

Kharchenko's Galois theory and actions of Hopf algebras

Kharchenko のガロア理論とホップ代数の作用

新居浜高専 柳井 忠 (Tadashi Yanai)

Kharchenko のガロア理論をもとに、環に作用するホップ代数のガロア対応の理論を構成したい。

$R$  を環とし、 $G$  を  $\text{Aut}(R)$  の部分群とする。  $U, G'$  をそれぞれ  $R, G$  の空でない部分集合として、次のように写像  $\phi, \psi$  を定める。

$$\phi(U) := \{\sigma \in G \mid \sigma(r) = r, \forall r \in U\}$$

$$\psi(G') := \{r \in U \mid \sigma(r) = r, \forall \sigma \in G'\}$$

この二つの写像が  $R$  と  $\psi(G)$  の間の中間環と  $G$  の部分群との間にいつ1対1の対応を与えるのか? という問題は、体のガロア理論の拡張として長年に渡って多くの数学者によって研究され様々な結果が得られている。その経緯は [MP1, MP2] に見ることができる。

1970年代に Kharchenko はそれまでの理論を発展させ、半素環におけるガロア対応に関する定理を構築し、更に微分作用素のなすリー代数においてもガロア対応に関する成果を得ている ([K])。これらの研究の特徴として、環の Martindale 商環と呼ばれる商環の性質と、自己同型写像つき differential identity (differential identity with automorphisms) の理論が使われていることが挙げられる。

環の自己同型写像や微分作用素はその (対称的) Martindale 商環に拡張できる。このことにより、自己同型写像や微分作用素が外部的であるという概念より強い X-外部的とい

う有効な概念が導入される。また、自己同型写像つき differential identity の理論により、古典的な体のガロア理論におけるデデキンドの独立定理が半素環における微分作用素や自己同型写像の独立性の問題へと一般化される。この理論は Kharchenko のガロア対応の研究に重要な役割を果たすのみならず、環論の他の局面への応用や一般化が試みられている ([C,L,Y1]).

ホップ代数の環への作用をその Martindale 商環へ拡張することは Montgomery 等によって研究が行われている ([M,§6]). また、最近になって Milinski によって自己同型写像つき differential identity の理論の一部がホップ代数の作用を用いて一般化できることが示された ([Mi1]).

Kharchenko のガロア対応の定理は群の場合もリー代数の場合もよく似た証明を使っている。そこで、最近の一連の研究の成果を使って Kharchenko のガロア理論をホップ代数を用いて統一し、更にそれを含んだガロア対応の理論に一般化することはできないか？と考えたところから、この研究は始まっている。

筆者は [Y2,Y3] で素環  $R$  に作用する有限次分裂ホップ代数  $H$  を使ってガロア対応の理論のホップ化を試みている。ホップ代数の作用が  $X$ -外部的という条件を満たせば、 $H$  と  $R$  の Martindale 商環とのスマッシュ積のある右余加群部分代数と  $R$  のある部分環との間の対応が考えられる。 $H$  がある条件を満たせばその対応が 1 対 1 であることが示される。ここではその研究に関わる基礎的な事柄と結果の概要を説明し、これからの課題を述べる。

## 1. KHARCHENKO の結果

$R$  で素環を表し、 $Q$  をその対称的 Martindale 商環、 $K$  を  $Q$  の中心とする (詳しい定

義は  $[K, M]$  等).  $K$  が体になることはよく知られている.

$\sigma$  を  $R$  の自己同型写像とする. ある  $0 \neq q \in Q$  が任意の  $r \in R$  に対して  $q\sigma(r) = rq$  を満たすとき  $\sigma$  は  $X$ -内部的 ( $X$ -inner) であるといい, そうでないとき  $X$ -外部的 ( $X$ -outer) であるという.  $\sigma$  は  $Q$  の自己同型写像に拡張できる.  $\sigma$  が  $X$ -内部的であることは, 拡張された  $\sigma$  が  $Q$  の内部自己同型写像になっていることと同値である.

部分多元環  $U$  が任意の  $U$  の本質的な (essential) イデアル  $A$  と  $r \in R$  に対して  $Ar \subseteq U \Rightarrow r \in U$  を満たす場合, 有理的完備 (rationally complete) であるという.

Kharchenko は次の結果を与えている.

定理 1 [K, 3.10.2].  $G$  が  $R$  の  $X$ -外部的な自己同型写像からなる (すなわち 1 以外の元が全て  $X$ -外部的な) 有限群とすると,  $\phi, \psi$  は  $R$  の有理的完備な  $\psi(G)$  を含む部分環全体の集合と  $G$  の全ての部分群の集合との間に 1 対 1 の対応を与える.

目標はこの定理をホップ代数の作用を使って拡張することである.

## 2. ホップ代数

以降, 断らない限り代数 (多元環) とテンソル積は体  $k$  上で定義されているとする.

$H$  で有限次分裂 (pointed) ホップ代数を表わす.  $H$  は素環  $R$  に (左から) 作用している, すなわち  $R$  が左  $H$ -加群で任意の  $h \in H, a, b \in R$  に対して  $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$  を満たしているとする. このとき,  $H$  の作用は  $Q$  に拡張できる ([M, 6.4.5], このことはもっと弱い条件で成り立つ). 従ってスマッシュ積  $Q \# H$  が作られる. これは  $k$ -空間としては  $Q \otimes H$  と同じで  $a, b \in Q, h, k \in H$  に対して積を  $(a \# h)(b \# k) = \sum a(h_1 \cdot b) \# h_2 k$  で

与えたものである.  $\emptyset \neq V, W \subseteq Q \# H$  に対して

$$V^W := \{v \in V \mid \forall w \in W, vw = wv\}$$

と定義する. 次のことが簡単に分かる.

**命題 2.**  $Q^H = \{q \in Q \mid \forall h \in H, h \cdot q = \varepsilon(h)q\}$

**証明.**  $q \in Q, h \in H$  に対して  $hq = \sum h_1 \cdot q \# h_2$  である.

$q \in$  右辺なら,  $hq = \sum \varepsilon(h_1)q \# h_2 = qh$  だから,  $q \in Q^H$ .  $q \in Q^H$  なら,  $qh = \sum h_1 \cdot q \# h_2$  の両辺に  $id_K \otimes \varepsilon$  を施して,  $h \cdot q = \varepsilon(h)q$  を得る.  $\square$

$(Q \# H)^R = K$  であるとき,  $H$  の作用は  $X$ -外部的であると定義する (Milinski による定義).

たとえば  $H = \mathbf{k}G$  ( $G$  は有限群) のとき,  $\xi = \sum_{\sigma \in G} q_\sigma \# \sigma \in Q \# H$  と  $r \in R$  に対して,  $\xi r = \sum_{\sigma \in G} q_\sigma(\sigma \cdot r) \# \sigma$ ,  $r\xi = \sum_{\sigma \in G} r q_\sigma \# \sigma$  であるから,  $\xi r = r\xi \Leftrightarrow \forall \sigma \in G, q_\sigma(\sigma \cdot r) = r q_\sigma$ . したがって  $(Q \# H)^R = K$  となることは,  $G$  の 1 以外の元がすべて  $X$ -外部的な自己同型写像として作用することと同値になる.

以降,  $H$  の作用は  $X$ -外部的であると仮定して進めていく.

次の定理は Milinski による自己同型写像つき differential identity の理論のホップ版である.

**定理 3 [Mil].**  $I \neq 0$  を  $R$  のイデアルとする. 写像  $Q \otimes_K (Q \# H) \ni b \otimes_K (a \otimes h) \mapsto (r \mapsto a(h \cdot r)b) \in \text{Hom}_K(I, Q)$  は単射になる.

このことの系として次が得られる。これは Kharchenko の結果の一般化である。

系 4 [Mi1, Y2].  $R^H \subseteq U \subseteq R$  となる部分環  $U$  は素環で、更に  $Q^U = K$  となる。

証明.  $0 \neq t$  を  $H$  の左積分とすると、 $t \cdot R \subseteq R^H$  である。

$a, b \in U$  が  $aUb = 0$  を満たせば、 $a(t \cdot R)b = 0$  より、定理 3 から  $b \otimes_K (a\#t) = 0$  で、 $b \otimes_K a = 0$  となり、 $a = 0$  または、 $b = 0$  を得る。

$q \in Q^U$  とすると、 $a \in R$  に対して、 $q(t \cdot a) - (t \cdot a)q = 0$  だから、再び定理 3 から  $q \otimes_K 1 - 1 \otimes_K q = 0$  で、 $q \in K$  が従う。□

さらに上の中間環  $U$  は bimodule property という性質を満たしていることも分かる ([Y2, 4.2])。

$h \in H, \xi \in (Q\#H)^Q$  に対して、 $\sum (Sh_1)\xi h_2 \in (Q\#H)^Q$  であることが簡単に計算できる (このことから宮下-Ulbrich 作用と呼ばれる  $H$  の  $(Q\#H)^Q$  への右からの作用が定義される)。Martindale 商環の性質から  $(Q\#H)^Q = (Q\#H)^R = K$  となるから、 $h \in H, \alpha \in K$  に対して、 $\sum (Sh_1)\alpha h_2 = \sum (Sh_2 \cdot \alpha)(Sh_1)h_3 \in K$  である。この式に  $id_K \otimes \varepsilon$  を施して、 $Sh \cdot \alpha \in K$  を得る。今  $S$  は全単射であるから  $H \cdot K \subseteq K$  となる ([Mi2, 15.3])。以上のことから次が示される。

補題 5.  $K\#H$  は構造射  $id_K \otimes \Delta$  により右  $H$ -余加群代数になる。

### 3. 対応定理

$G$  を  $\text{Aut}(R)$  の部分群とし、 $\sigma \in G, r \in R$  とする。  $H = \mathbf{k}G$  とすると、 $Q\#H$  において、 $\sigma(r) = r \Leftrightarrow r\sigma = \sigma(r)\sigma = r\sigma$  となる。一方、 $\text{Char } \mathbf{k} = p > 0$  のとき  $L$  を  $\text{Der}(R)$  の

$p$ -部分リー代数,  $H = u(L)$  をその  $p$ -包絡代数とする.  $d \in L, r \in R$  とするとき, やはり  $Q \# H$  において,  $d(r) = 0 \Leftrightarrow dr = d(r) + rd = rd$  である.

この事に注目して,  $\emptyset \neq U \subseteq R, \emptyset \neq \Lambda \subseteq Q \# H$  に対して次のように定義する.

$$\Phi(U) := (Q \# H)^U, \quad \Psi(\Lambda) := R^\Lambda$$

これに関して次のことが分かる.

補題 6 [Y2, Y3].

- (1)  $\Phi(R) = K, \Psi(R^H) = K \# H,$
- (2)  $\Psi(K) = R, \Psi(K \# H) = R^H,$
- (3)  $R^H \subseteq U \subseteq R$  に対して  $\Phi(U)$  は右  $H$ -余加群代数,
- (4)  $K \subseteq \Lambda \subseteq K \# H$  に対して  $\Psi(\Lambda)$  は有理的完備な部分多元環.

証明 (概略).

(1)  $\Phi(R) = K$  は  $X$ -外部的の定義.  $\Psi(R^H) = K \# H$  は  $Q^{R^H} = K$  であることを使えば分る.

(2)  $\Psi(K) = R$  は明らか. また  $\Psi(K \# H) = R^{K \# H} \subseteq R^H$  で, 逆は自明.

(3) は  $id_K \otimes \Delta$  が代数射であることから示せる.

(4)  $\Psi(\Lambda)$  のイデアル  $0 \neq A$  と  $r \in R$  が  $Ar \subseteq \Psi(\Lambda)$  を満たすとする.  $a \in A, \xi \in \Lambda$  とすると,  $(ar)\xi = \xi(ar) = a\xi r$  だから,  $A(r\xi - \xi r) = 0$  で,  $AR^H(r\xi - \xi r) = 0$ . 定理 3 を使えば,  $r \in \Psi(\Lambda)$  であることがわかる.  $\square$

このことから,  $\Phi, \Psi$  は二つの集合  $\{R^H \subseteq U \subseteq R \mid U \text{ は有理的完備}\}$  と  $\{K \subseteq \Lambda \subseteq$

$K\#H|\Lambda$  は右  $H$ -余加群代数 } との間に対応を与えていることが分かる.  $H = kG$  のときは, この対応はガロア対応に他ならない.

この対応を使って Kharchenko のガロア理論を含むホップ代数の対応理論を考えたい. つまり, 次の問題を解くことが目標となる.

問題 7.  $R$  の  $R^H$  を含む部分多元環  $U$  と  $K\#H$  の  $K$  を含む右  $H$ -余加群部分代数  $\Lambda$  に対して,

$$\Psi(\Phi(U)) = U, \quad \Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda \quad (*)$$

は成立するか?

この問題は  $H$  が特殊なホップ代数の場合は, 肯定的に解かれている.

定理 8 [K,Y2,Y3]. 次の場合 (\*) は成立する.

- (1)  $H = kG$  ( $G$  は有限群) のとき,
- (2)  $H$  が余可換で  $K = K^H$  のとき,
- (3)  $H = H_4, H_9$  のとき.

ここで,  $H_4, H_9$  は次のように構成されるホップ代数  $H_{n^2}$  の  $n = 2, 3$  の場合である.

$n$  を 2 以上の自然数として,  $k$  が  $\mathbb{Z}$  上の第  $n$  円分多項式の根  $\zeta$  を含んでいるとする.

$$H_{n^2} := k \langle x, y | x^n = 1, y^n = 0, xy + \zeta yx = 0 \rangle, \quad \Delta(x) = x \otimes x, \quad \Delta(y) = 1 \otimes y + y \otimes x,$$

$$\varepsilon(x) = 1, \quad \varepsilon(y) = 0, \quad S(x) = x^{n-1}, \quad S(y) = -yx^{n-1} \text{ とすれば } H_{n^2} \text{ は } k \text{ 上 } n^2 \text{ 次元のホップ}$$

代数になる.

$H$  が余可換であれば  $\Psi(\Phi(U)) = U$  は成立する ([Y3]). 更に  $\Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda$  であることを言うためには, 今のところ  $K = K^H$  が必要になる.

更なる考察のために, 次の予想をあげておく

予想 9.

- (1)  $H$  が余可換なホップ代数のとき,  $\Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda$  は成立する.
- (2)  $H = H_{n^2}$  ( $n \geq 2$ ) のとき, (\*) は成立する.

#### 4. $\Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda$ に関する問題

$K = K^H$  であれば,  $K \# H = K \otimes H$  は  $K$  上のホップ代数になる. さらに  $H$  が余可換であれば,  $K \otimes H$  の右余イデアル部分代数  $\Lambda$  は部分ホップ代数になる. この場合,  $\Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda$  はホップ代数の基本的な性質を使えば証明できる. 概略は次の通りである.

まず  $\Lambda$  は有限次ホップ代数だから 0 でない左積分  $t$  を持つが, 定理 3 を使えばこれは  $\Phi(\Psi(\Lambda))$  の左積分にもなることが分かる. この場合, 有限次ホップ代数  $A$  はその双対  $A^* = \text{Hom}(A, \mathbf{k})$  上 cyclic な加群になるという Larson-Sweedler の結果 ([M, 2.1.3(3)]) を使えば,  $\Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda$  を示すことができる ([Y3]).

同じ方法が  $H$  が余可換でなく  $K \neq K^H$  のときでも使えるだろうか? と考えると, ころから次の問題がでてくる. 右余加群部分代数  $\Lambda$  の元  $\eta$  が任意の  $\xi \in \Lambda$  に対して  $\xi\eta = (id_K \otimes \varepsilon)(\xi)\eta$  を満たすとき,  $\Lambda$  の左積分ということにし, その全体の集合を  $I_\Lambda$  で表わす.



問題 10.  $0 \neq \Lambda' \subseteq \Lambda$  を右余加群部分代数とする.

- (1)  $\Lambda$  は 0 でない左積分を持つか?
- (2)  $\mathcal{I}_{\Lambda'} \cap \mathcal{I}_{\Lambda} \neq 0$  から  $\Lambda' = \Lambda$  が示せるか?

また, これを考える上で次の問題が派生する.

問題 11.

- (1)  $\Lambda$  はフロベニウスか?
- (2)  $\Lambda$  は  $\Lambda'$  上の右加群として, また左加群として自由か?
- (3)  $\Lambda$  の 0 でない左積分  $\eta$  で  $\eta\Lambda \subseteq K\eta$  となるものはあるか?

いずれの問題も  $\Lambda', \Lambda$  が ( $K$  上の) ホップ代数なら成立していることである.

$K\#H$  がフロベニウスで  $\Lambda$  上右加群として, あるいは左加群として自由なら  $\Lambda$  もフロベニウスになり, 0 でない左積分を持つことが示せる. また, 問題 11 の (2),(3) が任意の  $\Lambda, \Lambda'$  で成り立てば問題 10 の (2) は証明できる ([Y3]). したがって, これらを肯定的に示すことができれば  $\Phi(\Psi(\Lambda)) = \Lambda$  の証明につながり, さらにホップ代数に関する基本性質の拡張を得ることにもなる.

これらの解決をこれからの課題としたい.

#### REFERENCES

- [C] C. L. Chuang, *On composition of derivations of prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 647–652.

- [K] V. K. Kharchenko, *Automorphisms and derivations of associative rings*, Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [L] C. Lanski, *Differential identities, Lie ideals and Posner's theorem*, Pacific J. Math. **134** (1988), 275–297.
- [M] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* 82, AMS, Providence, R. I., 1993.
- [MP1] S. Montgomery and D. S. Passman, *Galois theory of prime rings*, J. Pure Appl. Algebra **31** (1984), 139–184.
- [MP2] S. Montgomery and D. S. Passman, *Outer Galois theory of prime rings*, Rocky Mt. J. Math. **14** (1984), 305–318.
- [Mi1] A. Milinski, *Actions of pointed Hopf algebras on prime algebras*, Comm. Algebra **23** (1995), 313–333.
- [Mi2] A. Milinski, *Operationen punktierter Hopfalgebren auf primen Algebren*, thesis, München, 1995.
- [Y1] T. Yanai, *\*-Differential identities of semiprime rings with involution*, J. Algebra **186** (1996), 264–276.
- [Y2] T. Yanai, *Correspondence theory of Kharchenko and  $X$ -outer actions of pointed Hopf algebras*, Comm. Algebra (to appear).
- [Y3] T. Yanai,  *$X$ -outer actions of pointed Hopf algebras and Galois-type correspondence theory*, preprint.