数理解析研究所講究録
995巻 1997年 40-50

曲面のbubblingと熱核の収束

joint work with 加須栄篤（大阪市大・理）

静岡大学・理学部 久村裕憲

構成

§1. スペクトル距離

このセクションでは、コンパクト連結リーマン多様体の間に、熱核を使って、スペクトル幾何に密接した形で、距離を導入する。

(M, g)をコンパクト連結リーマン多様体, wをM上の正値C^∞関数とし、簡単のため、$\int_M w\,dv_g = 1$という仮定をおく。（ここでdv_gは(M, g)のリーマン測度）。このとき$\mathcal{L}_w u \overset{\text{def}}{=} \Delta u + \langle \nabla \log w, \nabla u \rangle$ $(u \in C^\infty(M))$という微分作用素$\mathcal{L}_w$を考える。$\mathcal{L}_w$は2次形式

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle w\,dv_g = -\int_M (\mathcal{L}_w u)\, v\, w\,dv_g$$

$$(u, v \in C^\infty(M))$$

に associate していること，また，$w=$ constant のときには $\mathcal{L}_w$ はラプラシアンに他ならないことに注意されたい。（以下，$w=$ constant，$\mathcal{L}_w=\Delta$ と思って，本講を読んでいただいてかまわない。） $\mathcal{L}_w$ は $L^2(M, \mu^w \overset{\text{def}}{=} w\,dv_g)$ 上の本質的自己共役作用素である。従って $\mathcal{L}_w$ の closure $\overline{\mathcal{L}_w}$ は自己共役作用素だが，それを簡単に $\mathcal{L}_w$ と書く。$\mathcal{L}_w$ は discrete spectrum

$$0=\lambda_0<\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\quad\nearrow\infty$$

を持つ。また，$\mathcal{L}_w$ の $L^2(M,\mu^w)$ 上の熱核を $p_w(t,x,y)$ と書く。

<u>定義</u>　(M, g_M, v) と (N, g_N, w) を2つの上のようなリーマン多様体と関数の組とする。このとき，map $h: M\to N$ が ε-spectral approximation とは，

$$\sup\left\{ e^{-(t+\frac{1}{t})}\left|p_v(t,x,y)-p_w(t,h(x),h(y))\right| ;\ {\forall t>0 \atop \forall x,y\in M} \right\}<\varepsilon$$

が成立つときいう。そして，

$$SD((M,g_M,v),(N,g_N,w))$$
$$\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{\varepsilon>0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} {}^{\exists}f: M\to N & \varepsilon\text{-spectral approximation} \\ {}^{\exists}h: N\to M & \quad\quad\text{〃} \end{array}\right\}$$

とおき，これを (M,g_M,v) と (N,g_N,w) の間のスペクトル距離と名付ける。次の補題よりこれを距離と呼んでさしつかえない。

<u>補題1</u>　$SD((M, g_M, v), (N, g_N, w)) = 0$

$\Rightarrow$ ${}^\exists f : M \to N$ homeomorphism s.t.

$$\begin{cases} p_v(t, x, y) = p_w(t, f(x), f(y)) & {}^\forall t > 0 \ {}^\forall x, y \in M \quad \cdots ① \\ f_* \mu^v = \mu^w & \cdots ② \end{cases}$$

ここで、Varadhan の定理

$$\lim_{t \downarrow 0} t \log p_v(t, x, y) = -\frac{d^2(x, y)}{4}$$

に注意すれば、f は isometry であり、$f^* w = v$ も成立つ。

<u>注意1</u>．　$\lim_{t \downarrow 0} p_v(t, x, y) = \delta_x(y)$ を使うと ① から ② が導出されるので ① が本質的である。

この補題と注意により、① を満たす f が存在するとき、$(M, g_M, v) \sim (N, g_N, w)$ として同値関係を導入すれば、スペクトル距離 SD は $\{(M, g_M, v) \mid \text{as above}\}/\sim$ 上に距離構造を導入することが分る。

SD について次の命題は基本的である。

<u>命題1</u>．　$a > 0$，$\nu > 0$，$\tau > 0$ が与えられたとき、

$\{(M, g, v) \mid \text{as above},\ p_v(t, x, x) \leq a / t^{\frac{\nu}{2}},\ {}^\forall x \in M\ {}^\forall t \in (0, \tau]\}/\sim$

は SD に関しプレコンパクト（全有界）である。

注意2. 熱核が上の命題1のような形の upper bound を持つことと、Nashの不等式

$$\|\phi\|_2^{2+\frac{4}{\nu}} \leqq A\{\|\nabla\phi\|_2^2 + \tau^{-1}\|\phi\|_2^2\}\|\phi\|_1^{\frac{4}{\nu}}, \quad \forall\phi\in C^\infty(M)$$

が成立つこととは同値である。また $\nu>2$ のときは、これは Sobolevの不等式

$$\|\phi\|_{\frac{2\nu}{\nu-2}}^2 \leqq A'\{\|\nabla\phi\|_2^2 + \tau^{-1}\|\phi\|_2^2\}$$

とも同値である。そして、Nashの不等式から、(ある番号以上のすべての)才i固有値の上下からの評価や、Mの直径の上からの評価が、A,τ,ν のみに depend する定数によって与えられる。(詳細は[K-K II]参照)。

§2. branched surface with bounded mean curvature の Laplacian について

(M,g) を2次元コンパクト連結リーマン多様体, $(\overline{M},\overline{g})$ を完備リーマン多様体とし、$f:M\to\overline{M}$ を有界な平均曲率(ベクトル) H_f を持つ weakly conformal map とする。ここで weakly conformal とは

$$\exists\varphi\geqq 0 \quad s.t. \quad f^*\overline{g}=\varphi g \quad , \varphi\not\equiv 0$$

が成立つことをいい、そして、H_f が有界とは、

$$\tau(f,g)=\varphi H_f \quad , \quad |H_f|_\infty \leqq {}^\exists C$$

が成立つことを意味するものとする。ここで、$\tau(f,g)$は $f:(M,g)\to(\bar{M},\bar{g})$ の tension field を表す。すると、任意の $z_0\in M$ に対しある $0\leqq m\in\mathbb{Z}$ とある $a\in\mathbb{C}^N\setminus\{0\}$ が存在して、

$$f_z(z)=a(z-z_0)^m+o(|z-z_0|^m) \quad \text{as} \quad z\to z_0$$

と書け、さらに、$f_z(z_0)=0$ ならば $m\geqq 1$ が成立つという Hartman − Winter の定理より、branch points は有限個しかないのが分る。そこで、$\mathcal{B}$ を f の branch points の集合 i.e.

$$\mathcal{B}\overset{\text{def}}{=}\{x\in M \mid df(x)=0\}$$

とおき、$(M, f^*\bar{g})$ 上のラプラシアンを次で定義する。

$$\mathrm{Dom}(\Delta)=\{u\in C^2(M\setminus\mathcal{B}) \mid u, |\nabla u|, \Delta u\in L^2(M, dv_{f^*\bar{g}})\}$$

$\Delta u=$ metric $f^*\bar{g}$ に関する u の Laplacian $(u\in\mathrm{Dom}(\Delta))$

このとき次が成立つ。

補題2. 上の Δ は本質的自己共役 on $L^2(M, dv_{f^*\bar{g}})$ である。その閉包 $\bar{\Delta}$ を単に Δ と書き、Δ の熱核を $p(t,x,y)$ と書く。Δ は discrete spectrum

$$0=\lambda_0<\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots \quad \nearrow\infty$$

を持つ。$p(t,x,y)$ は $\{x\in M \mid \mathrm{dist}(\mathcal{B},x)>r\}$ 上の Dirichlet heat kernel $p_r(t,x;y)$ の $r\downarrow 0$ としたときの

極限に等しく、

$$\begin{cases} \int_M p(t,x,y)\, dv_{f^*\bar{g}}(y) = 1 & \cdots ③ \\ \int_M |\nabla_y^{f^*\bar{g}} p(t,x,y)|^2_{f^*\bar{g}}\, dv_{f^*\bar{g}}(y) < +\infty & \end{cases}$$

が成立つ。さらに、$p(t,x,y)$ 及び Δ の固有関数は branch points まで込めて M 上連続である。

注意3. $\lambda_1 > 0$ は、branched manifold 上の熱核の lower bound の導出で使い，また、保存則 ③ は次のセクションの定理で、極限において、熱核が分解することを言うのに用いる。補題2は'連続性'を除いて本質的に[Li-Tian]による。

§3. 得られた結果

次が得られた結果である。

定理（加須栄一久村）

(M, g) を2次元コンパクト連結リーマン多様体，$(\bar{M}, \bar{g})$ を完備リーマン多様体で

$\bar{M}$ の断面曲率 $\leq K$

$\bar{M}$ の単射半径 $\geq L$

を満たすものとする。（ここで $K \geq 0$, 及び $L > 0$ は定数）

また、$f_n : M \to \overline{M}$ を (nonconstant) weakly conformal map の列で、

$$\begin{cases} |H_{f_n}|_\infty \leqq \gamma \\ \mathrm{Area}(M, f_n^*\overline{g}) \leqq b \\ {}^\exists o \in M \ \text{s.t.}\ \{f_n(o) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ は } \overline{M} \text{ の有界集合} \end{cases}$$

を満たすものとする。ここで H_{f_n} は f_n の平均曲率ベクトル, γ, b は n によらない定数。

このとき、次の(1), (2), (3), (4)が成立つ。

(1) branched surfaces $(M, g_n \overset{\text{def}}{=} f_n^*\overline{g}, \mu_{g_n} \overset{\text{def}}{=} dv_{g_n}/\mathrm{Area}(M, g_n))$ の熱核 p^{g_n} は

$$p^{g_n}(t, x, x) \leqq a/t \quad ({}^\forall t \in (0, \tau], {}^\forall x \in M)$$

を満たす。ここで、a, $\tau > 0$ は K, ι, γ, b のみによる定数。特に

$$\mathrm{diam}(M, g_n) \leqq C_1(K, \iota, b, \gamma)$$

$${}^\exists i_0 = i_0(K, \iota, b, \gamma) \ {}^\forall i \geqq i_0 :$$

$$C_2(K, \iota, b, \gamma, i) \leqq \lambda_i \leqq C_3(K, \iota, b, \gamma, i)$$

が成立つ。また、

$$\mathrm{Area}(M, g_n) \geqq C_4(K, \iota, b, \gamma) > 0$$

も成立つ。

(2) 上の状況において、一般に bubbling という現象が起きるが そのとき 'energy loss' は起きない。すなわち (適当に部

分列を取れば）

$\exists \varphi_i : S^2 \to \overline{M}$: $C^{1,\alpha}$ ($^\forall \alpha \in (0,1)$) の conformal branched immersion with bounded mean curvature ($|H_{\varphi_i}|_\infty \leqq b$)

($i = 1, 2, \cdots, k$)

及び

$\exists f_\infty : M \to \overline{M}$: $C^{1,\alpha}$ ($^\forall \alpha \in (0,1)$) の conformal branched immersion with bounded mean curvature ($|H_{f_\infty}|_\infty \leqq b$) で $M \setminus \Sigma$ での f_n の limit map (Σ は M 上の bubble points の集合)

が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Area}(M, f_n^*\bar{g}) = \mathrm{Area}(M, f_\infty^*\bar{g}) + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Area}(S^2, \varphi_i^*\bar{g})$$

が成立つ。

(3) 各 bubble point で

(base map による bubble point の像)

＝(bubble map による south pole の像)

が成立つ。

(4) (部分列を取り) (2) が成立つとき、(M, g_n, μ_{g_n}) はスペクトル距離 SD の意味で次の (X, η, P_X) に収束する：ここで X は連結距離空間、η は X 上のラドン測度、P_X は $L^2(X, \eta)$

上の regular Dirichlet form に associate する C^0-semigroup の積分核で、η の support は次のように分解する：

(i) $f_\infty \neq$ constant map のとき、

$\mathrm{supp}\,\eta = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_k$ （直和）となり、

位相同型 $F : (M, f_\infty^* \bar{g}) \to X$, $F_i : (S^2, \varphi_i^* \bar{g}) \to X$ が存在して次の (a), (b) が成立つ。

(a) $F(M) = \Sigma_0$,

$F_* \left(\frac{a_\infty}{V_\infty} \mu_{f_\infty^* \bar{g}} \right) = \chi_{\Sigma_0} \cdot \eta$,

$\frac{V_\infty}{a_\infty} p^{f_\infty^* \bar{g}}(t, x, y) = p_X(t, F(x), F(y)) \qquad {}^\forall t > 0 \ {}^\forall x, y \in M$

ここで、$V_\infty := \lim_{n \to \infty} \mathrm{Area}(M, f_n^* \bar{g})$, $a_\infty := \mathrm{Area}(M, f_\infty^* \bar{g})$

とおいた。

(b) $F_i(S^2) = \Sigma_i$,

$F_{i*} \left(\frac{a_i}{V_\infty} \mu_{\varphi_i^* \bar{g}} \right) = \chi_{\Sigma_i} \cdot \eta$,

$\frac{V_\infty}{a_i} p^{\varphi_i^* \bar{g}}(t, x, y) = p_X(t, F_i(x), F_i(y)) \qquad {}^\forall t > 0, {}^\forall x, y \in S^2$

$(i = 1, 2, \cdots, k)$

ここで　$a_i := \mathrm{Area}(S^2, \varphi_i^* \bar{g})$ とおいた。

特に、$(M, g_n = f_n^* \bar{g})$ の(ラプラシアンの)オ l 固有値は、これら $k+1$ 個の branched manifolds の(ラプラシアンの)固有値の直和において小さいものから数えて l 番目のものに収束する。

(ii) $f_\infty =$ constant map のときは、上の (i) で Σ_0, F を除いた

ものが成立つ。

（定理の証明のoutline）

(1)は［K-KⅡ］の議論をbranched manifold上で展開することにより得られる。また、(2), (3)は［Parker］の議論が今の場合でも通用することから直ちにO.K.である。(4)は［K-K-O］の議論がbranchを許すときどうなるかをすべてチェックすることにより得られる。

参考文献

［Jost］ J. Jost, Two-dimensional Geometric Variational problems, John-Wiley & Sons, 1991

［K-KⅡ］加須栄-久村, Spectral convergence of Riemannian manifolds, Ⅱ, Tôhoku Math. J. 48 (1996), 71-120.

［K-K-O］加須栄-久村-小倉, Convergence of heat kernels on a compact manifold, preprint.

［Parker］ T.H. Parker, Bubble tree convergence for harmonic maps, to appear in J.D.G.

［Li & Tian］ P.Li and G.Tian, On the heat kernel of the Bergman metric on algebraic varieties, preprint

Lecture Notes 2, Geometry and Global Analysis,
July 1993, Tôhoku University, 235 - 251.