数理解析研究所講究録
994巻 1997年 138-154

固有関数漸近挙動と古典エルゴード性（一般 HAMILTON 系が ERGODIC である為の半古典固有関数に対する必要十分条件）

(東京工業大学) 宮西 吉久 (YOSIHISA MIYANISI)

§0.Introduction

量子力学の教える所に依れば、量子力学の状態は、Shorödinger 方程式と呼ばれる２階偏微分方程式の解として与えられる。その解は、一般には多様体上の関数になり、２乗ノルムが粒子数を示すと考えられている。さらに、固有状態と呼ばれる Shrödinger 作用素の固有値、固有関数が量子力学の等エネルギー面上の運動を記述する。

また、N.Bohr に依れば、Shrödinger 方程式に現れる Planch 定数 h が 0 に近づく ($h \to 0$) 極限状態で、量子力学は古典力学に近づくとされている。この対応原理は、別の言い方をすれば、Shrödinger 方程式の解は、Hamilton 力学系の解構造の情報を、すべて含む事を示唆している。すなわち、Hamilton 力学系の構造（例。周期解の存在、エルゴード性 etc.) は、Shrödinger 方程式の解を調べてわかると思われる。この論文では特に、Hamilton 力学系（古典力学）が、ergodic である為の Shrödinger 作用素の固有状態に対する必要十分条件を導出する。この事は、上述の N.Bohr の対応原理を、エルゴード性に対して示したと思って良い筈である。

では、具体的な論文の内容を、章ごとに紹介する。

§1.では、既知の結果として、compact Riemannian manifold 上の測地流と、その系を古典力学と考えた場合の対応する量子力学として、Laplacian の固有状態を考える。その場合には、測地流が ergodic になる為の必要十分条件が、固有状態によって記述される事が知られている。(定理 1.7.)

次に、§2.では、一般 Hamilton 系（電場、磁場つき）の場合を、$T^*\boldsymbol{R}^n$(phase plane) 上で考え、それに対応する量子力学として、Shrödinger 作用素の固有状態を考える。この場合に得られた、固有状態に対する必要十分条件を、主定理 2.6. として述べる。

次に、§3.で§2.で述べた主定理 2.6. を証明する。その為に、Weyl 型擬微分作用素の理論を用意し、§1.の既知の結果に使われている手法を用いる。

そして最後に、§4.として、いくつかの注意と、未解決問題の紹介をする。

§1.compact Riemannian manifold 上の Laplacian に対する固有関数と測地流 (既知の結果)

ここでは、Laplacian の固有関数漸近挙動 (QP) と測地流が ergodic(CP) になる時の関係をみる。具体的には、まず次の様に設定する。

$$(\mathrm{QP})\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n \quad \text{in } M, \\ \{u_n, \lambda_n\}; \text{固有関数展開 } (\text{in } L^2(M)), \end{cases} \quad (\mathrm{CP})\begin{cases} X_H \equiv (\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{-\partial H}{\partial x}), \\ \exp(tX_H) : S^*M \to S^*M; \text{測地流}. \end{cases}$$

但し、(M,g) は、smooth な compact Riemannian manifold とし、X_Hは、$H(x,p)=\sqrt{g_x(p,p)}$を Hamiltonian とする Hamiltonian vector field とする。

ここでは、以下に Classical ergode(古典エルゴード性) 及び、Quantum ergode (量子エルゴード性) の定義を述べ、その関係を見る。おおざっぱに言うと、読んで字の如く、古典力学 (CP)、量子力学 (QP)、それぞれに対応するエルゴード性、すなわち測地流、もしくは固有関数に対する、S^*M上の一様分布性を定義する。

定義 1.1.(Classical ergodicity)(古典エルゴード性). 測地流 $\exp(tX_H) : S^*M \to S^*M$が classical ergodic であるとは、次を満たす時をいう。

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\exp(tX_H)(x,p))dt = \frac{1}{vol(S^*M)}\int_{S^*M} f(x,p)dvol_{S^*M} \text{ for } \forall f(x,p)\in L^\infty(S^*M).$$

この定義 1.1. は良く知られている様に、時間平均と空間平均が等しい事を意味しており、また Birkoff の定理によって左辺の収束も保証されている。

定義 1.2.(Quantum ergodicity)(量子エルゴード性). $\{u_n,\lambda_n\}$ を固有関数展開とする。固有関数展開が、quantum ergodic であるとは、ある部分列 $\{u_{n_k},\lambda_{n_k}\}$ が存在して、次を満たす時を言う。

$$\begin{cases} \text{条件 1.} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{k}=1 \Longleftrightarrow \text{(almost all,density1)}, \\ \text{and} \\ \text{条件 2.} \quad \lim_{k\to\infty}\langle Op(a)u_{n_k},u_{n_k}\rangle_{L^2} = \frac{1}{vol(S^*M)}\int_{S^*M}a(x,p)dvol_{S^*M} \quad \text{for } \forall a(x,p)\in S^0(S^*M \end{cases}$$

但し、$Op(a)$ は、$a(x,p)\in S^0(S^*M)$ を symbol(表象) とする order 0 の擬微分作用素とし、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$は、多様体 M上の L^2内積を意味する。

この定義 1.2. の意味する所は、多様体上の固有関数が漸近的に L^2norm の意味で一様分布する所にある。また、条件 1. によって、例外的な部分列を除けば、すなわち殆どすべての部分列に対し、一様分布の性質を持つ。注意として以上をまとめると、

注意 *1.3.* (M,g):compact Riemannian manifold とし、固有関数展開 $\{u_n,\lambda_n\}$ が quantum ergodic とする。その時、ある固有関数展開の部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在して、次を満たす。

$$\begin{cases} 1. \quad \lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{k}=1, \\ \text{and} \\ 2. \quad \lim_{k\to\infty}\int_N |u_{n_k}|^2 dvol_M = \frac{vol(N)}{vol(M)} \quad \text{(一様分布性)}. \end{cases}$$

但し、$N\subset M$を任意の開集合とする。

証明. 擬微分作用素の symbol として、形式的に次の様にする。

$$a(x,p) \equiv \begin{cases} 1 & \text{on} \quad S^*N \equiv \{(x,p) \in S^*M : \pi(x,p) \in N\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

但し、$\pi : S^*M \to M$ を projection とする。

そこで、定義 1.2. の条件 2. に今定義した symbol を代入すると、

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \langle Op(a)u_{n_k}, u_{n_k}\rangle_{L^2} &= \frac{1}{vol(S^*M)} \int_{S^*M} a(x,p)dvol_{S^*M} \\
&= \frac{1}{vol(S^n)vol(M)} \int_{S^n} \int_M \pi a(x,p)dvol_M dvol_{S^n} \\
&= \frac{1}{vol(M)} \int_M \pi a(x,p)dvol_M \\
&= \frac{1}{vol(M)} \int_N dvol_M \\
&= \frac{vol(N)}{vol(M)}.
\end{aligned}$$

となって、示された。(q.e.d.)

では、いよいよ Classical ergode（古典エルゴード性）と、Quantum ergode（量子エルゴード性）の関係を見る事にする。

定理 1.4.(Schnirelman)(参考文献 [1]). *Classical ergodic,* $\Longrightarrow$ 任意の固有関数展開に対し、*quantum ergodic*。

この定理によって、古典エルゴード性から、量子エルゴード性が導かれた事になるが、逆については、まだ良くわかっていない。結果を一つ紹介すると、

定理 1.5.(Zelditch)(参考文献 [2]). $M = S^2$ *(2 次元球面)* とすると、ある固有関数展開 $\{u_n, \lambda_n\}$ が存在して、*quantum ergodic* となる。

この結果は、球面上の測地流が classical ergodic でないにもかかわらず、quantum ergodic になる様な固有関数展開の存在を示している。すなわち、一つの固有関数展開に対し、quantum ergodic であっても classical ergodic が導かれる訳でない。この事に関する未解決問題は、§4. に紹介する。そこで、次の様な必要十分条件が知られている。まず、必要となる定義を用意する。

定義 1.6.(The counting function).

$$N(\lambda, M) \equiv \#\{\lambda_n \leq \lambda : \lambda_n \text{は} (QP) \text{の固有関数展開の固有値}\}.$$

定理 1.7.(Sunada)(参考文献 [3]).

多様体上の測地流が *classical ergodic*,

$\Updownarrow$ 必十

$$\begin{cases} 1.\text{任意の固有関数展開が } \textit{quantum ergodic}, \\ \textit{and} \\ 2.\ \lim\limits_{\delta\to 0}\limsup\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{N(\lambda,M)}\sum\limits_{0<|\sqrt{\lambda_i}-\sqrt{\lambda_j}|<\delta}|\langle Op(a)u_i,u_j\rangle_{L^2}|^2=0\ \textit{for}\ \forall\ a\in S^0(S^*M). \end{cases}$$

この結果によって、測地流の古典エルゴード性が、固有状態を用いて導かれた事になる。

また、付加された 2. 式は、物理的な解釈では、推移振幅平均 (The average of transition amplitudes) と考えられている。すなわち、擬微分作用素 $Op(a)$ を観測量 (observable) と考え、違うエネルギー準位（この場合、固有値がエネルギー準位を表わす。）の間の確率振幅を求めている。この事については、§2.の普通の量子力学の設定の下で導かれる結果を見ると、さらに良くわかると思われる。

そこで、次の§2 では、上の定理 1.7. を電場、磁場付きの $T^*\boldsymbol{R}^n$上の Hamilton 系、及び、その量子化と考えられる Schrödinger 方程式の固有状態に、設定 (CP),(QP) を置き変えた時、得られた結果を述べる事にする。

§2.Schrödinger 作用素に対する固有状態と Hamiltonian flow

この章では、Shorödinger 作用素に対する固有状態 (QP) と、Hamiltonian flow(CP) が、ergodic になる時の相互関係をみる。§1.と基本的には同じ流れで話を進めるが、固有状態 (QP) に対する極限の取り方が違う。§1.では、固有値を無限に近づけた極限 (高エネルギー極限) を考えていたが、この章では Planch 定数 h を 0 に近づける極限 (半古典極限) を考える。

また、ここでは簡単の為に、スカラーポテンシャル（電場）を持つ時だけを考えるが、以下の議論は、h-admissible と呼ばれる系にも拡張できる。(参考文献 [4]) その系は、ベクトルポテンシャルをも含む系となっている。

では、具体的に問題を設定する。

$$(\mathrm{QP})\begin{cases} \{\frac{-h^2}{2m}\triangle+V(x)\}u_n(h)=E_n(h)u_n(h) \quad \text{in } \boldsymbol{R}^n, \\ \{u_n(h),E_n(h)\};\text{固有関数展開 } (in\ L^2(\boldsymbol{R}^n)), \end{cases}$$

但し、$u_n(h)\equiv u_n(h)(x)$ であり、h が Planch 定数を表わし、x が空間座標を表わす。ここでは以下、空間座標 x は省略する。

$$(\mathrm{CP})\begin{cases} H(x,p)\equiv\frac{p^2}{2m}+V(x)\in C^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n);\ (\text{Hamiltonian}), \\ X_H\equiv\{\frac{\partial H}{\partial p},-\frac{\partial H}{\partial x}\}; \qquad (\text{Hamiltonian vector field}), \\ \exp(tX_H):H^{-1}(E)\to H^{-1}(E);\ (\text{Hamiltonian flow}). \end{cases}$$

但し、$H^{-1}(E) \equiv \{(x,p) \in T^*\boldsymbol{R}^n : H(x,p) = E\}$ は、等エネルギー曲面を表わす。

次に、以下の仮定 (H1~H4) を置く。これらの仮定は、ゆるめる事もできるが、簡単の為、少し強い仮定をしておく。

(H1)((QP) のスペクトルが離散になり、(CP) の等エネルギー曲面がコンパクトになる為の条件)

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty,$$

(H2)(regular(等エネルギー面に停留点なし))

$$\exists\epsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad dH \neq 0 \quad \text{on } H^{-1}((E-\epsilon, E+\epsilon)),$$

(H3)(Schrödinger 方程式の解の構成に必要な条件)

$$\forall\alpha,\beta \in \boldsymbol{N}^n\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0 \text{ s.t.} \begin{cases} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H(x,p)| < C_{\alpha,\beta}(1+H^2)^{1/2} \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta H(x,p)| < C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+}, \end{cases}$$

(H4)(Periodic points が measure 0) (スペクトルの漸近挙動の解析に必要な条件)

$$m_E(\{(x,p) \in H^{-1}(E) : \exists t \neq 0 \text{ s.t } \exp tX_H(x,p) = (x,p)\}) = 0.$$

但し、m_Eは、等エネルギー面上の Liouville measure。

次に、必要となる定義をいくつか用意する。

定義 2.1.(The energy shell,The counting function) (参考文献 [4]).

$$\begin{cases} \Lambda(E,h) \equiv \{E_j(h) : E-h < E_j(h) < E+h\}, \\ N(E,h) \equiv \#\Lambda(E,h). \end{cases}$$

この定義は、§1.の定義 1.6. に対応した物になっているが、§1.では、高エネルギー極限と呼ばれる固有値が無限大に近い部分を注目するのに対し、上の定義 2.1. では、エネルギーが Eに近い部分を見ている所が相違点である。

次に、Weyl 型擬微分作用素 (The Weyl quantization) と呼ばれる作用素を定義する。

定義 2.2.(The Weyl quantization). $a(x,p) \in S^0(T^*\boldsymbol{R}^n)$ とする。その時、

$$Op_h^W(a)f(x) \equiv \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{T^*\boldsymbol{R}^n} a(\frac{x+y}{2},p)e^{\frac{i(x-y)p}{h}} f(y)dydp \quad \text{for } \forall f(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n).$$

では、古典力学 (CP)、量子力学 (QP)、それぞれに対応するエルゴード性として、Classical ergode(古典エルゴード性)、Semiclassical ergode(半古典エルゴード性) を定義する。

定義 2.3.(Classical ergodic(at $H^{-1}(E)$). $\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \to H^{-1}(E)$ が classical ergodic であるとは、次を満たす時を言う。

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\exp(tX_H)(x,p))dt = \frac{1}{m_E(H^{-1}(E))}\int_{H^{-1}(E)} f(x,p)dm_E \text{ for } \forall f \in L^\infty(H^{-1}(E)).$$

この定義2.3. は、§1.の定義1.1. に対応した物になっており、Hamiltonian flow($\exp(tX_H)$) が、$H^{-1}(E)$ 上で、測度 m_Eに対する保測変換であるから自然な定義と言える。

定義 2.4.(Semiclassical ergodic(near $H^{-1}(E)$)). 固有関数列 $\{u_j(h), E_j(h)\}$ が、semiclassical ergodic(near $H^{-1}(E)$) であるとは、殆どすべての部分列に対して、

$$\lim_{h\to 0, E_j(h)\in\Lambda(E,h)} \langle Op_h^W(a)u_j(h), u_j(h)\rangle_{L^2} = \frac{1}{m_E(H^{-1}(E))}\int_{H^{-1}(E)} a(x,p)dm_E.$$

正確にいうと、

$\{u_j(h), E_j(h)\}$ が、semiclassical ergodic,

$\Updownarrow$ 定義

$$\lim_{h\to 0} \frac{\#\{E_j(h) : |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_j(h)\rangle - \frac{1}{m_E(H^{-1}(E))}\int_{H^{-1}(E)} a(x,p)dm_E|\}}{N(E,h)} = 0,$$

$$\text{for } \forall\epsilon > 0, \forall a(x,p) \in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n).$$

と定義する。

この定義 2.4. は、§1.の定義 1.2. に対応しているが、極限の取り方が半古典極限 ($h \to 0$) になっている所が違う。この事が、semiclassical(半古典) と呼ぶ所以である。

そこで、classical ergodicity と、semiclassical ergodicity の既知の関係として、次が知られている。

定理 2.5.(Helffer,Martinez,Robert)(参考文献 [4]). *(H1)～(H4)* の仮定の下で、

$\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \to H^{-1}(E)$ が *classical ergodic* $\Longrightarrow$ *Semiclassical ergodic(near $H^{-1}(E)$)*。

ところが、この定理では逆がわからない。そこで、必要十分条件として次を得た。

主定理 2.6. 仮定 *(H1)～(H4)* の下で、

$\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \to H^{-1}(E)$ が *classical ergodic*

$\Updownarrow$ 必十

$$\begin{cases} \textit{1. Semiclassical ergodic(near } H^{-1}(E)\textit{)}, \\ \textit{and} \\ \textit{2. } \displaystyle\lim_{\delta\to 0}\limsup_{h\to 0} \frac{1}{N(E,h)} \sum_{\substack{E_j(h)\in\Lambda(E,h), \\ 0<|E_j(h)-E_k(h)|<\delta h}} |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_k(h)\rangle_{L^2}|^2 = 0, \\ \qquad \textit{(transition amplitude=0)} \qquad \textit{for } \forall a \in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n). \end{cases}$$

上の定理 2.6. が、§1.の定理 1.7. に対応する結果となる。

しかし、定理 1.7. と大きく違うのは、高エネルギー極限の代わりに、半古典極限になっている部分と、2. 式に入っている和の範囲が定理 1.7. では$\sqrt{\lambda}$で指定されていたのが、上の定理 2.6. では $E(h)$ となって、固有値のルートがはずれている部分である。これは、証明法が定理 1.7. では多様体上の波動方程式を使い、定理 2.6. では、$\boldsymbol{R}^n$上の Shorödinger 方程式を使う所に起因する。

また、2. 式では、§1.で説明した推移振幅平均 (The average of transition amplitudes on the energy shell $\Lambda(E,h)$), が、そのまま見える形になっている。

それでは、次の§3.で、主定理 2.6. を証明する事にする。

§3.§2. の定理 2.6. の証明

この章では、まず次の定理 3.1. を示す。この定理から、定理 2.6. が示される。

定理 3.1. *(H1)～(H4)* の仮定の下で、

$\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \to H^{-1}(E)$ が *classical ergodic,*

$\Updownarrow$ 必十

$$\begin{cases} 1. \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{N(E,h)} \sum_{E_j(h)=E_k(h)\in\Lambda(E,h)} |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_k(h)\rangle_{L^2}|^2 = |\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2 \ \textit{for}\ \forall a \in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n), \\ \textit{and} \\ 2. \displaystyle\lim_{\delta\to 0}\limsup_{h\to 0} \frac{1}{N(E,h)} \sum_{\substack{E_j(h)\in\Lambda(E,h),\\ 0<|E_j(h)-E_k(h)|<\delta h}} |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_k(h)\rangle_{L^2}|^2 = 0 \quad \textit{for}\ \forall a \in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n). \end{cases}$$

但し、$\langle Op_h^W(a)\rangle_E$は定義 *3.3.* として、後述する。

ここで、1. 式は、near-diagonal asymptotic と考えられ、2. 式は、off-diagonal asymptotic と考えられる。すなわち、$Op_h^W(a)$ を物理的観測量 (observable) とみなした時、$Op_h^W(a)$ の matrix element の対角成分、非対角成分 (transition amplitudes) の計算をしている事になっている。

また、上の定理 3.1. の 2. 式は、定理 2.6. の 2. 式と同じである。

以下、定理 3.1. を証明する為にまず、§3.1.として Weyl 型擬微分作用素 (The Weyl quantization) の理論を紹介する。

§3.1.Weyl 型擬微分作用素 (The Weyl quantization) の理論。

ここでは、semiclassical asymptotic(半古典極限) を扱う道具として、参考文献 [4] にあるように、Weyl 型擬微分作用素の理論を紹介する。

定義 3.2. (The classical time average,The classical space average)(at $H^{-1}(E)$). $a(x,p)\in C_0^\infty(H^{-1}(E))$ とする。その時、次の様に定義する。

$$\begin{cases} (a)_T \equiv \frac{1}{T}\int_0^T a(\exp(tX_H(x,p))dt, \\ \bar{a} \equiv \lim\limits_{T\to\infty}(a)_T, \\ \langle a\rangle_E \equiv \frac{1}{m_E(H^{-1}(E))}\int_{H^{-1}(E)} a(x,p)dm_E. \end{cases}$$

定義 3.3.(The quantum time average,The quantum space average) (near $H^{-1}(E)$).
$a(x,p)\in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n)$ とすると、$Op_h^W(a):L^2(\boldsymbol{R}^n)\to L^2(\boldsymbol{R}^n)$ は、有界作用素となるが、その時、次の様に定義する。

$$\begin{cases} (Op_h^W(a))_T \equiv \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}Op_h^W(a)e^{\frac{-i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}dt, \\ \langle Op_h^W(a)\rangle_E \equiv \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum\limits_{E_j(h)\in\Lambda(E,h)}\langle Op_h^W(a)u_j(h),u_j(h)\rangle_{L^2}. \end{cases}$$

これらの定義は参考文献 [3] にある高エネルギー極限に対する定義を、半古典極限を扱う様に定義し直した物である。つまり、エネルギー (固有値) が E に近い energy shell(定義 2.1. 参照) 上で定義されている。

では、上の定義を用いて Weyl 型擬微分作用素の calculus (The calculus of the Weyl quantization) を述べる。

定理 3.4.(The calculus of the Weyl quantization). $a,b\in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n)$ に対し、仮定 *(H1)〜(H4)* の下、次が成立する。

$$\begin{cases} (1).\|Op_h^W(ab)-Op_h^W(a)Op_h^W(b)\|_{L^2}\to 0 \;\; as\; h\to 0 \quad (product\ fomula(\text{参考文献 }[5],[6])), \\ (2).\|Op_h^W(a^*)-Op_h^W(a)^*\|_{L^2}\to 0 \;\; as\; h\to 0 \quad (\text{参考文献 }[5],[6]), \\ (3).\|(Op_h^W(a))_T-Op_h^W(a_T)\|_{L^2}\to 0 \;\; as\; h\to 0 \quad (egorov\ type\ theorem(\text{参考文献 }[4],[7])), \\ (4).\langle Op_h^W(a)\rangle_E = \langle a\rangle_E \quad (\text{参考文献 }[4],[8]). \end{cases}$$

但し、a^*は、a の複素共役とし、$Op_h^W(a)^*$は $Op_h^W(a)$ の共役作用素とする。また、$\|\ \|_{L^2}$ は、$\boldsymbol{R}^n$上の L^2-*norm* を意味する。

ここで、上の定理 3.4. の仮定 (H1)〜(H4) は、(3),(4) 式の証明に使われる。以下、§3.2.では、上の定理 3.4. の calculus を使用するので、特に断らない限り (H1)〜(H4) は仮定する。

§3.2.定理 3.1. 及び主定理 2.6. の証明。

まず、次のキーとなる補題を証明する。

補題 3.5.

$\exp(tX_H) : H^{-1}(E) \to H^{-1}(E)$ が *classical ergodic,*

$\Updownarrow$ 必十

$|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2 = \lim_{T\to\infty} \langle (Op_h^W(a))_T^* (Op_h^W(a))_T\rangle_E \quad for\, \forall\, a \in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n).$

証明.

$$
\begin{aligned}
(\Downarrow)\quad |\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2 &= |\langle a\rangle_E|^2 \quad \cdots(\text{定理 }3.4.(4)\text{ 式より})\\
&= \langle |\bar{a}|^2\rangle_E \quad \cdots(\text{classical ergodicity の定義 }2.3.)\\
&= \lim_{T\to\infty} \langle a_T^* a_T\rangle_E \quad \cdots(\text{Birkoff の収束定理})\\
&= \lim_{T\to\infty} \langle Op_h^W(a_T^* a_T)\rangle_E \quad \cdots(\text{定理 }3.4.(4)\text{ 式より})\\
&= \lim_{T\to\infty} \langle (Op_h^W(a_T))^* (Op_h^W(a_T))\rangle_E \quad \cdots(\text{定理 }3.4.(1),(2)\text{ 式より})\\
&= \lim_{T\to\infty} \langle (Op_h^W(a))_T^* (Op_h^W(a))_T\rangle_E \quad \cdots(\text{定理 }3.4.(3)\text{ 式より}).
\end{aligned}
$$

$(\Uparrow)$ 上の式を下からたどれば次がわかる。

$$|\langle a\rangle_E|^2 = \langle |\bar{a}|^2\rangle_E.$$

そこで、

$$
\begin{gathered}
|\langle a\rangle_E|^2 = \langle |\bar{a}|^2\rangle_E\\
\Updownarrow\\
\langle a\rangle_E = \bar{a} \quad \text{on } H^{-1}(E) \quad \cdots(\text{classical ergodicity の定義 }3.4.).
\end{gathered}
$$

となって、補題は示された。(q.e.d.)

そこで、補題 3.5. より結局、次の定理 3.6. が示されれば、定理 3.1. がわかった事になる。

定理 3.6. $a(x,p) \in C_0^\infty(T^*\boldsymbol{R}^n)$ に対し、

$|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2 = \lim_{T\to\infty} \langle (Op_h^W(a))_T^* (Op_h^W(a))_T\rangle_E$

$\Updownarrow$ 必十

$$
\begin{cases}
1. \lim_{h\to 0} \frac{1}{N(E,h)} \sum_{E_j(h)=E_k(h)\in\Lambda(E,h)} |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_k(h)\rangle_{L^2}|^2 = |\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2,\\
\textit{and}\\
2. \lim_{\delta\to 0} \limsup_{h\to 0} \frac{1}{N(E,h)} \sum_{\substack{E_j(h)\in\Lambda(E,h),\\ 0<|E_j(h)-E_k(h)|<\delta h}} |\langle Op_h^W(a)u_j(h), u_k(h)\rangle_{L^2}|^2 = 0.
\end{cases}
$$

証明. この証明では、記号を簡単にするために、$E_j(h)$ を E_j、$u_j(h)$ を u_j と書く様に、固有値、固有関数に含まれる Planch 定数 h を省略する。

まず、次の様な事が、単純な式変形によりわかる。以下では、この式変形から得られた (5) 式を元に、証明をする。

$$
\begin{aligned}
&\langle (Op_h^W(a))_T^*(Op_h^W(a))_T u_j, u_j\rangle_{L^2}\\
=&\langle (Op_h^W(a))_T u_j, (Op_h^W(a))_T u_j\rangle_{L^2}\\
=&\langle \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}Op_h^W(a)e^{\frac{-i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}u_j dt, \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{-i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}Op_h^W(a)e^{\frac{i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}u_j dt\rangle_{L^2}\\
=&\langle \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}\sum_k u_k\langle u_k, Op_h^W(a)e^{\frac{-i}{h}(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V)}u_j\rangle_{L^2}dt, \cdots\rangle_{L^2}\\
=&\langle \frac{1}{T}\int_0^T \sum_k e^{\frac{i}{h}(E_k t)}u_k\langle u_k, Op_h^W(a)e^{\frac{-i}{h}(E_j t)}u_j\rangle_{L^2}dt, \cdots\rangle_{L^2}\\
=&\langle \frac{1}{T}\sum_k\int_0^T e^{\frac{i}{h}(E_k t-E_j t)}u_k\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}dt, \cdots\rangle_{L^2}\\
=&\langle \sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h}{Ti(E_k-E_j)}(e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1)u_k\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}+\sum_{k,E_k=E_j}u_k\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}, \cdots\rangle_{L^2}\\
=&\sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2+\sum_{k,E_k=E_j}|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\langle (Op_h^W(a))_T^*(Op_h^W(a))_T u_j, u_j\rangle_{L^2}\\
&=\sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
&+\sum_{k,E_k=E_j}|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\cdots(5)\text{ 式.}
\end{aligned}
$$

となった。

まず、(⇓) を示す。

定理 3.6. の条件と、この (5) 式の右辺の第一項が正になる事から、次の様になる。

$$
\begin{aligned}
&|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2\\
=&\langle (Op_h^W(a))_T^*(Op_h^W(a))_T\rangle_E \quad \cdots(\text{定理 3.6. の条件})\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}\langle (Op_h^W(a))_T^*(Op_h^W(a))_T u_j, u_j\rangle_{L^2} \quad \cdots(\text{定義 3.3.})\\
=&\lim_{h\to 0}\{\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}(\sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2)\\
+&\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}\sum_{k,E_k=E_j}|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\} \quad \cdots((5)\text{ 式より})\\
\geq&\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_k=E_j\in\Lambda(E,h)}|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2 \quad \cdots(6)\text{ 式.}
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{k,E_k=E_j}\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}u_k-\langle Op_h^W(a)\rangle_E u_j\|_{L^2}^2\\
=&\sum_{k,E_k=E_j}|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
&-\langle u_j, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}^*\langle Op_h^W(a)\rangle_E-\langle Op_h^W(a)\rangle_E^*\langle u_j, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}+|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2\\
\geq&0.
\end{aligned}
$$

となる事から、定理 3.4.(4) 式に注意して $\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}$ を取れば、

$$
\liminf_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j=E_k\in\Lambda(E,h)}|\langle u_j, Op_h^W(a)u_k\rangle_{L^2}|^2\geq|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2 \quad \cdots(7)\text{ 式.}
$$

よって、以上の (6)(7) 式より、結局定理 3.6. の式 1. になる。すなわち、

$$
\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j=E_k\in\Lambda(E,h)}|\langle u_j, Op_h^W(a)u_k\rangle_{L^2}|^2=|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2.
$$

を得た。

次に、いま得た式 (定理 3.6. 式 1.) と、(5) 式から結局、

$$
\lim_{T\to\infty}\lim_{h\to 0}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}(\frac{1}{N(E,h)}\sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k, Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2)=0.
$$

となる。

今、関数$\frac{1}{x^2}|e^{ix}-1|^2$のグラフを調べればわかるように、$|\delta|<\frac{1}{T}$に対し、

$$0<|E_j-E_k|<\delta h \Longrightarrow 1 \geq \frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2 \geq \mathrm{const}>0 \quad \cdots(8)\text{式}.$$

となる事から、結局

$$\begin{aligned}
&\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}\Big(\frac{1}{N(E,h)}\sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\Big)\\
\geq&\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),0<|E_j-E_k|<\delta h}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\Big)\\
\geq&\frac{1}{N(E,h)}\mathrm{const}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),0<|E_j-E_k|<\delta h}|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2.
\end{aligned}$$

よって、上式の$\lim_{T\to\infty}\limsup_{h\to 0}$を取る事で、結局定理3.6.の式2.を得た。

では、逆($\Uparrow$)を示す。

まず、次が成立する。

$$\begin{aligned}
&\langle (Op_h^W(a))_T^*(Op_h^W(a))_T\rangle_E\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}\langle (Op_h^W(a))_T^*(Op_h^W(a))_T u_j,u_j\rangle_{L^2} \quad \cdots(\text{定義}3.3.)\\
=&\lim_{h\to 0}\Big\{\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}\Big(\frac{1}{N(E,h)}\sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\Big)\\
&+\frac{1}{N(E,h)}\sum_{k,E_k=E_j}|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\Big)\Big\} \quad \cdots((5)\text{より})\\
=&\lim_{h\to 0}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h)}\Big(\frac{1}{N(E,h)}\sum_{k,E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\Big)\\
&+|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2 \quad \cdots(\text{定理の式}1.\text{より}).
\end{aligned}$$

よって、上式の第一項が$T\to\infty$で、0に収束する事を示せばよい。すなわち、

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\Big)=0.$$

を示す。ところが、式 (8) に注意すれば、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),E_k\neq E_j}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
\leq&\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),|E_k-E_j|<\delta h}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
+&\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),|E_k-E_j|>\delta h}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
\leq&\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),|E_k-E_j|<\delta h}|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\quad\cdots(\text{(8) 式より})\\
+&\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),|E_k-E_j|>\delta h}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
=&\epsilon(\text{任意に小さい正数})\quad\text{for small }\delta>0\quad\cdots(\text{定理の式 2. より})\\
+&\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),|E_k-E_j|>\delta h}\frac{h^2}{T^2|E_k-E_j|^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
\leq&\epsilon+\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),|E_k-E_j|>\delta h}\frac{1}{T^2\delta^2}|e^{\frac{i}{h}(E_k-E_j)T}-1|^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
\leq&\epsilon+\limsup_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j\in\Lambda(E,h),|E_k-E_j|>\delta h}\frac{1}{T^2\delta^2}2^2|\langle u_k,Op_h^W(a)u_j\rangle_{L^2}|^2\\
&\to\epsilon,\quad\text{as }T\to\infty.
\end{aligned}
$$

となって、定理は示された。(q.e.d.)

では、定理 2.6.(主定理) を示す。

主定理 *2.6.* の証明. 定理 2.6. の式 2. は、定理 3.1. の式 2. と同じなので、主定理 2.6. を証明する為には、今示した、定理 3.1. の式 1. と、semiclassical ergodicity(半古典エルゴード性)(定義 2.4.) が同値である事を示せば良い。

まず、次に注意する。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j(h)=E_k(h)\in\Lambda(E,h)}|\langle Op_h^W(a)u_j(h),u_k(h)\rangle_{L^2}|^2\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j(h)\in\Lambda(E,h)}|\langle Op_h^W(a)u_j(h),u_j(h)\rangle_{L^2}|^2\\
=&|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2.
\end{aligned}
$$

そこで、

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j(h)\in\Lambda(E,h)}|\langle Op_h^W(a)-\langle a\rangle_E u_j(h),u_j(h)\rangle_{L^2}|^2$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j(h)\in\Lambda(E,h)}|\langle (Op_h^W(a)-\langle Op_h^W(a)\rangle_E)u_j(h),u_j(h)\rangle_{L^2}|^2 \quad \cdots(\text{定理 }3.4.(4))$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j(h)\in\Lambda(E,h)}|\langle Op_h^W(a)u_j(h),u_j(h)\rangle_{L^2}|^2-|\langle Op_h^W(a)\rangle_E|^2$$
$$=0.$$

つまり、

$$\begin{cases}\alpha_j(h)\equiv\langle Op_h^W(a)u_j(h),u_j(h)\rangle_{L^2},\\ \alpha\equiv\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum_{E_j(h)\in\Lambda(E,h)}\langle Op_h^W(a)u_j(h),u_j(h)\rangle_{L^2}.\end{cases}$$

と定義すると、結局

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum|\alpha-\alpha_j(h)|^2=0.$$

となり、Cesaro 平均に関する定理より (参考文献 [3])

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{N(E,h)}\sum|\alpha-\alpha_j(h)|^2=0,$$
$$\Updownarrow \text{必十}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\#\{j:|\alpha_j(h)-\alpha|<\epsilon\}}{N(E,h)}=0 \text{ for } \forall\epsilon>0.$$

これは、まさに semiclassical ergodic の定義 2.4. に等しい。よって、主定理 2.6. は示された。(q.e.d.)

§4. その他の Open problems

ここでは、いくつかの未解決問題を紹介する。

まず、quantum ergodicity に関する予想を紹介する。

予想 **4.1.(Quantum unique ergodicity)(Sarnack,Rudnik).** *(参考文献 [9].)* (M,g) を負曲率 *$(K<0)$compact Riemannian manifold* とする。その時、部分列を選ぶことなく

$$\lim_{n\to\infty}\langle Op(a)u_n,u_n\rangle=\frac{1}{vol(S^*M)}\int_{S^*M}a(x,\xi)dvol_{S^*M}.$$

となるか?

予想 **4.2.** *(参考文献 [2].) "Quantum ergodic⟹Classical ergodic"は generic property* か?

この予想4.2.は、§1.の定理1.5.で述べたが、要するに任意の固有関数展開が quantum ergodic ならば、測地流が classical ergodic になるかどうかが問題になっている。

次に、この論文では、固有関数の L^2-norm に対する一様分布性 (ergodicity) に注目して来たが、必ずしも固有関数は多様体上、一様分布するとは限らない。(§1.注意 1.3. 参照) つまり、固有関数の L^2-norm が、多様体上のある部分集合上に集中する事もある。(参考文献 [2],[11],[12].) この事に関する予想について、いくつか最後に述べる。

予想 **4.3.(Latzukin).** *(参考文献 [10].)* $\gamma \subset S^*M$を測地流で不変な集合とする。すなわち、$\exp(tX_H)\gamma = \gamma$ *for* $\forall t \in \boldsymbol{R}$とする。今、$meas(\gamma) > 0$ とする。その時、ある部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在して、

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\pi\gamma}|u_{n_k}|^2 dvol_M = 1$$

となるか?

つまり、予想4.3.では、周期解などの測地流に対する不変集合に固有関数の L^2-norm が集中する可能性をしめす事が問題となっている。

注意 *4.4.* 上の Conjecture の逆は、成立する。すなわち、ある部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在して、

$$\lim_{k\to\infty}\int_{S}|u_{n_k}|^2 dvol_M = 1.$$

となるならば、ある$\gamma \subset S^*M$が存在して、測地流で不変であり、$\pi\gamma \subset S$となる。

もう一つ、scare と呼ばれる固有関数集中の問題を述べる。

定義 **4.5.(scar).** 固有関数展開 $\{u_n(x)\}$ に対し、$\mu_n \equiv |u_n(x)|^2 dvol_M$は、多様体M上の Radon 測度になるが、部分列 $\{\mu_{n_k}\}$ を選んで次の様に弱収束する時、固有関数展開は (閉集合)$S \subset M$に scar すると言う。すなわち、

$$\begin{aligned}
&\{\mu_{n_k}\} \text{ scars to } S \subset M,\\
&\Updownarrow (\text{定義})\\
&\begin{cases} 1.\ \mu_{n_k} \to \exists\, \mu(\text{Radon 測度}) \quad (\text{弱収束}),\\ \text{and}\\ 2.\ spt(\mu_{sing}) \subset S. \end{cases}
\end{aligned}$$

但し、$\mu \equiv \mu_{reg} + \mu_{sing}$を Lebesgue 分解とする。

この定義4.5.の意味は、固有関数展開の高エネルギー極限の特異台 (singular support) の事である。

また、固有関数展開のある部分列が一様分布する (quantum ergodic) ならば、その列に対する特異台は空集合になる。

問題 **4.6.** *scar* の構造を調べよ。(特に、測地流との関係を求めよ。)

この問題については、数値計算はあるのだが、あまり良くわかっていない。唯一、arithemetic Riemannien surface 上で scar が決して起こらない事、すなわち、任意の弱収束列の特異台は常に空集合となる事がわかっている。(参考文献 [2].)

そこで、次の事を注意として得た。

注意 **4.7.** $\{\mu_{n_k}\}$ *scars to* $S \subset M$, とする。さらに、$x \in S$を孤立点とする。その時、

$$\{\mu_{n_k}\} \textit{ scars to } S \backslash \{x\}.$$

この注意によって、孤立点に scar が起こらない事がわかった。例えば、デルタ関数 $\delta(x)$ などの、その特異台が孤立点を含む測度には決して固有関数列は収束しないのである。

REFERENCES

1. Schnirelman,A.I, *Ergodic properties of eigenfunctions.*, Usp.Math.Nauk **29** (1974), 181–182.
2. S.Zelditch, *Quantum ergodicity on the sphere*, Commun.Math.Phys. **146** (1992), 61–71.
3. T.Sunada, *Quantum ergodicity*, preprint..
4. B.Helffer,A.Martinez,D.Robert, *Ergodicite et limite semiclassique*, Commun.Math.Phys. **109** (1987), 313–326.
5. L.Hörmander, *The Weyl calculus of pseudo-differential operators.*, Commun.P.A.M. **32** (1979), 359–443.
6. P.Gérard and E.Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem.*, Duke.Math.J. **71** (1993), 559–607.
7. V.Petkov and D.Robert, *Asymptotique semi-classique du spectre d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques.*, Commun.P.D.E. **10** (1985), 365–390.
8. D.Robert, *Autour de l'approximation semi-classique.*, Cours. de l'Université de Nantes et de Récife, Birkhauser PM 68, 1983.
9. Z.Rudnik,P.Sarnack, *The behavior of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifold.*, Commun.Math.Phys. **161** (1994), 195–213.
10. Vladimir F.Lazutkin, *KAM theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions.*, Springer Verlag, 1993.
11. S.Zelditch, *Quantum transition amplitudes for ergodic and for completely integrable systems.*, J.Funct.Anal. **94** (1990), 415–436.
12. Colin de Verdiere, *Ergodicite et fonctions propres du Laplacien.*, Commun.Math.Phys. **102** (1985), 497–502.

その他の関連文献。

13. T.Paul,A.Uribe, *On the pointwise behavior of semiclassical measures.*, Commun.Math.Phys. (1996), 229–258.
14. S.Zelditch, *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces.*, Duke.Math.J. **55** (1987), 919–941.

15. S.Zelditch,M.Zwolski, *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Commun.Math.Phys. **175** (1996), 673–682.

16. M.Farris, *Egorov's theorem on a manifold with diffractive boundary.*, Commun.P.D.E. **6** (1981), 651–687.

さらに詳しい参考文献については、上の S.Zelditch の論文を参照の事。