数理解析研究所講究録
997巻 1997年 27-29

有限群の p- ブロックの分裂定理

千葉大学 理　越谷重夫 (Shigeo Koshitani)
ドイツ Jena 大学　Burkhard Külshammer

ここでの話は，いわゆる有限群のモジュラー表現についてです．体上有限群の群代数 (group algebra) は，少なくとも有限次元ホップ代数 (Hopf algebra) の，とても重要な例になっています（と言うより，ホップ代数に関する重要な結果のいくつかは，この群代数の定理を横目でにらみつつ，その一般化として考えられたものだと思います）．

今回の話は，上記の通り B. Külshammer（ドイツ Jena 大学）との共同の仕事です．実際に始めたのは，もう4年以上も前の話で，その結果は，昨年すでに発表されています（[**2**] を参照）．そこで，ここでは，この結果を得るために重要であった道具，並びにこの分野以外の人への解説を主に書いてみたいと思います．

記号と定義　$k :=$ 標数 $p > 0$ をもつ代数的閉体

$G, G_1, G_2, \ldots :=$ 有限群

$H := G$ の正規部分群　（つまり，$H \triangleleft G$）

$kG, kG_1, kG_2, \ldots :=$ 群代数 (group algebras)

$A := kG$ のブロック (block)

（つまり，kG を $kG = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus \cdots \bigoplus A_n$ のように直既約両側イデアル分解させた時の，各 A_i を kG のブロックという）

$B := kH$ のブロック

$1_A, 1_B := A, B$ の（環としての）単位元（これらは，普通 A, B の block idempotents と呼ばれる）

$\otimes := \otimes_k$（つまり，何も書いていない tensor product は k 上でのもの）

kG- 加群 $:=$ 有限生成左 kG- 加群

$P :=$ ブロック A の不足群 (defect group)

（直既約 kG- 加群 M が $1_A \cdot M \neq 0$ を満たす時，M はブロック A に属する，と言う事にする．また，G の部分群 L と kG- 加群 X に対して，X 自身が $kG \otimes_{kL} X$ の直和因子 (kG- 加群として，ただし，$kG \otimes_{kL} X$ の kG- 加群としての作用は，$g \cdot (a \otimes x) := ga \otimes x$, $\forall g \in G, \forall a \in kG, \forall x \in X$ として定める．もちろん，ここでの tensor product は，kL 上で取っている）になっている時，X は L-projective (relatively L-projective) である，という．この意味で，A の defect group P とは，A に属するすべての kG- 加群が L-projective であるような L のうちで極小なもの（位数が最小であるもの）のことである．一般に，D は G の p- 部分群になることがわかっていて，その上，A に対して，D は (G- 共役を除いて) 一意的に決まることもわかっています．というわけで，すぐに想像がつくように，defect group というものは，Sylow p- 部分群の一般化になっています．）

さて，今回の話の出発点は，よく知られている，次のとても簡単な話です．

命題　G が 2 つの有限群 G_1, G_2 の直積 $G = G_1 \times G_2$ で書けていれば，k- 代数同型 $kG \cong kG_1 \otimes kG_2$　が得られる．

さて，次に以下のような設定を考えます．これからずっと，kH のブロック B は，kG のブロック A によって被覆されている (covered)，と仮定しておきます ($\Longleftrightarrow$ $1_A \cdot 1_B \neq 0$ in kG)．また，B は G- 安定（不変）(G-stable $\Longleftrightarrow$ $g \cdot 1_B \cdot g^{-1} = 1_B$，$\forall g \in G$) であることも仮定します．この仮定は，有名な Fong-Reynolds の定理より，全然本質的なことではありません（森田同値を除いて）（[**3**, V 定理 5.10] を参照）．この様な状況の下で，次の問題を考えるのです．

問題　2 つのブロック A と B は，どのくらい似ているのだろうか？　あるいは違っているのだろうか？

さて，それでは，とにもかくにも我々の主定理を述べます．

定理 (Koshitani-Külshammer)　k, G, H, A, B は上記と同じものとする．つまり，$H \triangleleft G$ であって，kH のブロック B は，kG のブロック A によって被覆されていて (covered)，かつ，G-stable (G- 安定，不変) であるとする．また，P を，A の不足群 (defect group) とします．ここで，G/H は p- 群であると仮定します．その上，P はアーベル群（可換群）であることも仮定します．この時，$Q := P \cap H$ と置くと，これは B の defect group になりますが，我々はさらに，Q は P の中で分裂している，つまり，$P = Q \times R$, $\exists R \leqslant P$ と書けることも仮定します（したがって，$G/H \cong R$）．すると，次の同型

$$A \cong B \otimes kR \quad (k\text{- 代数同型})$$

が得られる．

これの系として，すぐに次のことがわかります．

系　$H \triangleleft G$, G/H は p- 群，そして，P を G の Sylow p- 部分群で，P は基本アーベル p- 群であるとする ($\therefore G/H$ も基本アーベル p- 群）．また，A, B を，それぞれ，kG, kH の principal blocks（主ブロック，つまり，自明な kG-, kH- 加群を含むブロック）とします．以上の仮定の下で，次の事が成立する．

$$A \cong B \otimes k[G/H] \quad (k\text{- 代数同型})$$

注意　この定理の言っている事は，不足群 (defect group) の 分裂 が，ブロックの 分裂 を導く（誘導する）ということです．そして，ポイントは，一番初めの例のように，全体

の群 G 自身は分裂していなくても，不足群 (defect group) さえ分裂していればブロックの分裂を導く，ということです．

この定理の証明で，とっても重要で本質的な役割を果しているのは，E.C.Dade による，いわゆる，ブロックに関する Clifford 理論（有限群 G とその正規部分群 H の間での，それぞれの表現，ブロックについての理論，[1] 参照）と，渡辺アツミさん（熊本大学）による，可換不足群 (abelian defect group) を持つブロックの重要な結果（[4] 参照），の２つです．

Dade のこの話題についての論文は長くて，多くの人に理解されるのが必ずしも容易では無いと思いますが，とにかく，私の感じている標語（定理？）を１つ述べさせてもらいます．それは，

標語，教訓　群とその正規部分群の間の，それぞれの表現についての話（もちろん，ブロックのことも入ります）を考える時は，是非 E.C. Dade のブロックの Clifford 理論の論文を見てみよ！必ず，自明ではない何かが得られる．特に，[**1**, Corollary 12.6] は重要）．

謝辞　今回のこの研究集会は，いろいろな分野の話が聞けて，大変楽しく，また勉強になりました．いろいろお世話して頂いた土井幸雄さん（福井大），ならびに竹内光弘さん（筑波大）に，とても感謝しております．

参考文献

[1] E.C. Dade, Block extensions, Illinois J. Math. **17** (1973),198–272.

[2] S. Koshitani and B. Külshammer, A splitting theorem for blocks, Osaka J. Math. **33** (1996), 343–346.

[3] 永尾汎 - 津島行男, 有限群の表現，裳華房，1987.

[4] A. Watanabe, Note on a p-block of a finite group with abelian defect group, Osaka J. Math. **26** (1989), 829–836.

E-mail address: `koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp`