに、一般化フーリエ変換が直ちに定義できる．実際、通常のフーリエ変換とフーリエ逆変換をそれぞれ

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int u(x)\, e^{-x\cdot\xi}\, dx,$$

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(x) = (2\pi)^{-3/2} \int f(\xi)\, e^{x\cdot\xi}\, d\xi$$

と表わすことにして

$$\mathcal{F}_\pm := \mathcal{F}W_\pm^*, \qquad \overline{\mathcal{F}}_\pm := W_\pm \overline{\mathcal{F}} \tag{2.1}$$

と定義すると、つぎの事実が成り立つ．

補題 2.1.

(i) $\mathcal{F}_\pm \overline{\mathcal{F}}_\pm = \mathbf{1}_{L^2}$、 $\overline{\mathcal{F}}_\pm \mathcal{F}_\pm = P_{ac}(H)$.

(ii) $\mathcal{F}_\pm$ は L^2_x から L^2_ξ への部分等長作用素であって、始集合は $\mathcal{H}_{ac}(H)$、終集合は L^2_ξ である．

(iii) $\mathcal{F}_\pm H f = \sqrt{|\xi|^2 + 1}\,\mathcal{F}_\pm f \qquad (f \in \mathrm{Dom}(H))$.

示したいことは $\mathcal{F}_\pm$、$\overline{\mathcal{F}}_\pm$ を H の一般固有関数を用いて表現することである．そのためには H の一般固有関数を構成しなければならないが、その前にまず H_0 が平面波 $e^{ix\cdot\xi}$ を一般固有関数に持つことを確認しておこう．

補題 2.2. $\varphi_0(x, \xi) = e^{ix\cdot\xi}$ とおくとき、各 ξ に対してつぎが成り立つ．

$$\sqrt{-\triangle_x + 1}\, \varphi_0(x, \xi) = \sqrt{|\xi|^2 + 1}\, \varphi_0(x, \xi) \quad \text{in } \mathcal{S}'_x. \tag{2.2}$$

H の一般固有関数を Agmon[1] のやり方に沿って構成しよう．そのために必要な記号をまず導入しておく．H、H_0 のレゾルベントをそれぞれ $R(z)$、$R_0(z)$ と書く：$R(z) = (H-z)^{-1}$、$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$．重み付き L^2 空間、重み付きソボレフ空間を次のように定義する：

$$L^2_s = \{\, u \mid \|u\|_s := \| < x >^s u \|_{L^2} < +\infty \,\},$$

$$H^m_s = \{\, u \mid \|u\|_{m,s} := \| < D >^m u \|_s < +\infty \,\}.$$

定理 2.1.（極限吸収原理）　$s > 1/2$ とする．任意の $\lambda \in (1, \infty) \setminus \sigma_p(H)$ に対して次の極限が存在する：

$$R^{\pm}(\lambda) := \lim_{\epsilon \to 0} R(\lambda \pm i\epsilon) \quad \text{in } \mathbf{B}(L^2_s;\, H^1_{-s}). \tag{2.3}$$

収束は $(1, \infty) \setminus \sigma_p(H)$ において広義一様．

証明の概略． $\Gamma_0(z) := (-\triangle - z)^{-1}$ と書くことにすると、$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ のとき

$$R_0(z) = (H_0 + z)\,\Gamma_0(z^2 - 1). \tag{2.4}$$

擬微分作用素の L^2 有界性定理を用いると $H_0 + z$ は $\mathbf{B}(H^2_{-s};\, H^1_{-s})$ に値を取る $\mathbf{C}$ 上の連続関数であることがわかる．一方、$-\triangle$ に関しては、任意の $\lambda > 0$ に対して次の極限の存在が知られている：

$$\Gamma_0^{\pm}(\lambda) := \lim_{\epsilon \to 0} \Gamma_0(\lambda \pm i\epsilon) \quad \text{in } \mathbf{B}(L^2_s;\, H^2_{-s}).$$

ここで、収束は $(0, \infty)$ 上広義一様．いま述べた二つの事実と (2.4) とを併せると、任意の $\lambda > 1$ に対して、極限

$$R_0^{\pm}(\lambda) := \lim_{\epsilon \to 0} R_0(\lambda \pm i\epsilon) \quad \text{in } \mathbf{B}(L^2_s;\, H^1_{-s}) \tag{2.5}$$

の存在がわかる．収束はやはり $(1, \infty)$ において広義一様である．(2.5) から (2.3) の極限の存在を導く際の要点は次の等式である：

$$\mathrm{Im}\ < R_0^{\pm}(\lambda)g,\, g > = \pm \frac{\pi\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \int_{\sqrt{|\xi|^2+1}=\lambda} |(\tau\hat{g})(\xi)|^2\, dS_\xi, \qquad (g \in L^2_s).$$

ここで $< \cdot, \cdot >$ は $L^2_{-s} - L^2_s$ の pairing、τ はトレース作用素．この等式を用いると $\lambda \in (1, \infty) \setminus \sigma_p(H)$ のとき $\left(I + VR_0^{\pm}(\lambda)\right)^{-1} \in \mathbf{B}(L^2_s)$ の存在が示せる．この逆作用素は上半平面、及び下半平面での $\mathbf{B}(L^2_s)$-値連続関数 $\left(I + VR_0(z)\right)^{-1}$ の境界値になっており、この事実と等式

$$R(z) = R_0(z)\left(I + VR_0(z)\right)^{-1}, \qquad (\mathrm{Im}\, z \neq 0)$$

とを合わせて考えると定理の主張の成り立つことがわかる. //

系. $\lambda \in (1,\infty)\setminus\sigma_p(H)$、$f \in L^2_s$ に対して

$$(\sqrt{-\Delta+1}+V(x)-\lambda)R^{\pm}(\lambda)f = f \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

そこで H の一般固有関数を $R^{\pm}(\lambda)$ を用いて次のように定める.

定義. $\sqrt{|\xi|^2+1} \in (1,\infty)\setminus\sigma_p(H)$ のとき

$$\varphi^{\pm}(x,\xi) := \varphi_0(x,\xi) - R^{\mp}(\sqrt{|\xi|^2+1})[V(\cdot)\varphi_0(\cdot,\xi)].$$

ここで $1/2 < s < \sigma - 3/2$ のとき $V \in L^2_s$ となることに注意. さて

$$\mathcal{N} = \left\{\,\xi \;\middle|\; \sqrt{|\xi|^2+1} \in \sigma_p(H)\,\right\} \cup \{0\}$$

とおくと、(d) により $\mathcal{N}$ は $\mathbf{R}^3$ における零集合であって、$\varphi^{\pm}(x,\xi)$ は $\mathbf{R}^3_x \times (\mathbf{R}^3_\xi\setminus\mathcal{N})$ における可測関数である. さらに上の系と補題 2.2 とから $\varphi^{\pm}(x,\xi)$ は H の一般固有関数であることがわかる、即ち、任意の $\xi \in \mathbf{R}^3\setminus\mathcal{N}$ に対して

$$\left(\sqrt{-\Delta_x+1}+V(x)\right)\varphi^{\pm}(x,\xi) = \sqrt{|\xi|^2+1}\,\varphi^{\pm}(x,\xi) \quad \text{in } \mathcal{S}'_x.$$

主定理.

(i) $u \in \mathcal{S}_x$ のとき $(\mathcal{F}_{\pm}u)(\xi) = (2\pi)^{-3/2}\displaystyle\int u(x)\overline{\varphi^{\pm}(x,\xi)}\,dx$ a.e. ξ

(ii) $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\mathcal{N})$ のとき $(\overline{\mathcal{F}}_{\pm}f)(x) = (2\pi)^{-3/2}\displaystyle\int f(\xi)\varphi^{\pm}(x,\xi)\,d\xi$ a.e. x

系.

(i) $u \in L^2_x$ のとき $(\mathcal{F}_{\pm}u)(\xi) = \displaystyle\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-3/2}\int_{|x|\le R} u(x)\overline{\varphi^{\pm}(x,\xi)}\,dx$ in L^2_ξ

(ii) $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\mathcal{N})$ のとき $(\overline{\mathcal{F}}_{\pm}f)(x) = \displaystyle\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-3/2}\int_{\{|\xi|\le R\}\setminus\mathcal{N}} f(\xi)\varphi^{\pm}(x,\xi)\,d\xi$ in L^2_x

主定理の証明. (i) のみを示す. (ii) の証明も同様である. $\lambda > 1$ に対し

$$E_0'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\big(R_0^+(\lambda) - R_0^-(\lambda)\big)$$

と書くことにすると、u、$v \in \mathcal{S}$ のとき

$$< u,\, E_0'(\lambda)\, v >= \lambda\sqrt{\lambda^2-1}\,\big(\gamma(\sqrt{\lambda^2-1})\,\hat{u},\, \gamma(\sqrt{\lambda^2-1})\,\hat{v}\big)_{L^2(S^2)} \tag{2.6}$$

が成り立つ. ここで $\gamma(\rho)\hat{u} = \hat{u}(\rho\cdot)$ である. さらに $\hat{v} = \mathcal{F}v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \mathcal{N})$ が成り立つとすると (2.1) により

$$(\mathcal{F}_\pm u,\, \mathcal{F}v) = (u,\, W_\pm v). \tag{2.7}$$

波動作用素 $W_\pm$ の定常表示を用いると (2.7) の右辺は

$$\int \big\langle (1 - VR^\pm(\lambda))u,\, E_0'(\lambda)v \big\rangle\, d\lambda \tag{2.8}$$

に等しい. ここで (2.6) を用いて、変数変換 $\rho := \sqrt{\lambda^2-1}$ を行うと、(2.8) は

$$\int \big(\gamma(\rho)\,\mathcal{F}(1 - VR^\pm(\sqrt{\rho^2+1}\,))u,\, \gamma(\rho)\,\mathcal{F}v\big)_{L^2(S^2)}\, \rho^2\, d\rho \tag{2.9}$$

となる. (2.9) は極座標による積分なので、これを ξ 変数に戻すと

$$\int \mathcal{F}\big[(1 - VR^\pm(\sqrt{|\xi|^2+1}\,))u\big](\xi)\, \overline{\mathcal{F}v(\xi)}\, d\xi \tag{2.10}$$

を得る. $C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \mathcal{N})$ は L^2_ξ で稠密であることと、(2.7) - (2.10) とを合わせると

$$\mathcal{F}_\pm u = \mathcal{F}\big[(1 - VR^\pm(\sqrt{|\xi|^2+1}\,))u\big] \tag{2.11}$$

となるが、(2.11) の右辺に $\varphi^\pm(x,\xi)$ の定義を当てはめれば主定理の (i) が得られる. //

補題2.1 (i)、(ii) が一般固有関数系 $\{\varphi^\pm(x,\xi)\}_\xi$ の完全性を意味する訳であるが、このように一般固有関数系の完全性を波動作用素の完全性に帰着させる考え方は Kuroda[4] による. もちろん、Agmon[1] のやり方をなぞることもできるであろう.

§3. 結び

前節の結果は次のように一般化できる．$H=\sqrt{-\Delta+1}+V(x)$ において、$\sqrt{-\Delta+1}$ を擬微分作用素 $p(D)$ に置き換える．表象 $p(\xi)$ は次の仮定を満たすとする：

(P.1) $p(\xi)$ は実数値 C^∞-関数で、適当な $\mu>0$ に対して $<\mu>^{-\mu}\, p\in\mathcal{B}^\infty$ を満たす；

(P.2) $\alpha'>0$ かつ $\alpha(\rho)\geq \mathrm{const.}\rho^\nu \quad (\rho\gg 1,\ 0<\nu\leq\mu)$ を満たす $\alpha\in C^1\big((0,\infty)\big)$ が存在して $p(\xi)=\alpha(|\xi|)$ と書ける．

この 2 つの仮定のもとで前節の (a) – (d) が成り立つ (Simon[6])．また、極限吸収原理が成り立つことは Ben-Artzi & Nemirovsky[2] により示されている．(2.6) に相当する式は

$$< u,\, E_0'(\lambda)\, v > = \frac{\{\alpha^{-1}(\lambda)\}^2}{\alpha'\big(\alpha^{-1}(\lambda)\big)}\, \big(\gamma\big(\alpha^{-1}(\lambda)\big)\, \hat{u},\, \gamma\left(\alpha^{-1}(\lambda)\right)\hat{v}\big)_{L^2(S^2)}$$

となる．したがって、前節の議論をなぞることにより $H=p(D)+V(x)$ に対して、前節主定理と同じ結果の成り立つことが結論される．

文献表

[1] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, **2**(1975), pp. 151–218.

[2] M. Ben-Artzi and J. Nemirovsky, *Remarks on relativistic Schrödinger operators and their extensions*, preprint, Hebrew University (1996).

[3] T. Ikebe, *Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory*, Arch. Rational Mech. Anal., **5** (1960), pp. 1–34.

[4] S.T. Kuroda, スペクトル理論 II、岩波講座、基礎数学、(1979).

[5] E.H. Lieb, *The stability of matter, from atoms to stars*, Bulltin Amer. Math. Soc., **22** (1990), pp. 1–49.

[6] B. Simon, *Phase space analysis of simple scattering systems: Extensions of some work of Enss*, Duke Math. J., **46** (1979), pp. 119–168.

[7] T. Umeda, *Radiation conditions and resolvent estimates for relativistic Schrödinger operators*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. théor., **63** (1995), pp. 277–296.

[8] O. Yamada, *Eigenfunction expansions and scattering theory for Dirac operators*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **11** (1976), pp. 651–689.

[9] R. Weder, *Spectral properties of one-body relativistic spin-zero hamiltonians*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. théor., **20** (1974), pp. 211–220.