数理解析研究所講究録
995巻 1997年 111-115

p-harmonic maps について

山口大・理　中内伸光
(Nobumitsu Nakauchi)

1．動機

harmonic maps の理論は近年、微分幾何学における応用面での研究も進んできた。1つの方向として、標語的には

$$\boxed{\text{harmonic maps の理論}} \Longrightarrow \boxed{\text{リーマン構造の幾何学}}$$

である。この図式において、「リーマン構造」を「共形構造」に置き換えたとき、矢印の左側に来るものは何であろうか? harmonic maps は、L^2-エネルギー汎関数の停留写像として定義されるが、

「調べたい幾何に合わせて汎関数を選ぶ」

という作業方針に従えば、「共形構造」に、より適合するものは、L^n-エネルギー汎関数である。(ここで、n は source manifold の次元。) この L^n-エネルギーは、「関数」の場合は、“capacity” (容量) として古くから馴染みのあるものである。そこで、 L^n-エネルギー汎関数の停留写像である n-harmonic maps を用いて、

$$\boxed{n\text{-harmonic maps の理論}} \overset{?}{\Longrightarrow} \boxed{\text{共形構造の幾何学}}$$

という研究形態は可能か?という疑問が、この話の動機である。この方向のアプローチは、「共形不変性」を得るための代償として、いくつかの技術的困難が現れてくるため、うまくいくかどうか試行錯誤中である。このノートでは、その前段階として、n-harmonic maps と一般の p-harmonic maps ($p \geq 2$) について、どういうことはわかっているか、この近辺の手短かな解説を目的とする。

2．考えるべきカテゴリー

まず、p-harmonic map の定義を復習しておく：

定義．M, N をリーマン多様体とする。写像 u: $M \to N$ が weakly p-harmonic map であるとは、次の２つの条件を満たすものをいう：

（１）u は M の任意のコンパクト集合上、それ自身と（超関数の意味での）１階微分が p-乗可積分である。

（２）u は p-エネルギー汎関数 $\mathrm{E}_p(u) := \int_M \|du\|^p$ の Euler-Lagrange 方程式系

$$(*) \qquad div\,(\|du\|^{p-2}\nabla u) = 0$$

の弱解（test function をかけて部分積分した形）である。

以下、簡単のため、weakly p-harmonic map を単に p-harmonic map と呼ぶことにする。p-harmonic map の正則性については、次の結果が知られている。

定理１（Hardt-Lin）　u が p-エネルギー E_p を最小（極小）にする p-harmonic map ならば、M の閉部分集合 $\mathcal{S}_u$ が存在して次の２つの条件を満たす：

（１）u は、$M - \mathcal{S}_u$ 上 $\mathrm{C}^{1,\alpha}_{loc}$ 級（M の各点に対して、ある α があって、その点のある近傍上 $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ 級）である。

（２）$(n-[p]-1)$ より大きい任意の非負の数 q に対して、$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}_u) = 0$ である。ここで、$\mathcal{H}^q$ は q 次元 Hausdorff 測度で、[ ] は Gauss 記号、n は M の次元とする。

この定理は一般的主張であり、個々の場合には、$\mathcal{S}_u$ はもっと小さな集合であることも少なくない。実際、微分幾何で用いられる harmonic maps $(p = 2)$ は至るところ滑らかであり、$\mathcal{S}_u = \emptyset$ となるものを扱っている。ちなみに、我々が扱いたい $p = n$ の場合は特に、$\mathcal{H}^0(\mathcal{S}_u) = 0$、即ち、$\mathcal{S}_u = \emptyset$ となって、M, N の幾何学的形状によらずに、最小解は常に至るところ正則（$\mathrm{C}^{1,\alpha}_{loc}$ 級）であることに注意しておこう。

一方、$p \neq 2$ のときは、方程式系 $(*)$ が退化楕円型となり、$\mathrm{C}^{1,\alpha}_{loc}$ 級より高い正則性は、一般には期待できない。このことを考慮すると、「正

則性」と「対象の豊富さ」を兼ね備えた p-harmonic maps のクラスは C^1 級のカテゴリーで考えるのが妥当(*)であろう。「C^1 級」という正則性は、微分幾何学的応用には、幾分弱すぎる感があるが、「C^1 級の p-harmonic maps は、“ある意味で”２階微分できる」ことがわかり、応用上の道具としての最低限の条件は満たしているように思われる。

以下、このノートでは、 $p \geq 2$ である p-harmonic maps を対象とする。

３．存在

C^1 級の p-harmonic maps の存在について、いくつかの知られている結果を述べる。まず、harmonic maps に関する Eells-Sampson の結果の、p-harmonic map 版として、次が知られている。

定理２（Duzaar-Fuchs）　M はコンパクトで、N の断面曲率は負であるとする。このとき、$C^1(M, N)$ の各ホモトピー類に p-エネルギー E_p を最小にする p-harmonic map が存在する。

Eells-Sampson は、熱方程式の方法を用いているが、Duzaar-Fuchs は Sacks-Uhlenbeck 流の perturbation method を使って証明している。p-harmonic map の熱方程式については、現時点では、target manifold が球面などの特殊な場合に弱解の存在が得られている段階でしかなく、これからの研究課題であろう。

定理３（Jost）　M はコンパクトで、$\pi_n(N) = \{0\}$ であるとする。このとき、$C^1(M, N)$ の各ホモトピー類に n-エネルギー E_n を最小にする p-harmonic map が存在する。

これは、harmonic maps についての Sacks-Uhlenbeck の結果の一部に対応している。N が負曲率なら $\pi_n(N) = \{0\}$ であるから、n-harmonic maps の場合に限定すれば、定理３は定理２の一般化と見なせる。Jost の証明は、Courant 流の古典的な方法によっているが、現在では、B.White の結果と Hardt-Lin の正則性（定理１）から直ちに導かれる。$\pi_n(N) = \{0\}$ という条件を「N の中の n-次元球面はホモトピーのレベルで trivial、したがって、bubbling は起こらない」と解釈すれば、主張自体は納得のいく結果である。

(*)　C^∞ 級の重要な例も少なくはないことを注意しておく。

$\pi_n(N) = \{0\}$ でない場合は、Sacks-Uhlenbeck の harmonic sphere の結果と同様に、次がわかる。

定理４（Kawai-Takeuchi-Nakauchi）　N は単連結（$\pi_1(N) = \{1\}$）であるとする。このとき、$C^1(S^n, N)$ の任意の元を取り、その自由ホモトピー類 $[u]$ を考えたとき、$C^1(S^n, N)$ に属する、有限個の n-harmonic maps $u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}$ が存在して、次の３つの条件を満たす：

（１）$[u] = [u^{(1)}] + \ldots + [u^{(k)}]$（自由ホモトピー類として）

（２）$\inf_{v \in [u]} E_n(v) = E_n(u^{(1)}) + \ldots + E_n(u^{(k)})$

（３）$u^{(j)}$ は、自由ホモトピー類 $[u^{(j)}]$ の中で E_n を最小にする。

上で、「$\pi_1(N) = \{1\}$」という仮定は、自由ホモトピ類が well-defined であるための仮定である。この仮定がない一般の場合も、$\pi_1(N)$ の $\pi_n(N)$ への作用を用いて、結論を記述することができる。

４．非存在 ―― Liouville type theorems

Liouville type theorems というのは、ここでは、

「p-harmonic map $u : M \to N$ が、ある“有界性条件”を満たすならば、u は定値写像である。」

というタイプの定理を指すものとする。“有界性条件”の例としては、

（ａ）写像の有界性（像があるコンパクト集合に含まれる）

（ｂ）（p-)エネルギー有界性

などが考えられる。（ｂ）については、次がわかる。

定理５　M は非コンパクト完備連結で、リッチ曲率が非負、N は断面曲率が非正であるとする。このとき、C^1 級の p-harmonic map $u : M \to N$ が $E_p(u) < \infty$ を満たすならば、u は定値写像である。

これは、harmonic maps についての Schoen-Yau の結果の一般化であるが、証明には、近似を含むいくつかの議論が必要となることに注意しておく。なぜなら、このような結果の証明には普通、Bochner technique が用いられるが、p-エネルギー密度 $\|du\|^p$ の Laplacian をとるには、u の３階微分可能性が必要となるからである。

5．安定性

安定性の議論には、p-エネルギーの第２変分が前提となり、u の３階微分（もしくは、部分積分して２階微分）が必要となるから、一般の (weakly) harmonic maps については、安定性の概念が意味をもたない。C^1 級の p-harmonic maps については、前述の「“ある意味”での２階微分可能性」を用いることにより、安定性が議論できる。

6．取扱い時の注意点

最後に、p-harmonic maps についての議論において、注意すべき点を、次の３つの項目にまとめておく。

［１］一般の p-harmonic maps の議論では、harmonic maps の場合には現れない項が出てくる（ので、その項の取扱いが必要になる)。

［２］harmonic maps の議論に現れる指数や定数の 2 は、一般の p では p や $2p-2$ など、違う指数に分岐する（ので工夫が必要になる)。

［３］(n-harmonic maps について)「２次元」と「３次元以上」の共形構造の豊富さの違い（のために、harmonic maps のときと同じ手法が使えないことも少なくない。)