数理解析研究所講究録
997巻 1997年 30-43

非可換ネーター環論が量子群に期待すること
一 例を中心として 一

信州大学教育学部　岩永恭雄 (Yasuo Iwanaga)

Lie 環の quantized enveloping algebra や代数群の quantum coordinate ring に現れる非可換 Noether 環の興味ある例について紹介したい.

必要に応じて非可換 Noether 環の例を構成することは, Artin 環の場合に比べると非常な困難を伴う. 非可換 Noether 環の理論は, 可換 Noether 環論の非可換版を考察することから始まり, 興味ある例の発見に支えられて発展してきた経緯がある. 現在, 筆者が取り組んでいる研究対称は, 非可換 Gorenstein 環として, Auslander が定義した “Auslander-Gorenstein 環” なので, この環が quantized enveloping algebra や quantum coordinate ring の例として現れる場合を取り上げることにする.

I. 非可換 Noether 環に関する最初の優れた結果は次の定理であろう.

Goldie's Theorem: prime (resp. semiprime) Noether ring は simple (resp. semisimple) Artin ring の order である.

ここで order とは, 古典的な意味の order (整環) ではなく商環を持つということである. この定理によって, 商環を用いる議論が展開可能になり, 非可換な Dedekind domain や hereditary Noetherian prime ring の理論が完成した. その際, cyclic module の準同型環の性質を調べる必要が生じ, idealizer の概念が登場して興味ある例が生産された.

Idealizer: 環 R の左イデアル L に対して,

$$\mathbf{I}_R(L) = \{r \in R |\ Lr \subseteq L\}$$

を L の **idealizer** と呼ぶ. これは L を両側イデアルにする R の最大の部分環であり, cyclic left R-module R/L の準同型環は

$$\mathrm{End}_R(R/L) \cong \mathbf{I}_R(L)/L$$

となる.

II. Quantum Coordinate Ring の Noether 性

以下に，quantum coordinate ring と quantized enveloping algebra で Noether 環であることが確認されているものを掲げておこう．体上の（非可換）affine algebra の Noether 性を証明する方法は，Hilbert Basis Theorem の非可換版を適用出来るための都合の良い基底を見つけることと，考えている環が Noether 環から Ore 拡大を繰り返して得られことを示すことである．ここで，環 R 上の **Ore 拡大** とは，R の環自己同型 σ と σ-微分 δ

$$\delta(ab) = \delta(a)b^{\sigma} + a\delta(b) \quad (a,\ b \in R)$$

を用いて，不定元 x と $a \in R$ に対して，$ax = xa^{\sigma} + \delta(a)$ と定めて得られる非可換多項式環 $R[x;\ \sigma,\ \delta]$ である．R が Noether 整域ならば，R の Ore 拡大も Noether 整域になる．更に，R が Ore 整域，即ち，Rのある乗法的集合に関する商環（あるいは，局所化）が存在するとき，R の Ore 拡大も Ore 整域である．

(1) coordinate ring of a quantum affine space $\mathcal{O}_q(K^n)$

この環の定義は，Manin によって次のように与えられた．体 K 上の affine K-algebra $K < x_1,\ \cdots,\ x_n >$ に関係式

$$x_j x_i = q^{-2} x_i x_j \quad (i < j)$$

を入れて出来る K-algebra を **coordinate ring of a quatum affine space** と呼び，$\mathcal{O}_q(K^n)$ で表される．$\mathcal{O}_q(K^n)$ は基底

$$\{{x_1}^{i_1} \cdots {x_n}^{i_n} \mid i_1, \cdots, i_n \geq 0\}$$

を持つので，Noether 整域である．

(2) coordinate ring of quantum matrices $\mathcal{O}_q(M_n(K))$

この環の定義は，Artin-Schelter-Tate [2] によるもので，その Noether 性も彼らによって示された．K を体，$0 \neq q \in K$，$n \geq 1$ とする．$\{x_{ij} | \ i,\ j = 1, \cdots, n\}$ で生成された affine K-algebra に次の関係式：

$$
\begin{array}{rlr}
x_{ik}x_{jk} &= q^2 x_{jk}x_{ij} & i < j \text{ のとき；} \\
x_{ij}x_{ik} &= q^2 x_{ik}x_{ij} & j < k \text{ のとき；} \\
x_{ij}x_{kl} &= x_{kl}x_{ij} & i < k \text{ かつ } l < j \text{ のとき；} \\
x_{ij}x_{kl} - x_{kl}x_{ij} &= (q^2 - q^{-2})x_{il}x_{kj} & i < k \text{ かつ } j < l \text{ のとき}
\end{array}
$$

を入れた K-algebra を **(one-parameter) coordinate ring of quantum** $n \times n$ **matrices** と呼び， $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ で表す． $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ は K から Ore 拡大を繰り返し構成することによって得られるので Noether 整域である．

$\mathrm{GL}_n(K)$ の quantum coordinate ring $\mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(K))$ は， $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ の中心に属する元， "quantum determinant"

$$\Delta_q = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} (-q^{-2})^{l(\sigma)} x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

($l(\sigma)$ は，σを $(i\ i+1)$ という形の互換の積に表わすときの最小個数)

が可逆元になるように，

$$\mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathcal{O}_q(M_n(K))[{\Delta_q}^{-1}]$$

と構成される． $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ が Noether 整域なので， $\mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(K))$ も Noether 整域である．

$\mathrm{SL}_n(K)$ の quantum coordinate ring $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K))$ は， $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ の剰余環として，次で与えられる (Manin)：

$$\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathcal{O}_q(M_n(K)) / < \Delta_q - 1 >$$

この環の Noether 性は，次の結果から導かれる．

Proposition (Levasseur and Stafford [17])

$$\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K)) \otimes_K K[z,\ z^{-1}] \cong \mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(K))$$

(quantum analogue of $\mathrm{SL}_n(K) \times K^{\times} \cong \mathrm{GL}_n(K)$)

ここで，z は中心に属する不定元である．

$\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K))$ は，その商体 (division ring) の中で maximal order である．また，

$$\text{gl.dim } \mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K)) = \text{GK-dim } \mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K)) = n^2 - 1$$

が成り立つ．ここで，GK-dim は Gelfand-Kirillov dimension を表す．

(3) **multiparameter coordinate ring** $\mathcal{O}_\lambda(K^n)$, [11].
$\lambda = [\lambda_{ij}] \in M_n(K)$ を体 K 上の非零元からなる n 次正方行列とし,

$$\lambda_{ii} = 1, \quad \lambda_{ji} = {\lambda_{ij}}^{-1} \quad (1 \leq i,\ j \leq n)$$

を満たすとする. K-algebra $K < x_1, \cdots, x_n >$ に関係式

$$x_i x_j = \lambda_{ij} x_j x_i \quad (1 \leq i,\ j \leq n)$$

を入れて出来る K-algebra を **multiparameter coordinate ring** と呼び, $\mathcal{O}_\lambda(K^n)$ で表す. $\mathcal{O}_\lambda(K^n)$ は体 Kから Ore 拡大を繰り返し構成することで得られるので, $\mathcal{O}_\lambda(K^n)$ は Noether 整域であって, x_i で生成された乗法的集合に関する局所化が存在する. それは K-algebra

$$K < x_1,\ {x_1}^{-1}, \cdots, x_n,\ {x_n}^{-1} >$$

に上の関係式を入れたものである.

(4) **PBW-basis** (Yamane [32])
$q^8 \neq 1$ のとき, quantized enveloping algebra $U_q(sl(n+1))$ は Poincaré-Birkoff-Witt basis に似た基底を持つ. $U_q(sl(n+1))$ は $\mathbb{C}$-algebra

$$\mathbb{C} < E_i, K_i, {K_i}^{-1}, F_i \mid 1 \leq i \leq n >$$

にある関係式を入れてできるものであるが, 次のような元

$$\begin{aligned} e_{i,i+1} &= E_i, \quad f_{i,i+1} = F_i, \\ e_{ij} &= q e_{i,j-1} e_{j-1,j} - q^{-1} e_{j-1,j} e_{i,j-1} \quad (j > i+1), \\ f_{ij} &= q f_{i,j-1} f_{j-1,j} - q^{-1} f_{j-1,j} f_{i,j-1} \quad (j > i+1) \end{aligned}$$

を考え, 添字に大小関係を

$$(i,j) < (k,l) \iff i < k,\ \text{または}\ i = k,\ j < l$$

と定める. このとき,

$$f_{k_1,l_1} \cdots f_{k_s,l_s} {K_1}^{m_1} \cdots {K_n}^{m_r} e_{i_1,j_1} \cdots e_{i_t,j_t},$$
$$(k_1,l_1) \leq \cdots \leq (k_s,l_s),\ (i_1,j_1) \leq \cdots \leq (i_t,j_t),\ (m_1,\cdots,m_r) \in \mathbb{Z}^r$$

が $U_q(sl(n+1))$ の基底になる. この基底を用いると, $U_q(sl(n+1))$ にはうまい filtration が入り, それに関する graded algebra が, $\mathbb{C} < y_1, \cdots, y_r >$に関係式

$$y_i y_j = \lambda_{ij} y_j y_i \quad (i \leq j, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{C})$$

を入れてできる環の局所化と同型になるようにできる．この $\mathbb{C}$-algebra はNoether 整域なので，$U_q(sl(n+1))$ も Noether 整域である．一般の Lie 環 $\mathfrak{g}$ について，$U_q(\mathfrak{g})$ が Noether 整域であるかどうかはわかっていない．但し，一般の $U_q(\mathfrak{g})$ は Luszting [18] によるものを考える．([12]，[16]，[34] を参照)

III. Auslander-Gorenstein 環と Cohen-Macaulay 性

Weyl algebra は非可換 Noether 環の代表的例であり，種々の側面を持ち，非可換 Noether 環の考察に多くのアイデアを提供してくれた．Weyl algebra は Gronthendieck が定義した代数多様体（この場合，$\mathbb{C}^n$）の微分作用素環として現れるが，Auslander-Gorenstein 環という Weyl algebra を含む重要なクラスが微分作用素環として登場する．また，Weyl algebra は $\mathbb{C}^{2n}$上の standard Poisson bracket から生じる座標環 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{2n})$ の量子化にもなっている．

R を self-injective dimension が両側で有限（それを n として，$\mathrm{id}(R)=n$ と記す）の Noether 環，$0 \to {}_RR \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$ を ${}_RR$ の極小移入分解とする．各 i $(0 \le i < n)$ について，E_i の flat dimension が i 以下のとき，R は **Auslander-Gorenstein 環** と呼ばれる．特に，gl.dim $R < \infty$ のときは，gl.dim $R = \mathrm{id}(R)$ であるが，R は **Auslander-regular 環**と呼ばれる．

体 K 上の positively graded algebra $A = K \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ は K-algebra として A_1 で生成され，各 A_k $(k \ge 1)$ は K 上有限次元であるとする．任意の有限生成な graded A-module M が次の条件

$$\text{GK-dim}(M) + \min\{j \mid \mathrm{Ext}^j_A(M, A) \neq 0\} = \text{GK-dim}(A)$$

を満たすとき，A は **Cohen-Macaulay 性** を持つと言う．

期待： G を $\mathbb{C}$ 上の 連結かつ単連結な，半単純代数群とするとき，quantum coordinate ring $\mathcal{O}_q(G)$ は Auslander-regualr であり，Cohen-Macaulay 性を満たすか？

例． 次の quantum coordinate ring は Auslander-regular であり，Cohen-Macaulay 性を満たす．

(1) coordinate ring of a quatum affine space $\mathcal{O}_q(K^n)$,
(Goodearl and Lenagan [8])

(2) coordinate ring of quantum matrices $\mathcal{O}_q(M_n(K))$,
(Goodearl and Lenagan [8])

(3) $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K))$, $\mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(K))$.
(Levasseur and Stafford [17])

(3) の証明には，次の事実を使う．

Proposition (Levasseur and Stafford [17]) R を Auslander-regular 環，かつ Cohen-Macaulay 性を満たすとする．$T = R[x;\ \sigma,\ \delta]$ を Ore 拡大とすると，

(1) T は Auslander-regular である；

(2) $R = K \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$ が R_1 で生成された graded K-algebra で，$\sigma(R_i) \subseteq R_i$ ($\forall\, i \geq 0$) ならば，T は Cohen-Macaulay 性を満たす；

(3) $z \in R$ が中心に属する元なら，R/zR は Auslander-Gorenstein 環で，Cohen-Macaulay 性を満たす．

例 (Malliavin [20])．q を 1 の巾根でないとする．標数 0 の代数的閉体上で，$U_q{}^+(\mathfrak{sl}(3))$ を $U_q(\mathfrak{sl}(3))$ の 3 角分解における $+$-part とすると，$U_q{}^+(\mathfrak{sl}(3))$ は Auslander-regular 環，かつ Cohen-Macaulay 性を満たす．

次に，Auslander-Gorenstein 環と密接な関係があると思われる，"regular algebra" と "Sklyanin algebra" について触れておきたい．

Regular Algebra (Artin and Schelter [1])

代数的閉体 K 上の positively graded algebra $A = K \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ は K-algebra として A_1 で生成され，各 A_k ($k \geq 1$) は K 上有限次元であるとする．A は次の条件を満たすとき，n 次元の **regular algebra** と呼ばれる：

(i) A は polynomial growth を持つ．即ち，ある実数 ρ で，$\dim_K A_k \leq k^\rho$ ($\forall\, k \geq 1$) となるものが存在する；

(ii) $\mathrm{gl.dim}\, A = n < \infty$；

(iii) $\mathrm{Ext}^i_A(K,\ A) = 0 \quad (i \neq n)$，かつ $\mathrm{Ext}^n_A(K,\ A) \cong K$ が ${}_AK$ 及び K_A について成り立つ．

このとき，$\mathrm{gl.dim}\, A = \mathrm{pd}({}_AK)$ である．

例．finite global dimension の次数付き整環，Lie 環の enveloping algebra, Weyl algebra 等は regular algebra である．

regular algebra に関して，次の問題が [1] で提出されている．

問題 (Artin and Schelter)：

(1) regular algebra は Noether 整域か ？

(2) $\mathrm{gl.dim}\, A = \mathrm{GK\text{-}dim}(A)$ ？

(3) regular algebra は Auslander-regular か？

3 次元の regular algebra については肯定的であることが Artin-Tate-Van den Bergh [4] で証明されている．

Artin らは 3 次元の regular algebra の分類に，楕円曲線の geometric data を用いて成功したことから，Manin によって「非可換代数幾何」という言葉も提唱された．

regular algebra は量子群ではないが，$\mathcal{O}_q(M_n(K))$ は regular algebra (Artin-Schelter-Tate) で，親戚と言ってもよい．

期待： 上記の問題解決に量子群は役立つか？

Sklyanin Algebra (Sklyanin, Odesskii-Feigin, Tate-Van den Bergh)

Yang-Baxter 方程式の解を代数的に考察する目的で，Sklyanin によって導入された **Sklyanin algebra** も新しい非可換 Noether 環のクラスを与えてくれた．その代数的構造は楕円曲線の幾何学的性質と密接に関連している．Sklyanin algebra は，その Koszul dual が Frobenius 多元環になるという点からも大いに注目される．このような非可換 Noether 環と可換体上の有限次元多元環が Koszul dual を通して対応することが発見されたことは多元環の表現論に新しい研究方法を提供してくれる．実は，Frobenius 多元環と Koszul dual によって対応する非可換 Noether 環に Auslander-Gorenstein 環が登場するのである．(若松，岩永 による解説 [35, 36] を参照)

K を代数的閉体，$n \geq 3$，E を K 上の楕円曲線，$\sigma : E \to E$ をある固定点 $\zeta \in \mathrm{Pic}(E) \cong E$ による translation automorphism とし，次のデータを導入しておく：

$\mathcal{L}$ を E 上の次数 n の line bundle；

$V = \mathrm{H}^0(E,\ \mathcal{L})$，$n$ 次元 K-ベクトル空間；

$\Delta_\sigma = \{(p,\ \sigma^{n-2}(p)) |\ p \in E\}$，$E \times E$ 上の divisor；

M を involution $(p,\ q) \mapsto (\sigma^2(q),\ \sigma^2(p))$ の固定点；

$E \times E$ 上の divisor D が <u>allowable</u> とは，D が involution のもとで stable かつ M の D における重複度が偶数になることで，

$R = \{f \in V \otimes V |\ \ \mathrm{div}(f) = \Delta_\sigma + D \text{ with } D \text{ allowable}\}$ とおく．このとき，$T(V)$ を tensor algebra として，

$$A = A_n(E,\ \sigma)\ =\ T(V)/(R)$$

を n 次元 **Sklyanin algebra** と呼ぶ．

Sklyanin algebra は global dimension n の Auslander-regular 環, かつ Koszul algebra である. 更に, augmentation $A \to K$ により, K を A-加群とみると, A の Koszul dual

$$\mathrm{Ext}_A^*(K,\ K) \ = \ \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Ext}_A^i(K,\ K)$$

は Frobenius 多元環である.

$n = 3,\ 4$ のときは, Sklyanin algebra は regular algebra で, 関係式 R が具体的な形に書け, 楕円曲線 E はそれぞれ射影空間内の smooth な 3 次, 4 次曲線になる.

4 次元の Sklyanin algebra は, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in K$ が

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

を満たすとするとき, $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ を次数 1 の生成元とし, 次の関係式：

$$\begin{aligned}
x_0x_1 - x_1x_0 &= \alpha_1(x_2x_3 + x_3x_2), & x_0x_1 + x_1x_0 &= x_2x_3 - x_3x_2,\\
x_0x_2 - x_2x_0 &= \alpha_2(x_3x_1 + x_1x_3), & x_0x_2 + x_2x_0 &= x_3x_1 - x_1x_3,\\
x_0x_3 - x_3x_0 &= \alpha_3(x_1x_2 + x_2x_1), & x_0x_3 + x_3x_0 &= x_1x_2 - x_2x_1.
\end{aligned}$$

を持つ graded K-algebra $S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ として与えられる.

$K = \mathbb{C}$, $\alpha_2 \neq 0$ のとき,

$$c_+ = x_0 + \sqrt{\alpha_2}, \quad c_- = x_0 - \sqrt{\alpha_2}$$

は $S(0,\ \alpha_2,\ -\alpha_2)$ の中心元で, 次が成り立つ ([Smith-Stafford [28])：

$$U_q(sl\,(2)) \ \cong \ S(0,\ \alpha_2,\ -\alpha_2)/(c_+c_- - 1)$$

Quantum Polynomial Ring

以上の興味ある 2 つの環, regular algebra と Sklyanin algebra が持つ共通の性質を取り上げて, これらを含む新しい非可換 Noether 環のクラスを定義しよう. positively graded K-algebra A は次の条件をみたすとき, n 次元の **quantum polynomial ring** と呼ばれる：

(i) A は global dimension n の Noether 環；

(ii) Hilbert series がある n について，$H_A(t) = (1-t)^{-n}$ となる；

(iii) A は Auslander-Gorenstein 環；

(iv) A は Cohen-Macaulay 性を満たす.

quantum polynomial ring は Ore 整域で，その商体 (division ring) の中で maximal order である．また， Koszul algebra であり，Koszul dual

$$\mathrm{Ext}_A^*(K,\ K) \ = \ \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{Ext}_A^i(K,\ K)$$

は Frobenius 多元環である.

quantum polynomial ring の例：

(1) Sklyanin algebra $A_n(E,\ \sigma)$, Tate-Van den Berg [30]；

(2) 3，4 次元の regular algebra；

(3) coordinate ring of a quantum affine space $\mathcal{O}_q(K^n)$；

(4) coordinate ring of quantum matrices $\mathcal{O}_q(M_n(K))$；

(5) coordinate ring $\mathcal{O}_q(\ \mathrm{GL}_n(K))$；

(6) homogenized enveloping algebra：$\mathfrak{g}$ を体 K 上の有限次元 Lie 環，$U(\mathfrak{g})$ をその enveloping algebra とする．z を不定元，R を次の集合で張られるベクトル空間：

$$\{z\otimes x - x\otimes z|\ x\in\mathfrak{g}\}\cup\{x\otimes y - y\otimes x - [x,\ y]\otimes z|\ x,\ y\in\mathfrak{g}\}$$

とするとき，

$$A(\mathfrak{g}) \ = \ T(\mathfrak{g}\oplus Kz)/(R)$$

を $\mathfrak{g}$ の **homogenized enveloping algebra** と呼ぶ.

IV. Prime and Primitive Ideal Spectrum

prime ideal の考察は Krull 次元，及び局所化の存在や構成に関して重要である．環 R の prime ideal P に対して，

$$\mathcal{C}_R(P) \ = \ \{c \in R \mid \ \ c + P \text{ is an regular element in } R/P\}$$

と定め，prime ideals の集合 X に対しては，

$$\mathcal{C}_R(X) \ = \ \bigcap\{\mathcal{C}_R(P) \mid \ \ P \in X\}$$

と定める．これが Ore 集合 (localizable set) であるかどうかが，環 R の局所化の存在性に影響してくる．$\mathcal{C}_R(X)$ が Ore 集合である条件は Jategaonkar [13] に述べられている．

また，既約表現を与える加群は単純加群であり，環 R 上の単純左加群 $_RS$ の annihilator ideal

$$\mathrm{Ann}_R(S) \ = \ \{r \in R \mid rS = 0\}$$

は **primitive ideal** と呼ばれる．S は環 $R/\mathrm{Ann}_R(S)$ 上の忠実加群 (faithful module) で，この剰余環は **primitive ring** と呼ばれる．

Prime Factor Rings

一般に，(非可換) 環 Rの prime ideal P による剰余環 R/P は整域になるとは限らず，prime ring である (prime factor ring)．しかし，quantum coordinate ring やある種の Lie 環の enveloping algebra の prime factor ring が整域になっていることは注目に値する．ここで，非可換環に慣れていない人のために注意しておきたいことは，prime ring と整域 (domain) の違いである．prime ring とは，零でないイデアルの annihilator が零しかないことで，整域とは，零でない元の annihilator が零しかないということである．可換環の場合は同じ概念であるが，非可換環の場合は異なっている．例えば，体上の全行列環は prime ring であるが，整域ではない．それでは，幾つかの結果を掲げておこう．

(1) Goodearl and Letzter [9]： q が 1 の巾根でなければ，$\mathcal{O}_q(M_n(K))$ の任意の prime factor ring は整域である．更に，$\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K))$ は $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ の剰余環であり，

$$\mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(K)) \ \cong \ \mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(K)) \otimes_K K[z,\ z^{-1}]$$

は $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ の局所化なので，これらの環の prime factor ring も整域である．

(2) Oh [22]：$\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^n)$ の prime factor ring は全て整域である.

(3) Dixmier ：有限次元複素可解 Lie 環の enveloping algebra の prime factor ring は全て整域である.

(4) Ringel [25]：v を不定元, $\mathbb{Q}(v)$ を関数体とする. Δを有限次元複素半単純 Lie 環の Cartan matrix, $U = U_q(\Delta)$ を $\mathbb{Q}(v)$ 上の量子群 (in the sense of Drinfeld and Jimbo, and modified by Lusztig) とすると, U は3角分解 $U = U^- \otimes U^0 \otimes U^+$ を持つ. このとき, Uの (+)-part U^+ は $\mathbb{Q}(v)$ から Ore 拡大を繰り返して得られ, その prime factor ring は全て整域である.

Queston： prime factor ring が整域にならない場合があるか?

Catenarity：

環 R の任意の2つの prime ideals $P \subseteq Q$ について, P と Q の間の prime ideals のどんな saturated chain も同じ長さになるとき, R は **catenary** と言われる. ここで, prime ideals の列 $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_n$ が saturated chain とは, 各 i について, $P_i \subseteq P \subseteq P_{i+1}$となる prime ideal Pは P_iか P_{i+1}になる場合を言う.

R が catenary なら, 任意の2つの prime ideals $P \subseteq Q$ に対して, 次の "height formula" が成り立つ [31]：

$$\mathrm{ht}(Q/P) \ + \ \text{GK-dim}(R/Q) \ = \ \text{GK-dim}(R/P)$$

Gabber：有限次元可解 Lie 環 の enveloping algebra は catenary である.

この量子化として, 次のような catenary になる場合がある.

Goodearl and Lenagan [8]：

(1) coordinate ring $\mathcal{O}_\lambda(K^n)$ of quantum affine n-space,

(2) coordinate ring $\mathcal{O}_q(M_n(K))$ of quantumn matrices,

(3) $q \in \mathbb{C}^\times$ が1の巾根でないとき, $\mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$, $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$,
($\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ は $\mathcal{O}_q(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の height one prime ideal による剰余環である.)

Caldero [6], Malliavin [19]：

(4) quantized enveloping algebra $U_q(\mathfrak{n}^+)$.
(ここで, $\mathfrak{n}^+$ は有限次元複素半単純 Lie 環の極大巾零部分環である.)

Quantized Function Algebra

q を不定元，$\mathfrak{g}$ を有限次元複素半単純 Lie 環とするとき，体 $\mathbb{C}$ 上の quantized enveloping algebra $U_q(\mathfrak{g})$ の生成元と関係式は Joseph によって与えられた．Hopf algebra $U_q(\mathfrak{g})$ の Hopf dual

$$U_q(\mathfrak{g})^* = \{f \in \mathrm{Hom}_K(U_q(\mathfrak{g}),\ K) |\ f = 0 \text{ on some ideal of finite codimension}\}$$

には $U_q(\mathfrak{g})$ 上の comultiplication によって algebra の構造が入り，$U_q(\mathfrak{g})^*$ は elementary abelian 2-group 上の skew group algebra になる．その座標環は $U_q(\mathfrak{g})^*$ の sub-Hopf algebra であり，$\mathfrak{g}$ を Lie 環として持つ半単純代数群 G の **quantized function algebra** と呼ばれ，$R_q[G]$ で表される．$R_q[G]$ は Noether 整域で，$R_q[G]$ の prime ideal 及び primitive ideal は Joseph [14] によって分類された．特に，prime factor ring は全て整域である．

最後に，prime ideal と primitive ideal の例を掲げておこう．

例 (**Quantum Plane**) : $q \in \mathbb{C}^\times$ とする． $\mathbb{C}$-algebra

$$\mathbb{C}_q[x,\ y] \ = \ \mathbb{C} < x,\ y > /(yx - q^{-2}xy)$$

を単に **quantum plane** と呼ぶ (Manin). これは Gelfand-Kirillov dimension 2，global dimension 2 の Noether 整域で，

$$\{X^iY^j |\ i,\ j \geq 0\}$$

を $\mathbb{C}$-基底に持つ．$\mathbb{C}_q[x,\ y]$ と $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}[x,\ y]$ の環構造は q が 1 の巾根でないときは類似しているが，1 の巾根のときは大きく異なる．

q が 1 の巾根でないときは，$\mathbb{C}_q[x,\ y]$ の prime ideal は

$$(0),\ (x),\ (y),\ (x - \alpha,\ y),\ (x,\ y - \beta), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}^\times$$

が全てなので，有限次元の単純加群は全て 1 次元である．また，無限次元の単純加群も存在し，(0) は primitive ideal，即ち， $\mathbb{C}_q[x,\ y]$ は primitive ring である．更に，(x), (y) 以外の全ての prime ideal は primitive ideal である．finite codimension の primitive ideal は $\mathbb{C}^2$ の x 軸及び y軸上の点と 1 対 1 に対応している．

References

1. M. Artin and W. Schelter: Graded algebras of global dimension 3, Adv. in Math. 66 (1991), 171-216.

2. M. Artin, W. Schelter and J. Tate: Quantum deformations of GL_n, Comm. Pure and Appl. Math. 64 (1991), 879-895.

3. M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh: Some algebras related to automorphisms of elliptic curves, Grothendieck Festschrift Vol. 1, Birkhäuser, Berlin, 1990, 33-85.

4. M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh: Modules over regular algebras of dimension 3, Invent. math. 106 (1991), 335-388.

5. K.A. Brown and K.R. Goodearl: Prime spectra of quantum semi- simple groups, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2465-2502.

6. P. Caldero: Étude des q-commutations dans l'algèbre $U_q(\mathfrak{n}^+)$, J. Alg. 178 (1995), 444-457.

7. K.R. Goodearl: Classical localizability in solvable enveloping algebras and Poincaré-Birkhoff-Witt extensions, J. Alg. 132 (1990), 243-262.

8. K.R. Goodearl and T.H. Lenagan: Catenary in quantum algebras, J. Pure and Appl. Alg. 111 (1996), 123-142.

9. K.R. Goodearl and E.S. Letzter: Prime factor algebras of the coordinate ring of quantum matrices, Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 1017-1025.

10. T.J. Hodges and T. Levasseur: Primitive ideals of $\mathbb{C}_q[SL(n)]$, J. Alg. 168 (1994), 455-468.

11. T.J. Hodges, T. Levasseur and M. Toro: Algebraic structure of multi-parameter quantum groups, Adv. in Math.

12. J.C. Jantzen: *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Math. 6, Amer. Math. Soc., Providence, 1996.

13. A.V. Jategaonkar: *Localization in Noncommutative Noetherian Rings*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 98, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

14. A. Joseph: On the prime and primitive spectra of the algebra of functions on a quantum group, J. Alg. 169 (1994), 441-511.

15. A. Joseph: *Quantum Groups and Their Primitive Ideals*, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgeb. (3) 29, Springer, Berlin, 1995.

16. C. Kassel: *Quantum Groups*, GTM 155, Springer, 1995.

17. T. Levasseur and J.T. Stafford: The quantum coordinate ring of the special linear group, J. Pure and Appl. Alg. 86 (1993), 181-186.

18. G. Lustig: Modular representations and quantum groups, Contemp. Math. 82 (1989), 58-77.

19. M.P. Malliavin: La caténarité de la partie positive de l'algèbre enveloppante quantifiee de l'algèbre de Lie simple de type B_2,
Preprint.

20. M.P. Malliavin: Algèbre d'Heisenberg quantique, Preprint.

21. J.C. McConnell and J.C. Robson: *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1987.

22. S.-Q. Oh: Catenarity in the coordinate rings of quantum sympletic and Euclidean spaces, Doctoral dissertation.

23. B. Parshall and J.-P. Wang: *Quantum linear groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 439 (1991).

24. C.M. Ringel: Hall algebras and quantum groups, Invent. math. 101 (1990), 583-592.

25. C.M. Ringel: PBW-bases of quantum groups, J. Reine und Angew. Math. 470 (1996), 51-88.

26. S.P. Smith: Quantum groups, An introduction and survey for ring theorists, in Noncommutative Rings, M.S.R.I. Publ. 24, Springer, New York, 1992, 131-178.

27. S.P. Smith: Some finite dimensional algebras related to elliptic curves, in Representation Theory of Algebras and Related Topics, Proc. of the Workshop at UNAM, Mexico, CMS Conference Proceedings 19, Amer. Math. Soc., Providence, 1996, 315-348.

28. S.P. Smith and J.T. Stafford: Regularity of the four dimensional Sklyanin algebra, Compositio Math. 83 (1992), 259-289.

29. J.T. Stafford: Regularity of algebras related to the Sklyanin algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), 895-916.

30. J. Tate and M. Van den Bergh: Homological properties of Sklyanin algebras, Preprint, 1993.

31. P. Tauvel: Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'un algèbre de Lie résoluble, Bull. Soc. Math. France 106 (1978), 177-205.

32. H. Yamane: A PBW Theorem for quantized universal enveloping algebras of type A_n, Publ. RIMS Kyoto 25 (1989), 503-520.

33. J.J. Zhang: Graded Gorenstein rings with enough normal elements,

34, 神保道夫: 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.

35. 若松隆義: Sklyanin Algebras I, 第 5 回多元環の表現論シンポジウム報告集, 1995, 47-54.

36. 岩永恭雄: Sklyanin algebra に関連した非可換ネーター環, 第 5 回多元環の表現論シンポジウム報告集, 1995, 55-74.