

代数群と形式代数群の変形の例について

中央大・理工 関口 力 (Tsutomu Sekiguchi)

東京電機大・工 諏訪紀幸 (Noriyuki Suwa)

1 Introduction

W_n あるいは \widehat{W}_n によって \mathbb{Z} 上の長さ n の群スキームあるいは形式群スキームとし, W あるいは \widehat{W} によって Witt vector のなす群スキームあるいは形式群スキームを表す。また, \mathbb{G}_m あるいは $\widehat{\mathbb{G}}_m$ によって \mathbb{Z} 上の乗法群あるいは形式乗法群を表す。 F によって, W あるいは \widehat{W} の Illusie [2] によって一般化された Frobenius 自己準同型写像を表す。以下, 素数 p を固定する。

我々は, 前論文 [5,9] により任意の $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数 A に対して, 群 $\text{Ext}_A^1(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A})$ あるいは $\text{Ext}_A^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ の具体的な表現を与えた。実際に Artin-Hasse exponential series を用いて同型写像

$$\begin{aligned}
F^n \widehat{W}(A) &\simeq \text{Hom}(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A}), \\
\widehat{W}(A)/F^n &\simeq H^1(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A}), \\
F^n W(A) &\simeq \text{Hom}(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}), \\
W(A)/F^n &\simeq H^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}).
\end{aligned}$$

が与えられるのである。特に $n = 1$ のとき, この結果は

$$(*) \quad \begin{aligned}
F \widehat{W}(A) &\simeq \text{Hom}(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{m,A}), \\
\widehat{W}(A)/F &\simeq H^1(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{m,A}), \\
F W(A) &\simeq \text{Hom}(\widehat{\mathbb{G}}_{a,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}), \\
W(A)/F &\simeq H^1(\widehat{\mathbb{G}}_{a,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}).
\end{aligned}$$

と表される。

一方, $A \setminus (\{0\} \cup A^\times)$ の元 λ に対して, A 上の群スキーム

$$\mathcal{G}^{(\lambda)} = \text{Spec}A[x, 1/(\lambda x + 1)]; \quad x \cdot y = x + y + \lambda xy$$

は群スキーム \mathbb{G}_a から \mathbb{G}_m への変形を与える。我々の目的は, Artin-Hasse exponential series を変形することにより, 同型 (*) を $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ へ一般化することである。実際, 我々の結果は次の形で与えられる。

定理. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数とし, λ を A のべき零元とする。このとき, 同型

$$\begin{aligned} {}_{F^{(\lambda)}}\widehat{W}(A) &\simeq \text{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}), \\ \widehat{W}(A)/F^{(\lambda)} &\simeq H^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}), \\ {}_{F^{(\lambda)}}W(A) &\simeq \text{Hom}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}), \\ W(A)/F^{(\lambda)} &\simeq H^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \end{aligned}$$

を得る。ただし, $F^{(\lambda)}$ は Frobenius 自己準同型 F の変形である。

2 Artin-Hasse exponential series の変形

Artin-Hasse exponential series

$$E_p(X) = \exp(X + p^{-1}X^p + p^{-2}X^{p^2} + \dots)$$

の変形を与えるために, [HZ] より Functional equation lemma を引用する。

A を環 K の部分環とし, $\sigma: K \rightarrow K$ を環準同型, \mathfrak{A} を A のイデアル, $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ を K の与えられた元とする。 q を p のべきとし, 我々は次を仮定する。

仮定

(1) $\sigma(A) \subset A$; $\sigma(a) \equiv a^q \pmod{\mathfrak{A}}$ for all $a \in A$.

(2) $p \in \mathfrak{A}$; $s_i \mathfrak{A} \subset A$ for $i = 1, 2, \dots$

べき級数 $g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i X^i \in A[[X]]$ に対して, べき級数 $f_g(X) \in K[[X]]$ を次で定義する。

$$(1) \quad f_g(X) = g(X) + \sum_{i=1}^{\infty} s_i \sigma_*^i f_g(X^{q^i}),$$

ただし、ベキ級数 $\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} X^{\ell} \in K[[X]]$ に対して $\sigma_*^i \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} X^{\ell} \right) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma^i(a_{\ell}) X^{\ell}$ である。

$$f_g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i X^i,$$

とおくとき、関数等式 (1) は次の漸化式と同値である。

$$(2) \quad d_n = b_n + s_1 \sigma(d_{n/q}) + \cdots + s_r \sigma^r(d_{n/q^r})$$

ただし、 $n = q^r m$ かつ $q \nmid m$ とする。これら記号の下に、次が成り立つ。

補題 2.1 (Functional equation lemma; cf [HZ], Chap. I, §2) $A[[X]]$ のベキ級数 $g_1(X) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i X^i$, $g_2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} b'_i X^i$ に対して、 b_1 は A の可逆元とする。このとき、次を得る。

$$(i) \quad F_{g_1}(X, Y) := f_{g_1}^{-1}(f_{g_1}(X) + f_{g_2}(Y)) \in A[[X, Y]].$$

$$(ii) \quad f_{g_1}^{-1}(f_{g_2}(X)) \in A[[X]].$$

(iii) $A[[X]]$ のベキ級数 $h(X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$ に対して、 $A[[X]]$ のベキ級数 $\hat{h}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n X^n \in A[[X]]$ が存在し $f_{g_1}(h(X)) = f_{\hat{h}}(X)$ を満たす。

(iv) $\alpha(X) \in A[[X]]$, $\beta(X) \in K[[X]]$ と正整数 $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\alpha(X) \equiv \beta(X) \pmod{\mathfrak{A}^r A[[X]]} \Leftrightarrow f_{g_1}(\alpha(X)) \equiv f_{g_2}(\beta(X)) \pmod{\mathfrak{A}^r A[[X]]}$$

が成り立つ。

特に、 $A \supset \mathbb{Z}_{(p)}$, $K \supset \mathbb{Q}$, $\sigma|_{\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$ and $\mathfrak{A} \supset p\mathbb{Z}_{(p)}$ とおき、 $q = p$,

$$s_1 = p^{-1}, s_2 = s_3 = \cdots = 0$$

とおくとき、 $g_2(X) = X$ に対して (1) により

$$(3) \quad f_{g_2}(X) = X + p^{-1} X^p + p^{-2} X^{p^2} + \cdots$$

また $g_1(X) = - \sum_{(n,p)=1} n^{-1} X^n$ に対して

$$(4) \quad f_{g_1}(X) = \log(1 - X) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n}$$

を得る。これら g_1, g_2 に補題 2.1, (ii) を適用すれば, Artin-Hasse exponential series $E_p(X)$ が $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上定義されることがわかる。

以下, 変数 λ, μ に対して, $A = \mathbb{Z}_{(p)}[\lambda, \mu/\lambda]$, $K = \mathbb{Q}[\lambda, \mu/\lambda]$ とおき, 準同型 $\sigma: K \rightarrow K$ を $f(\lambda, \mu) \in K = \mathbb{Q}[\lambda, \mu/\lambda]$ に対して

$$\sigma(f(\lambda, \mu)) = f(\lambda^p, \mu^p)$$

で定義し, $\mathfrak{A} = pA$ とおく。このとき $f(\lambda, \mu) \in A$ に対して

$$\sigma(f(\lambda, \mu)) \equiv f(\lambda, \mu)^p \pmod{\mathfrak{A}}$$

が成り立つ。更に

$$s_1 = p^{-1}, s_2 = s_3 = \dots = 0$$

とおき

$$(5) \quad g_3(X) = - \sum_{(n,p)=1} \frac{\mu \lambda^n}{\lambda n} X^n$$

とおく。このとき (2) によって, ベキ級数

$$f_{g_3}(X) = d_1 X + d_2 X^2 + \dots$$

は, $r \geq 0, m \geq 1$ with $(m, p) = 1$ とするとき

$$(6) \quad d_{p^r m} = b_{p^r m} + s_1 \sigma(d_{p^{r-1} m})$$

で与えられる。更に, (6) は

$$(7) \quad d_{p^r m} = \frac{1}{p^r} \sigma^r(d_m) = - \frac{1}{p^r} \frac{\mu^{p^r} \lambda^{p^r m}}{\lambda^{p^r} m}$$

と書き直される。これより, 元 $a \in K$ と正整数 n に対して

$$\wp(a) := a^p - a.$$

とおくとき、容易に分かる通り

$$(8) \quad f_{g_3}(X) = \log \left\{ (1 - \lambda X)^{\frac{\mu}{\lambda}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \lambda^{p^m} X^{p^m})^{\frac{1}{p^m} \wp((\mu/\lambda)^{p^{m-1}})} \right\}$$

を得る。従って、補題 2.1, (2) を g_1 と g_3 に適用することにより、関数

$$(9) \quad E_p(\mu : \lambda; X) := (1 + \lambda X)^{\frac{\mu}{\lambda}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - (-1)^{p^n} X^{p^n} \right\}^{\frac{1}{p^n} \wp\left(\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{p^{n-1}}\right)}$$

は $A[[X]]$ の元であることが分かり、更に $\mathbb{Z}_{(p)}[\lambda, \mu][[X]]$ に含まれることが分かる。従って、任意の環準同型写像

$$\alpha : \mathbb{Z}_{(p)}[\lambda, \mu] \rightarrow B$$

に対して

$$E_p(\alpha(\mu) : \alpha(\lambda); X) \in B[[X]]$$

が定義される。容易に分かるとおり

$$E_p(1 : 0; X) = E_p(X)$$

であり、 $E_p(\mu : \lambda; X)$ は Artin-Hasse exponential series $E_p(X)$ の変形を与えていることが分かる。

3 Frobenius endomorphism の変形

以下、ここでは W あるいは \widehat{W} の Frobenius 自己準同型 F の変形を扱う。

各 $r = 0, 1, \dots$ について、Witt 多項式 $\Phi_r(\mathbb{T}) = \Phi_r(T_0, T_1, \dots, T_r) \in \mathbb{Z}[\mathbb{T}] = \mathbb{Z}[T_0, T_1, \dots]$ を

$$\Phi_r(\mathbb{T}) = T_0^{p^r} + pT_1^{p^{r-1}} + \dots + p^r T_r$$

とおく。変数 Λ をとり、 $A_0 = \mathbb{Z}[\Lambda]$ とおく。ここで、phantom morphism

$$(10) \quad \Phi : W \rightarrow \mathbb{G}_a^\infty = \text{Spec} \mathbb{Z}[\mathbb{T}],$$

また

$$(11) \quad \Phi^{(\Lambda)} : W_{A_0} \rightarrow \mathbb{G}_{a, A_0}^\infty$$

を

$$(12) \quad \Phi(\mathbb{T}) := (\Phi_0(\mathbb{T}), \Phi_1(\mathbb{T}), \dots)$$

と

$$(13) \quad \Phi^{(\Lambda)}(\mathbb{T}) := (\Phi_1(\mathbb{T}) - \Lambda^{p-1}\Phi_0(\mathbb{T}), \Phi_2(\mathbb{T}) - \Lambda^{p(p-1)}\Phi_1(\mathbb{T}), \dots)$$

で定義する。明らかに、自己準同型写像

$$(14) \quad F^{(\Lambda)} := (\Phi)^{-1} \Phi^{(\Lambda)} : W_{\mathbb{Q}[\Lambda]} \rightarrow W_{\mathbb{Q}[\Lambda]}$$

は $\mathbb{Q}[\Lambda]$ 上定義され、 $F^{(0)}$ は Illusie [2] によって定義された Frobenius endomorphism である。更に、Witt 群スキームが \mathbb{Z} 上定義されることを証明するときと全く同様の方法によって、次を得る。

補題 3.1 $F^{(\Lambda)} : W \rightarrow W$ は $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 上定義される。

W の元 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ に対して、ベキ級数 $E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X)$ を

$$(15) \quad E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X) := E_p(a_0 : \Lambda; X) E_p(a_1 : \Lambda^p; X^p) E_p(a_2 : \Lambda^{p^2}; X^{p^2}) \dots$$

によって定義する。このとき、定義 (9) により次を得る。

補題 3.2

$$E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X) = (1 + \Lambda X)^{\frac{1}{p} \Phi_0(\mathbf{a})} (1 + \Lambda^p X^p)^{\frac{1}{p \Lambda^p} \Phi_0(F^{(\Lambda)}(\mathbf{a}))} \\ \cdot (1 + \Lambda^{p^2} X^{p^2})^{\frac{1}{p^2 \Lambda^{p^2}} \Phi_1(F^{(\Lambda)}(\mathbf{a}))} \dots$$

また

$$\frac{E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X) E_p(\mathbf{a} : \Lambda; Y)}{E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X + Y + \Lambda XY)} = \left(\frac{(1 + \Lambda^p X^p)(1 + \Lambda^p Y^p)}{1 + \Lambda^p (X + Y + \Lambda XY)^p} \right)^{\frac{1}{p \Lambda^p} \Phi_0(F^{(\Lambda)}(\mathbf{a}))} \\ \cdot \left(\frac{(1 + \Lambda^{p^2} X^{p^2})(1 + \Lambda^{p^2} Y^{p^2})}{1 + \Lambda^{p^2} (X + Y + \Lambda XY)^{p^2}} \right)^{\frac{1}{p^2 \Lambda^{p^2}} \Phi_1(F^{(\Lambda)}(\mathbf{a}))} \dots$$

次は、この補題 3.2 の直接の結果である。

補題 3.3 W あるいは \widehat{W} の元 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ に対して, 関数等式

$$(16) \quad E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X)E_p(\mathbf{a} : \Lambda; Y) = E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X + Y + \Lambda XY)$$

が成り立つことと, \mathbf{a} が ${}_{F(\Lambda)}W = \text{Ker}(F(\Lambda) : W \rightarrow W)$ あるいは ${}_{F(\Lambda)}\widehat{W}$ に含まれることと同値である。

更に, W の元 \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して

$$E_p(\mathbf{a} + \mathbf{b} : \Lambda; X) = E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X)E_p(\mathbf{b} : \Lambda; X)$$

が成り立つ。

4 Cocycles

Witt vector $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ に対して, ベキ級数 $F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X, Y)$ を

$$(17) \quad F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X, Y) := \left(\frac{(1 + \Lambda^p X^p)(1 + \Lambda^p Y^p)}{1 + \Lambda^p (X + Y + \Lambda XY)^p} \right)^{\frac{1}{p\Lambda^p} \Phi_0(\mathbf{b})} \\ \cdot \left(\frac{(1 + \Lambda^{p^2} X^{p^2})(1 + \Lambda^{p^2} Y^{p^2})}{1 + \Lambda^{p^2} (X + Y + \Lambda XY)^{p^2}} \right)^{\frac{1}{p^2 \Lambda^{p^2}} \Phi_1(\mathbf{b})} \\ \cdot \left(\frac{(1 + \Lambda^{p^3} X^{p^3})(1 + \Lambda^{p^3} Y^{p^3})}{1 + \Lambda^{p^3} (X + Y + \Lambda XY)^{p^3}} \right)^{\frac{1}{p^3 \Lambda^{p^3}} \Phi_2(\mathbf{b})} \cdots$$

によって定義する。このとき, 補題 3.2 により

$$F_p(F(\Lambda)(\mathbf{a}) : \Lambda; X, Y) \\ = \frac{E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X)E_p(\mathbf{a} : \Lambda; Y)}{E_p(\mathbf{a} : \Lambda; X + Y + \Lambda XY)} \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[X, Y]]$$

が成り立つが, この事実を用いて, 更に次を示すことが出来る。

補題 4.1 b_0, b_1, \dots を変数とし, Witt vector $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ に対して

$$F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\mathbf{b}, \Lambda][[X, Y]],$$

であり, $F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X, Y)$ は *symmetric 2-cocycle conditions*:

$$\begin{aligned} F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X + Y + \Lambda XY, Z) F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X, Y) \\ = F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X, Y + Z + \Lambda YZ) F_p(\mathbf{b} : \Lambda; Y, Z), \\ F_p(\mathbf{b} : \Lambda; X, Y) = F_p(\mathbf{b} : \Lambda; Y, X) \end{aligned}$$

を満たす。

5 主定理

以下, A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数, λ を p を割る A の元とする。このとき, 補題 3.3, 補題 4.1 により, 準同型写像:

$$(18) \quad \begin{aligned} \xi_A^0 :_{F(\lambda)} \widehat{W}(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}); & \mathbf{a} &\mapsto E_p(\mathbf{a} : \lambda; X), \\ \xi_A^1 : \widehat{W}(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}); & \mathbf{a} &\mapsto F_p(\mathbf{a} : \lambda; X, Y), \\ \xi_A^0 :_{F(\lambda)} W(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}); & \mathbf{a} &\mapsto E_p(\mathbf{a} : \lambda; X), \\ \xi_A^1 : W(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}); & \mathbf{a} &\mapsto F_p(\mathbf{a} : \lambda; X, Y) \end{aligned}$$

が得られる。これらは更に次のように同型であることが分かる。

定理 5.1 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数, λ を A のべき零元とする。このとき, (18) によって定義された準同型写像:

$$\begin{aligned} \xi_A^0 :_{F(\lambda)} \widehat{W}(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}), \\ \xi_A^0 :_{F(\lambda)} W(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}), \\ \xi_A^1 : \widehat{W}(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}), \\ \xi_A^1 : W(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \end{aligned}$$

は同型写像である。

我々は, 前節で Frobenius endomorphism の一般化を与え, Artin-Hasse exponential series の変形を与えたが, これらを用いることにより, 証明は全く [9] の議論と同様に行われる。以下, その証明の概略を述べる。

以下, $P = \{p^\ell \mid \ell \geq 0\} \subset \mathbb{N}$ とおく。

補題 5.2 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数, λ を A の元, $F(T) \in A[[T]]^\times$ とする。 F が関数等式 $F(X + Y + \lambda XY) = F(X)F(Y)$ を満たすとき, 元 $\mathbf{a} \in {}_{F(\lambda)}W(A)$ が存在し $F(T) = E_p(\mathbf{a}; \lambda; T)$ と表される。更に, λ がべき零元であり, $F(T) \in A[[T]]^\times$ であれば, $\mathbf{a} \in {}_{F(\lambda)}\widehat{W}(A)$ となる。

Proof. 元 $\mathbf{a} \in W(A)$ が存在し,

$$F(T) = E_p(\mathbf{a}; \lambda; T) \prod_{k \in P^c} E_p(c_k T^k)$$

と表されることが容易に示され, 与えられた関数等式を

$$G(T) = \prod_{k \in P^c} E_p(c_k T^k)$$

の関数等式に変形することにより, 補題の結果を得る。

また cocycle に関しても Lazard's comparison lemma [3, Lemme 3] を用いることにより, 次が得られる。

補題 5.3 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数とし $\lambda \in A$ とする。このとき, $F(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathcal{G}}_{m, A}) \subset A[[X, Y]]^\times$ に対して, 元 $\mathbf{a} \in W(A)$ と $G(T) = \prod_{k \notin P} (1 + c_k T^k) \in A[[T]]^\times$ が存在し

$$F(X, Y) = F_p(\mathbf{a}; \lambda; X, Y) G(X) G(Y) G(X + Y + \lambda XY)^{-1}$$

が成り立つ。

次は技術的な補題である。

補題 5.4 λ を A のべき零元とする。

$$F(X, Y) = 1 + H_1(X, Y) + H_2(X, Y) + \cdots + H_d(X, Y) \in A[X, Y]^\times$$

は, 次数 l の同次式 H_l をもつ可逆多項式とする。各 $i \geq 1$ に対して, $F_i(X, Y) \in A[[X, Y]]$ は同様に同次部分の和で書いた次のような形式べき級数とする。

$$F_i(X, Y) = 1 + H_{k_i}^{(i)}(X, Y) + H_{k_i+1}^{(i)}(X, Y) + \cdots$$

更に, $k_1 < k_2 < \cdots$ であり

$$(19) \quad F(X, Y) = \prod_{i \geq 1} F_i(X, Y)$$

を満たしているとする。各 i と各 $j \geq k_i$ に対して、

$$(20) \quad (\text{the coefficients of } H_{k_i}^{(i)}, \lambda)^{u(j/k_i)} \ni \text{the coefficients of } H_j^{(i)}(X, Y)$$

とする。ただし、 $u(b/a) := -[-b/a]$ とおく。このとき、殆どすべての i について $F_i(X, Y) = 0$ であり、 F_i は全て多項式である。

補題 5.3, 補題 5.4 によって, cocycle は次のようにコントロールされる。

補題 5.5 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数, λ を A のベキ零元とする。 $F(X, Y) \in Z^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}) \subset A[X, Y]^\times$ とするとき, 元 $\mathbf{a} \in \widehat{W}(A)$ と $G(T) = \prod_{k \in \mathbb{P}} (1 + c_k T^k) \in A[T]^\times$ が存在し

$$F(X, Y) = F(\mathbf{a}; \lambda; X, Y)G(X)G(Y)G(X + Y + \lambda XY)^{-1}$$

が成り立つ。

写像

$$\xi_A^0 : F^{(\lambda)} \widehat{W}(A) \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$$

と

$$\xi_A^0 : F^{(\lambda)} W(A) \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

の全単射性は補題 5.2 に従う。

写像

$$\xi_A^1 : \widehat{W}(A)/F^{(\lambda)} \rightarrow H^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$$

と

$$\xi_A^1 : W(A)/F^{(\lambda)} \rightarrow H^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

の全射性は補題 5.3 と補題 5.5 に従う。更にこれらの単射性は、補題 5.2 の証明と同様の議論を行うことにより示される。

6 群スキーム $\mathcal{W}_2/(\mathbb{Z}/p^2)$ の決定

最後に、我々の結果の一つの応用を述べる。その為に、[4], [7] あるいは [8] から幾つかの結果を引用する。

この節を通して, ζ_n は 1 の原始 p^n 乗根であり, 各 n について, $\zeta_n^p = \zeta_{n-1}$ を満たすものとする。また $A_n = \mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ とし, $\lambda_n = \zeta_n - 1$, $\lambda = \lambda_1$ とおく。このとき, 完全系列

$$(21) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}^{(\lambda)} \rightarrow 0$$

$$x \mapsto \frac{1}{\lambda^p} \{(1 + \lambda x)^p - 1\}$$

が得られ, これは Artin-Schreier 完全系列から Kummer 完全系列への変形を与え, 我々はこれを Kummer-Artin-Schreier 完全系列と呼ぶことにする。更に, 高次元の場合には, Artin-Schreier-Witt 完全系列と Kummer 型完全系列の統一を与える完全系列

$$(22) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \xrightarrow{i_n} \mathcal{W}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{V}_n \rightarrow 0$$

は, $\text{Ext}^1(\mathcal{W}_{n-1}, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ に含まれる拡大として, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{G}^{(\lambda)}$ として帰納的に構成される。

一方, この拡大群は, 次の完全系列を用いることにより決定される。

$$(23) \quad 0 \rightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\alpha^{(\lambda)}} \mathbb{G}_{m, A_1} \xrightarrow{r^{(\lambda)}} i_* \mathbb{G}_{m, A_1/\lambda} \rightarrow 0$$

$$x \mapsto 1 + \lambda x$$

$$y \mapsto y \bmod \lambda$$

ただし, $i: \text{Spec} A_1/\lambda \hookrightarrow \text{Spec} A_1$ は closed immersion である。実際, 完全系列 (23) より, 完全系列

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m, A_1})$$

$$\xrightarrow{r^{(\lambda)}} \text{Hom}(\mathcal{W}_n, i_* \mathbb{G}_{m, A_1/\lambda}) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m, A_1})$$

が得られ, Hilbert Theorem 90 により $\text{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m, A_1}) = 0$ であるから, 全射準同型写像

$$(24) \quad \text{Hom}(\mathcal{W}_n, i_* \mathbb{G}_{m, A_1/\lambda}) / r^{(\lambda)}(\text{Hom}(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m, A_1})) \cong \text{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)})$$

が得られる。従って, 拡大群 $\text{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ を決定することは, 本質的に準同型群 $\text{Hom}(\mathcal{W}_n, i_* \mathbb{G}_{m, A_1}/\text{Hom}(i^* \mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m, A_1/\lambda}))$ を決定することと同値である。 $i^* \mathcal{W}_n \cong \mathcal{W}_n$ であるときの完全な答えは, [9] によって与えてある。

以下, 群スキーム \mathcal{V}_2 の具体的な計算方法を我々の結果を用いて与えられることを示す。

Λ を変数とし, 写像

$$\Psi^{(\Lambda)} : W \rightarrow W, \quad \text{or} \quad \Psi^{(\Lambda)} : \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}$$

を次で定義する。

$$\Psi^{(\Lambda)}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$$

とおくとき, ($n = 2, 3, \dots$) に対して

$$(*_0) \quad b_0 = \frac{p}{\Lambda^{p-1}} a_0$$

$$(*_1) \quad \Phi_0(F^{(\Lambda)}(\mathbf{b})) = \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p \Phi_0(F(\mathbf{a}))$$

$$(*_n) \quad \Phi_{n-1}(F^{(\Lambda)}(\mathbf{b})) = p\Phi_{n-2}(F(\mathbf{a})) + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^{p^n} \Phi_{n-1}(F(\mathbf{a}))$$

ただし, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ とおく。このとき, 次を得る。

補題 6.1 写像 $\Psi^{(\Lambda)} : W \rightarrow W$ は次の環上定義される。

$$\mathbb{Z}_{(p)}\left[\Lambda, \frac{p}{\Lambda^{p-1}}, \frac{\Lambda^{p-1}}{p}\right]$$

例. $\Psi^{(\Lambda)}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ のとき,

$$(25) \quad \begin{aligned} b_0 &= \frac{p}{\Lambda^{p-1}} a_0, \\ b_1 &= a_0 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p a_1, \\ b_2 &= a_1 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^{p^2} a_2 + \frac{1}{p} \left\{ a_0^p + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^{p^2} a_1^2 - \left(a_0 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p a_1\right)^p \right\} \\ &\quad + p^{p-2} a_0^p + \frac{\Lambda^{p-1}}{p} \Lambda^{(p-1)^2} \left(a_0 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p a_1\right). \end{aligned}$$

となる。

補題 6.1 より次が従う。

系 6.2 $\lambda = \zeta_1 - 1$ に対して, $\Psi^{(\lambda)} : W \rightarrow W$ は $\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_1]$ 上定義された準同型写像である。

こうした準備の下に, 我々は次の結果を得る。

定理 6.3 A を, $\mathbb{Z}_{(p)}$ を支配する DVR t とする。このとき, 次の図式は果敢である。

$$\begin{array}{ccccc}
 \xi_{(\lambda, \lambda)} : {}_F\widehat{W}(A/\lambda) & \xrightarrow{\xi_{A/\lambda}^0} & \text{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, i_*\mathbb{G}_{m, A/\lambda}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \\
 \downarrow p & & & & \downarrow \phi_* \\
 (26) \quad \xi_{(\lambda, \lambda^p)} : {}_{F^{(\lambda)}}\widehat{W}(A/\lambda^p) & \xrightarrow{\xi_{A/\lambda^p}^0} & \text{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, i_*\mathbb{G}_{m, A/\lambda^p}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \\
 \uparrow \Psi^{(\lambda)} & & & & \uparrow \phi^* \\
 \xi_{(\lambda^p, \lambda^p)} : {}_F\widehat{W}(A/\lambda^p) & \xrightarrow{\xi_{A/\lambda^p}^0} & \text{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda^p)}, i_*\mathbb{G}_{m, A/\lambda^p}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda^p)}, \mathcal{G}^{(\lambda^p)})
 \end{array}$$

この定理より, $\mathcal{W}_2 = \xi_{(\lambda, \lambda)}(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in {}_F\widehat{W}(A/\lambda)$ とし, $\mathcal{V}_2 = \xi_{(\lambda^p, \lambda^p)}(\mathbf{b})$, $\mathbf{b} \in {}_F\widehat{W}(A/\lambda^p)$ とするとき,

$$\Psi^{(\lambda)}(\mathbf{b}) = (\lambda, 0, \dots) + p\mathbf{a}$$

が成り立ち, この等式を \mathbf{b} について解くことにより, \mathcal{V}_2 が決定されるのである。

References

- [1] GREEN, B. AND MATIGNON, M., *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Forschungsschwerpunkt Arithmetik, Universität Heiderberg, Universität Mannheim, Heft Nr. 19, (1996)
- [2] ILLUSIE, L., *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Scient. de l'Ec. Norm. Sup. 4^e série 12, 501-661(1979)
- [3] LAZARD, M., *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre*, Bull. Soc. Math. France, 83, 251-274(1955)
- [4] SEKIGUCHI, T., *On the deformations of Witt groups to tori II*, J. of Algebra 138(2), 273-297(1991)
- [5] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *A case of extensions of group schemes over a discrete valuation ring*, Tsukuba J. Math., 14(2), 459-487(1990)

- [6] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *A note on extensions of algebraic and formal groups I, II*, Math. Z., 206, 567-575(1991), 217, 447-457(1994)
- [7] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *On the unified Kummer-Artin-Schreier-Witt theory*, (Preprint series), CHUO MATTH NO.41, (1994)
- [8] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, 105-110(1994)
- [9] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *A note on extensions of algebraic and formal groups III*, to appear in Thohoku J.
- [DG] DEMAZURE, M. and GABRIEL, P., *Groupes algébriques, Tome 1*, Masson-North-Holland, 1970
- [HZ] HAZEWINKEL, M., *Formal groups and applications*, Academic Press, 1978