数理解析研究所講究録
997 巻 1997 年 174-189

DEGENERATE DOUBLE AFFINE HECKE ALGEBRA AND KZ-EQUATION

名大多元数理　荒川 知幸 (Tomoyuki Arakawa)
京大数理研　鈴木 武史 (Takeshi Suzuki)
名大多元数理　土屋 昭博 (Akihiro Tsuchiya)

1. 導入

この稿では, 退化アフィンヘッケ環 [1] 及び Cherednik [1] によって導入された退化ダブルアフィンヘッケ環[2] のあるクラスの表現について考察する.

退化アフィンヘッケ環 $\bar{\mathcal{H}}$ はベクトル空間としては次のような代数である (定義 2.4.3):

$$\bar{\mathcal{H}} = \mathbb{C}[\bar{W}] \otimes S[\mathfrak{t}].$$

ここで, $\mathbb{C}[\bar{W}]$ は N 次対称群の群多元環, $S[\mathfrak{t}]$ はリー環 $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ のカルタン部分代数の対称代数である. 圏 $\mathrm{Mod}(\bar{\mathcal{H}})$, $\mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}})$ をそれぞれ, $\bar{\mathcal{H}}$ 左加群のなす圏, 単純リー環 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$ 左加群のなす圏として, 我々は, 双関手

$$\bar{\mathcal{F}} : \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}}) \times \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}}) \to \mathrm{Mod}(\bar{\mathcal{H}})$$

を構成する. 特に, $V(\bar{\mu}), V^*(\bar{\lambda})$ をそれぞれ最高ウエイト $\bar{\mu}$, 最低ウエイト $-\bar{\lambda}$ の有限次元既約 $\bar{\mathfrak{g}}$ 加群として, $\bar{\mathcal{H}}$ 加群 $\bar{\mathcal{F}}(V(\bar{\mu}), V^*(\bar{\lambda}))$ を考察し, それが既約であることを示す (定理 3.7.2). さらに任意の $S[\mathfrak{t}]$ が半単純に作用する $\bar{\mathcal{H}}$ 加群は, これらの形の加群のテンソル積からの誘導表現として得られることもわかる (定理 3.8.1).

また, $\bar{\mu}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウエイト, $\bar{M}(\bar{\mu})$ を最高ウイエト $\bar{\mu}$ のヴァーマ加群として, 関手 $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mu}} := \bar{\mathcal{F}}(\bar{M}(\bar{\mu}), \cdot)$ が完全関手であることも示され, 系として $V^*(\bar{\lambda})$ の BGG 完全列から $\bar{\mathcal{H}}$ 加群 $\bar{\mathcal{F}}(V(\bar{\mu}), V^*(\bar{\lambda}))$ のスタンダード加群による resolution を得る (系 3.9.3).

さらに我々は同様の構成を退化ダブルアフィンヘッケ環 $\mathcal{H}$ においても試みる. すなわち, $\bar{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ に, $\bar{\mathfrak{g}}$ をアフィンリー環 $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_m(\mathbb{C})$ に置き換え, 双関手 $\mathcal{F}$ 及びその制限として得られる関手 $\mathcal{F}_\mu$ を構成する (定理 4.4.3 及び節 4.5). この構成の過程で本質的に用いられるのは, KZ 方程式 ([2] 参照) である. $L(\mu)$, $L^*(\lambda)$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ のレベル ℓ, レベル $-\ell$ の既約可積分表現として, $\mathcal{H}$ 加群 $\mathcal{F}(L(\mu), L^*(\lambda))$ は共形場理論におけるコンフォーマルブロックに対応している. またこのようにして得られる表現は, 特別な場合として, 非対称ジャック多項式が現れる場合 ([3] 参照) を含んでいる.

---

[1] degenerate affine Hecke algebra または graded affine Hecke algebra
[2] degenerate double affine Hecke algebra

この退化ダブルアフィンヘッケ環の場合の表現の解析は未だ未完成ではあるが，我々は $\bar{\mathcal{H}}$ の時と同様，$\mathcal{F}(L(\mu), L^*(\lambda))$ が $\mathcal{H}$ 加群として既約であること，$L^*(\lambda)$ の BGG 完全列から $\mathcal{F}(L(\mu), L^*(\lambda))$ の resolution を得られることを期待している（予想 4.5.2, 予想 4.5.4）．さらに，それから従う，$\mathcal{F}(L(\mu), L^*(\lambda))$ の $\bar{W}$ 不変部分空間に関する予想についても簡単に述べる．

2. 準備

2.1. N を自然数として，$\bar{\mathfrak{t}} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}\bar{\epsilon}_i^\vee$ をリー環 $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ のカルタン部分代数とする．ここで、$\{\bar{\epsilon}_i^\vee\}_{i=1,\ldots,N}$ はキリング形式 $(,)$ に関する正規直交基底である．また $\bar{\mathfrak{t}}^*$ を $\bar{\mathfrak{t}}$ の双対空間，$\{\bar{\epsilon}_i\}_{i=1,\ldots,N}$ を対応する双対基底とする．ルート系 $\bar{R} = \{\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}_j \mid i \neq j\} \subset \bar{\mathfrak{t}}^*$，正のルートの集合 $\bar{R}_+ = \left\{\bar{\alpha}_{ij} \in \bar{R} \mid i < j\right\} \subset \bar{R}$，単純ルートの集合 $\bar{\Pi} = \{\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_{i\,i+1} \mid i = 1, \ldots, N-1\}$ を固定する． 負のルートの集合 は $\bar{R}_- = \bar{R} \backslash \bar{R}_+$ で与えられる． 同様にコルート系 $\bar{R}^\vee = \left\{\bar{\alpha}_{ij}^\vee = \bar{\epsilon}_i^\vee - \bar{\epsilon}_j^\vee \mid i \neq j\right\} \subset \bar{\mathfrak{t}}^*$，正のコルートの集合 $\bar{R}_+^\vee = \left\{\bar{\alpha}_{ij}^\vee \in \bar{R} \mid i < j\right\}$，単純コルートの集合 $\bar{\Pi}^\vee = \{\bar{\alpha}_i^\vee\}$ が定義される．

またルート格子 $\bar{Q} = \mathbb{Z}\bar{R}$，ウエイト格子 $\bar{P} = \bar{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$，コルート格子 $\bar{Q}^\vee = \mathbb{Z}\bar{R}^\vee$，コウエイト格子 $\bar{P}^\vee = \bar{Q}^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ を定めておく．

ルート $\bar{\alpha}$ について，$s_{\bar{\alpha}}$ を対応する鏡映とし，$\bar{W}$ を $s_{\bar{\alpha}}$ で生成される A_N 型ワイル群とする．従って，$\bar{W}$ は対称群 $\mathfrak{S}_N$ に同型である．

2.2. アフィンリー環 $\widehat{\mathfrak{gl}}_N(\mathbb{C})$ のカルタン部分代数を $\mathfrak{t} = \bar{\mathfrak{t}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ とし，また $\mathfrak{t}' = \bar{\mathfrak{t}} \oplus \mathbb{C}c \subset \mathfrak{t}$ とする．双一次形式 $(,)$ は $(c,c) = 0$, $(c,d) = 1$, $(d,d) = 0$, $(c,\bar{\xi}) = (d,\bar{\xi}) = 0$ $(\bar{\xi} \in \bar{\mathfrak{t}})$ により $\mathfrak{t}$ に拡張される．また，$\mathfrak{t}$ の双対空間を $\mathfrak{t}^* = \bar{\mathfrak{t}}^* \oplus \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ とする．ここで，δ, Λ_0 は，それぞれ d, c の双対基底である．非退化双一次形式 $(,)$ により，我々はしばしば $\mathfrak{t}^*$ と $\mathfrak{t}$ を同一視するが，$\zeta \in \mathfrak{t}^*$ に対応する元を $\zeta^\vee \in \mathfrak{t}$ と書く．また $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}^*$ から $\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{t}}^*$ への射影の像を $^-$ をつけて表すことにする．さらに $\mathfrak{t}'$ の双対空間 $(\mathfrak{t}')^*$ を同型 $(\mathfrak{t}')^* = \mathfrak{t}^*/\mathbb{C}\delta \cong \bar{\mathfrak{t}}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ により $\mathfrak{t}^*$ の部分空間とみなす．

アフィンルート系を $R = \left\{\bar{\alpha} + k\delta \,|\, \bar{\alpha} \in \bar{R},\, k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathfrak{t}^*$，正のアフィンルートの集合を $R_+ = \left\{\bar{\alpha} + k\delta \mid \bar{\alpha} \in \bar{R}_+,\, k \geq 0\right\} \sqcup \left\{\bar{\alpha} + k\delta \mid \bar{\alpha} \in \bar{R}_-,\, k > 0\right\}$，負のアフィンルートの集合を $R_- = R \backslash R_+$，単純アフィンルートの集合を $\Pi = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}\}$ とする．ここで，$\alpha_0 = \delta - \theta$, $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ である．同様にアフィンコルート系 $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$，正のアフィンコルートの集合 $R_+^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R_+\}$，単純アフィンコルートの集合 $\Pi^\vee = \left\{\alpha_0^\vee \ldots, \alpha_{N-1}^\vee\right\}$ が定義される．

2.3. アフィンワイル群 W は半直積

$$W = \bar{W} \ltimes \bar{P},$$

で与えられる. ここで, w と $t_{\bar\eta}$ をそれぞれ $w \in \bar W$ と $\bar\eta \in \bar P$に対応する W の元として, 関係式は $w \cdot t_{\bar\eta} \cdot w^{-1} = t_{w(\bar\eta)}$である. W の $\xi \in \mathfrak{t}$ への作用は次で与えられる:

$$\begin{aligned} s_{\bar\alpha}(\xi) &= \xi - \bar\alpha(\xi)\bar\alpha^\vee \ \left(\bar\alpha \in \bar R\right), \\ t_{\bar\eta}(\xi) &= \xi + \delta(\xi)\bar\eta^\vee - \left(\bar\eta(\xi) + \tfrac{1}{2}(\bar\eta,\bar\eta)^2\delta(\xi)\right)c \ \left(\bar\eta \in \bar P\right). \end{aligned} \tag{1}$$

同様に $\mathfrak{t}^*$への作用も定義される. 作用 (1) は $\mathfrak{t}'$を保ち, 従って $(\mathfrak{t}')^* = \bar{\mathfrak{t}}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ への "アフィン作用" を誘導する: $\zeta = \bar\zeta + \kappa\Lambda_0$ ($\bar\zeta \in \bar{\mathfrak{t}}$, $\kappa \in \mathbb{C}$) に対して,

$$\begin{aligned} s_{\bar\alpha}(\zeta) &= \zeta - (\bar\alpha,\zeta)\bar\alpha \ \left(\bar\alpha \in \bar R\right), \\ t_{\bar\eta}(\zeta) &= \zeta + \kappa\bar\eta \ \left(\bar\eta \in \bar P\right). \end{aligned}$$

アフィンルート $\alpha = \bar\alpha + k\delta$ ($\bar\alpha \in \bar R$, $k \in \mathbb{Z}$) について, 対応する鏡映を $s_\alpha = t_{-k\bar\alpha} \cdot s_{\bar\alpha}$ とし, $s_i = s_{\alpha_i}$ ($i = 0, \ldots, N-1$) と置く. 以下, しばしば集合 $\{0, \ldots, N-1\}$ とアーベル群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ とを同一視する. さて, $\pi = t_{\epsilon_1} \cdot s_1 \cdots s_{N-1}$ と置くと次が成立することは良く知られている.

命題 2.3.1. 群 W は次の生成元と関係式で与えられる群に同型となる：

$$\begin{aligned} \text{生成元} \ &: \ s_i \ (i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \ \pi^{\pm 1}, \\ \text{関係式} \ &: \ s_i^2 = 1 \ (i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \\ & \quad s_i \cdot s_{i+1} \cdot s_i = s_{i+1} \cdot s_i \cdot s_{i+1} \ (i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \\ & \quad s_i \cdot s_j = s_j \cdot s_i \ (i - j \not\equiv \pm 1 \bmod N), \\ & \quad \pi \cdot s_i = s_{i+1} \cdot \pi \ (i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \\ & \quad \pi \cdot \pi^{-1} = 1. \end{aligned}$$

従って, 特に,

$$W \cong \Omega \ltimes W^a,$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} W^a &= \bar W \ltimes \bar Q = \langle s_0, \ldots, s_{N-1} \rangle, \\ \Omega &= \langle \pi^{\pm 1} \rangle \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

元 $w \in W$に対して, $S(w) = R_+ \cap w^{-1}(R_-)$ と置き, w の長さ $l(w)$ を $l(w) = |S(w)|$ で定める. このとき 表示 $w = \pi^k \cdot s_{j_1} \cdots s_{j_m}$ が最短表示であるとは $m = l(w)$ となることをいう. また $\bar S(w) = S(w) \cap \bar R_+$ とする. さらに $\preceq$ でブリュア順序[3] を表すことにする.

[3] $w' \preceq w$ とは w' の最短表示が w の最短表示の部分表示として得られることをいう.

2.4. $\mathbb{C}[W]$ で W の群多元環, $S[\mathfrak{t}']$ で $\mathfrak{t}'$の対称代数を表すことにする. 明らかに $\mathbb{C}[W] = \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes \mathbb{C}[\bar{W}]$, $S[\mathfrak{t}'] = S[\bar{\mathfrak{t}}] \otimes \mathbb{C}[c]$ となる. 以下しばしば対応 $z_i = e^{\epsilon_i}$により群環 $\mathbb{C}[\bar{P}]$ とローラン多項式環 $\mathbb{C}[z_1^{\pm}, \ldots, z_N^{\pm}]$ を同一視する.

定義 2.4.1. 退化ダブルアフィンヘッケ環 $\mathcal{H}$ とは, 次で定義される単位元を持つ $\mathbb{C}$ 代数である:

(1) $\mathbb{C}$ ベクトル空間として,

$$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}[W] \otimes S[\mathfrak{t}'].$$

(2) 自然な包含写像 $\mathbb{C}[W] \to \mathcal{H}$, $S[\mathfrak{t}'] \to \mathcal{H}$ は代数の準同型である. (以下, $w \in W$, $\xi \in \mathfrak{t}$ についてその像を単に w, ξ と書く.)

(3) 次の関係式を満たす:

$$\begin{aligned}
&c \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}) \ (\mathcal{H} \text{ の中心}), \\
&s_i \cdot \xi - s_i(\xi) \cdot s_i = -\alpha_i(\xi) \ (i = 0, \ldots, N-1, \ \xi \in \mathfrak{t}'), \\
&\pi \cdot \xi = \pi(\xi) \cdot \pi \ (\xi \in \mathfrak{t}').
\end{aligned}$$

注意 2.4.2. 正確には, Cherednik [1] によって導入された代数は, $\mathcal{H}$ の商代数 $\mathcal{H}(\kappa) = \mathcal{H}/\langle c - \kappa \,\mathrm{id}\,\rangle$ $(\kappa \in \mathbb{C}^*)$ である.

定義 2.4.3. $\mathcal{H}$ の部分代数

$$\bar{\mathcal{H}} = \langle w \in \bar{W}, \bar{\xi} \in \bar{\mathfrak{t}} \rangle \cong \mathbb{C}[\bar{W}] \otimes S[\bar{\mathfrak{t}}]$$

は退化アフィンヘッケ 環 と呼ばれる ([4],[5]).

注意 2.4.4. 退化アフィンヘッケ環加群の圏から, ホップ代数ヤンギアン $Y(\mathfrak{sl}_m)$ のウエイト N の加群の圏への, Drinfel'd による関手があり, $N \leq m$ ならば, それは圏同値を与えることが知られている ([4] 参照).

以下では特に断りのない限り N は固定された自然数である. N を明示する時には $\mathcal{H}_N$ などと書く.

次は簡単に確かめられる.

命題 2.4.5.

(1) 元 $w \in W$ と $\xi \in \mathfrak{t}'$ に対し, 次が成立する:

$$\xi \cdot w = w \left(\cdot w^{-1}(\xi) + \sum_{\alpha \in S(w)} w(\alpha)(\xi) s_\alpha \right).$$

(2) 元 $p \in S[\mathfrak{t}']$ と $i = 0, \ldots, N-1$ に対し, 次が成立する:

$$p \cdot s_i - s_i(p) \cdot s_i = -\triangle_i(p).$$

ここで, $\triangle_i(p) = \frac{1}{\alpha_i^\vee}(p - s_i(p)) \in S[\mathfrak{t}']$.

注意 2.4.6. 上の命題 (2) により, $S(\mathfrak{t})$ を $S[\mathfrak{t}]$ の商体 として, $\mathcal{H}$ の定義を $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes_{S[\mathfrak{t}']} S(\mathfrak{t}') \cong \mathbb{C}[W] \otimes S(\mathfrak{t})$ まで自然に拡張できる.

命題 2.4.5 と注意 2.4.6 により, 次がわかる.

命題 2.4.7.
(1) 代数 $\mathcal{H}$ の中心 $Z(\mathcal{H})$ は $\mathbb{C}[c]$ に一致する.
(2) 代数 $\bar{\mathcal{H}}$ の中心 $Z(\bar{\mathcal{H}})$ は $S[\mathfrak{t}]^{\bar{W}}$ に一致する. ここで, $S[\mathfrak{t}]^{\bar{W}}$ は $S[\mathfrak{t}]$ の$\bar{W}$不変部分空間.

次は直接確かめられる.

命題 2.4.8. 代数 $\mathcal{H}$ は次で定義される $\mathbb{C}$ 代数に同型である: $\mathbb{C}$ ベクトル空間として,

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes \bar{\mathcal{H}} \otimes \mathbb{C}[c]$$

であり,

$$\begin{aligned}
&c \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}),\\
&w \cdot f \cdot w^{-1} = w(f) \ \left(w \in \bar{W},\, f \in \mathbb{C}[\bar{P}]\right),\\
&\left[\bar{\xi}, f\right] = c\,\partial_{\bar{\xi}}(f) + \textstyle\sum_{\bar{\alpha} \in \bar{R}_+} \bar{\alpha}(\bar{\xi}) \frac{(1-s_{\bar{\alpha}})(f)}{1-e^{-\bar{\alpha}}} \cdot s_{\bar{\alpha}} \ \left(\bar{\xi} \in \bar{\mathfrak{t}},\, f \in \mathbb{C}[\bar{P}]\right).
\end{aligned}$$

ここで, $\partial_{\bar{\xi}} \cdot e^{\bar{\eta}} = \bar{\eta}(\bar{\xi})e^{\bar{\eta}}$ $(\xi \in \bar{\mathfrak{t}},\ \bar{\eta} \in \bar{P})$. さらに自然な包含写像 $\mathbb{C}[\bar{P}] \hookrightarrow \mathcal{H}$, $\bar{\mathcal{H}} \hookrightarrow \mathcal{H}$ $\mathbb{C}[c] \hookrightarrow \mathcal{H}$ は代数の準同型.

注意 2.4.9. $\kappa \in \mathbb{C}^*$として、

$$D_{\bar{\xi}} = \kappa\partial_{\bar{\xi}} - \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{R}_+} \frac{\bar{\alpha}(\bar{\xi})}{1-e^{-\bar{\alpha}}}(s_{\bar{\alpha}} - 1) - \rho(\bar{\xi})$$

($\rho = \frac{1}{2}\sum_{\bar{\alpha} \in \bar{R}_+} \bar{\alpha}$) をチェレドニク・ダンクル作用素とした時, 写像

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathbb{C}[\bar{P}]) & & \\
\bar{\xi} & \longmapsto & D_{\bar{\xi}} & & (\bar{\xi} \in \bar{\mathfrak{t}}) \\
s_{ij}(:= s_{\bar{\alpha}_{ij}}) & \longmapsto & (z_i \leftrightarrow z_j) & & \\
f & \longmapsto & f\cdot & & (f \in \mathbb{C}[\bar{P}]) \\
c & \longmapsto & \kappa\mathrm{id} & &
\end{array}$$

は $\mathcal{H}$ の表現を与えている.

2.5. この節では, 表現の解析の上で有用な纏わり作用素[4]と呼ばれる量を導入する
$\mathcal{H}$ 加群 V と $\zeta \in (\mathfrak{t}')^*$ に対して, ウエイト ζ の ($S[\mathfrak{t}']$ に関する) ウエイト空間を $V_\zeta = \{v \in V \,|\, \xi \cdot v = \zeta(\xi)v \text{ for } \xi \in \mathfrak{t}'\}$ で定義し, V_ζ の元 v をウエイトベクトルと呼ぶ.
ここで,

$$\begin{aligned}
&\varphi_i = 1 + s_i\alpha_i^\vee \in \mathcal{H}\ (i \in \{0, \ldots, N-1\} \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),\\
&\varphi_\pi = \pi \in \mathcal{H}
\end{aligned}$$

[4]intertwining operator

を定める. すると, $\xi \in \mathfrak{t}'$, $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し

$$\varphi_i \cdot \xi = s_i(\xi) \cdot \varphi_i \tag{2}$$

が成立する. さらに, 次が確かめられる.

命題 2.5.1.

$$\begin{aligned}
&\varphi_i \cdot \varphi_{i+1} \cdot \varphi_i = \varphi_{i+1} \cdot \varphi_i \cdot \varphi_{i+1} \ (i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),\\
&\varphi_i \cdot \varphi_j = \varphi_j \cdot \varphi_j \ \ (i - j \neq \pm 1 \bmod N),\\
&\varphi_\pi \cdot \varphi_i = \varphi_{i+1} \cdot \varphi_\pi \ (i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),\\
&\varphi_i^2 = 1 - \alpha_i^{\vee 2} \ (i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

よって, $w = \pi^k \cdot s_{j_1} \cdots s_{j_l} \in W$ (最短表示) に対して,

$$\varphi_w = \varphi_\pi^k \cdot \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_l} \in \mathcal{H},$$

を w の最短表示によらず定義することができる. また, 式 (2) により,

$$\varphi_w \cdot \xi = w(\xi) \cdot \varphi_w \ \ (w \in W, \xi \in \mathfrak{t}') \tag{3}$$

が成立する. 従って,

命題 2.5.2. $\mathcal{H}$ 加群 V, $\zeta \in (\mathfrak{t}')^*$, $w \in W$ に対し, $v \in V_\zeta$ ならば, $\varphi_w \cdot v \in V_{w(\zeta)}$ となる.

元 φ_w は (ウエイト空間の) 纏わり作用素と呼ばれる.

命題 2.5.3. 元 $\zeta \in (\mathfrak{t}')^*$ と $w \in W$ に対し, ウエイト ζ のウエイト空間上で, 次が成立する:

(1)

$$\varphi_w = \left(\prod_{\alpha \in S(w)} \zeta(\alpha^\vee) \right) w + \sum_{x \prec w} c'_x x.$$

ここで, $c'_x \in \mathbb{C}$.

(2)

$$\varphi_{w^{-1}} \cdot \varphi_w = \prod_{\alpha \in S(w)} (1 - \zeta(\alpha^\vee)^2).$$

(1) は, $w = \pi^k s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_l}$ (最短表示) について,

$$S(w) = \{s_{j_l} \cdots s_{j_2}(\alpha_{j_1}),\ s_{j_l} \cdots s_{j_3}(\alpha_{j_2}), \ldots, \alpha_{j_l}\}$$

となることから従う. (2) は命題 2.5.1 の最後の式から従う. □

3. $\bar{\mathcal{H}}$ の表現の実現

3.1. 単純リー環 $\mathfrak{s}l_m(\mathbb{C})$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ で表し, $\bar{\mathfrak{h}}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ のカルタン部分代数, $(X,Y)_{\bar{\mathfrak{g}}} = \mathrm{tr}XY$ をキリング形式, $\bar{\mathfrak{h}}^*$ を $\bar{\mathfrak{h}}$ の双対空間とする. ここで, $(\bar{\mathfrak{t}}^{(m)})^* = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}\bar{\epsilon}_i^{(m)}$ を $\mathfrak{g}l_m(\mathbb{C})$ のカルタン部分環の双対空間とした時, $\bar{\mathfrak{h}}^*$ はその部分空間 $\left\{\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i\bar{\epsilon}_i^{(m)} \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0\right\}$ と同一視される ($(\bar{\mathfrak{t}}^{(m)})^*$ を前節までの $\bar{\mathfrak{t}}^*$ 混同されないよう注意).

以下混乱を避ける為, $\bar{\mathfrak{g}}$ のルート系を $R_{\bar{\mathfrak{g}}}$, 正ルートの集合を $R_{\bar{\mathfrak{g}}+}$ で表す. また, $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{h}} \oplus (\oplus_{a\in R_{\bar{\mathfrak{g}}}} \bar{\mathfrak{g}}_a)$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ のルート分解とし, ルートベクトル $\{E_a \in \bar{\mathfrak{g}}_a \mid a \in R_{\bar{\mathfrak{g}}}\}$ を $(E_a, E_{-a})_{\bar{\mathfrak{g}}} = 1$ となるように固定する. 単純コルートを $H_1,\ldots,H_{m-1} \in \bar{\mathfrak{h}}$ とし, $H^1,\ldots,H^{m-1}$ を内積 $(,)_{\bar{\mathfrak{g}}}$ に関する $\bar{\mathfrak{h}}$ の双対基底とする. 同型 $\bar{\mathfrak{h}} \cong \bar{\mathfrak{h}}^*$ の下に H^i は基本ウエイト $\bar{\Lambda}_i$ と同一視される. また, $\rho_{\bar{\mathfrak{g}}} = \frac{1}{2}\sum_{a\in R_{\bar{\mathfrak{g}}+}} a$ とする.

3.2. 次で, $\bar{\mathfrak{g}}$ の古典 r 行列を定義する.

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1} H_i \otimes H^i + \sum_{a\in R_{\bar{\mathfrak{g}}+}} E_a \otimes E_{-a} \in \bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}}. \tag{4}$$

定義より, $\{J_k\}_{k=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の基底, $\{J^k\}_{k=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}}$ をその双対基底として, $\Omega := \sum_{k=1}^{\dim\bar{\mathfrak{g}}} J_k \otimes J^k$ と置くと,

$$\Omega = \bar{r} + P(\bar{r}) \tag{5}$$

となる $(P(X\otimes Y) = Y \otimes X)$.

ここで, $x = \sum_k X_k \otimes Y_k$ $(X_k, Y_k \in \bar{\mathfrak{g}})$ に対して $x_{1,2} = x \otimes 1$, $x_{2,3} = 1 \otimes x$, $x_{1,3} = \sum_k X_k \otimes 1 \otimes Y_k$ と定める.

証明. **補題 3.2.1.** (古典ヤン・バクスター方程式)

次が成立する.

$$[\bar{r}_{1,2}, \bar{r}_{2,3}] + [\bar{r}_{1,3}, \bar{r}_{2,3}] + [\bar{r}_{1,2}, \bar{r}_{1,3}] = 0$$

3.3. 以下, $\bar{\mathfrak{g}}$ 左加群のなす圏を $\mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}})$, 有限次元左加群のなす部分圏を $\mathrm{Fin}(\bar{\mathfrak{g}})$ で表す. また, 整ウエイトの集合を $P_{\bar{\mathfrak{g}}}$, 支配的整ウエイトの集合を $P_{\bar{\mathfrak{g}}}{}^+$ で表す. ウエイト $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ に対し, $\bar{M}(\bar{\lambda})$ を $\bar{g}$ の最高ウエイト $\bar{\lambda}$ のヴァーマ加群, $\bar{M}^*(\bar{\lambda})$ を最低ウエイト$-\bar{\lambda}$ のヴァーマ加群とし, $V(\bar{\lambda})$, $V^*(\bar{\lambda})$ を各々の既約商加群とする. 特に, ベクトル表現 $V(\bar{\Lambda}_1) = \mathbb{C}^m$ を $V_\square$ で表す. また $\bar{\mathfrak{g}}$ 加群 V に対し, $(V)_{\bar{\lambda}}$ でウエイト $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ のウエイト空間を表す.

3.4. 今,

$$\bar{\mathcal{F}}(A,B) = (A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B)/\bar{\mathfrak{g}}(A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B) \qquad (A, B \in \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}})). \tag{6}$$

と置く. ここで, $A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B$ には $\bar{\mathfrak{g}}$ は対角型に作用している.

この時, $\bar{W}$ の $A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B$ への作用

$$\tau_2(w)(v_0 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \otimes v_{N+1}) = v_0 \otimes v_{w(1)} \otimes \cdots \otimes v_{w(N)} \otimes v_{N+1} \tag{7}$$

$(v_0 \in A, v_1, \ldots, v_N \in V_\square, v_{N+1} \in B)$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ の作用と可換の為, $\bar{\mathcal{F}}(A, B)$ は $\bar{W}$ 加群となるが, この作用も同じ記号 τ_2 を用いて表す.

3.5. さて $A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B$ 上の作用素 y_i $(i = 1, \ldots, N)$ を次で定義しよう.

$$y_i = \left\{ \sum_{0 \le j < i} \left(\imath_i \otimes \imath_j(\bar{r}) + \frac{1}{2m} \right) - \sum_{i < j \le N+1} \left(\imath_j \otimes \imath_i(\bar{r}) + \frac{1}{2m} \right) + \imath_i(\rho_{\bar{\mathfrak{g}}}^\vee) - \frac{1}{2m}(m^2 - N) \right\}.$$

ここで, $\imath_i(X) = \overbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}^{i} \otimes X \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$. すると, 補題 3.2.1 などにより次が成立する.

命題 3.5.1.

(1) 次は $\bar{\mathcal{H}}$ の $A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B$ $(A, B \in \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}}))$ 上の作用を定める.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\epsilon}_i^\vee & \longmapsto & y_i \\ w & \longmapsto & \tau_2(w). \end{array}$$

(2) 任意の $i = 1, \ldots, N$ に対して,

$$y_i \cdot \bar{\mathfrak{g}}(A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B) \subset \bar{\mathfrak{g}}(A \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes B) \qquad (A, B \in \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}})).$$

従って, 上の命題により, $\bar{\mathcal{H}}$ の表現 $\sigma : \bar{\mathcal{H}} \to \mathrm{End}\left(\bar{\mathcal{F}}(A, B)\right)$ が定まった.
ここで, 特に $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ について

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = \bar{\mathcal{F}}\left(L(\bar{\mu}), L^*(\bar{\lambda})\right), \qquad \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = \bar{\mathcal{F}}\left(M(\bar{\mu}), M^*(\bar{\lambda})\right)$$

と置く.

命題 3.5.2. ベクトル空間として

$$\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \cong (V_\square^{\otimes N})_{\bar{\lambda} - \bar{\mu}}$$

が成立する.

以下, $\mathrm{wt}(V_\square^{\otimes N})$ を $V_\square^{\otimes N}$ のウエイトの集合として, $\bar{\lambda} - \bar{\mu} \in \mathrm{wt}(V_\square^{\otimes N})$ を仮定する.

3.6. 支配的整ウエイト $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \bar{\epsilon}_i^{(m)}, \bar{\mu} = \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \bar{\epsilon}_i^{(m)}$ に対し, 次で箱の数が N 個の斜ヤング図形[5] $Y_{\bar{\mu}, \bar{\lambda}}$ を対応させよう.

$$Y_{\bar{\mu}, \bar{\lambda}} = \{\ (i, j) \in \mathbb{Q}^2 \mid i = 1, \ldots, m;\ j = \bar{\mu}_j + 1, \bar{\mu}_j + 2, \ldots, \bar{\lambda}_j + \frac{N}{m}\ \}. \tag{8}$$

($\bar{\lambda} - \bar{\mu} \in \mathrm{wt}(V_\square^{\otimes N})$ ならば, $\bar{\lambda}_j + \frac{N}{m} - \bar{\mu}_j \in \mathbb{Z}$ に注意).
また, 集合 $\mathcal{T}(Y_{\bar{\mu}, \bar{\lambda}})$ を $Y_{\bar{\mu}, \bar{\lambda}}$ 上の盤達の部分集合

$$\left\{ T : Y_{\bar{\mu}, \bar{\lambda}} \ni (i, j) \mapsto T(i, j) \in \{1, \ldots, N\},\ \text{全単射} \right\}$$

[5] skew Young diagram

とし, また, 標準盤の集合 $\mathcal{T}_s(Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}) = \Big\{T \in \mathcal{T}(Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}) \,|\, T(i,j) < T(i,j+1),\, T(i+1,j)\Big\}$ を定めておく.

集合 $\mathcal{T}(Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}})$ は, 対応

$$\begin{array}{rcl} \bar{W} & \cong & \mathcal{T}(Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}) \\ w & \mapsto & wT_0 : (i,j) \mapsto w\left(T_0(i,j)\right), \end{array}$$

で $\bar{W}$ と同一視できる. ここで T_0 は $T_0(i,j+1) = T_0(i,j)+1$ $((i,j),(i,j+1) \in Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}})$ なる $\mathcal{T}_s(Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}})$ の元である. 盤 $T \in \mathcal{T}(Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}})$ の逆像を w_T で表すことにする.

さて $\bar{\zeta}_{\bar{\mu},\bar{\lambda}} \in \bar{\mathfrak{t}}^*$ を

$$\bar{\zeta}_{\bar{\mu},\bar{\lambda}} = \sum_{(i,j)\in Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}} (j-i)\epsilon_{T_0(i,j)}. \tag{9}$$

で定義する.

また, ベクトル表現 $V_\square$ の標準基底を $\{u_i\}_{i=1,\dots,m}$, $v(\bar{\mu})$ を $\bar{M}(\bar{\mu})$ の最高ウエイトベクトル, $v(\bar{\lambda})^*$ を $\bar{\mathcal{M}}^*(\bar{\lambda})$ の最低ウエイトベクトル とし, $v(\bar{\mu}) \otimes V_\square^{\otimes N} \otimes V^*(\bar{\lambda})$ の元

$$v(\bar{\mu}) \otimes \overbrace{u_1 \otimes \cdots \otimes u_1}^{\beta_1} \otimes \overbrace{u_2 \otimes \cdots \otimes u_2}^{\beta_2} \otimes \cdots \otimes \overbrace{u_m \otimes \cdots \otimes u_m}^{\beta_m} \otimes v(\bar{\lambda})^* \tag{10}$$

の $\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$, $\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ での像を同じ記号 $v(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ で表すことにする. ここで, β_i は $Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}$ の i 行目の箱の数である.

以上の準備の下に, 次が計算により確かめられる.

命題 3.6.1. 元 $\bar{\xi} \in \bar{\mathfrak{t}}$ について,

$$\sigma(\bar{\xi}) \cdot v(\bar{\mu},\bar{\lambda}) = \bar{\zeta}_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}(\bar{\xi}) v(\bar{\mu},\bar{\lambda})$$

が成立する.

3.7. さて, $\sum_{i=1}^k N_k = N$ なる自然数 $N_1,\dots,N_k$ について代数の自然な埋め込み

$$\bar{\mathcal{H}}_{N_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\mathcal{H}}_{N_k} \longrightarrow \bar{\mathcal{H}}$$

$(\bar{\epsilon}_l^\vee, s_l \in \bar{\mathcal{H}}_j$ について $\bar{\epsilon}_l^\vee \mapsto \bar{\epsilon}^\vee_{l+\sum_{i=1}^{j-1} N_i}$, $s_l \mapsto s_{l+\sum_{i=1}^{j-1} N_i})$ があることに注意しよう.

次は容易に確かめられる.

命題 3.7.1.

$$\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu},\bar{\lambda}) \cong \bar{\mathcal{H}} \otimes_{\bar{\mathcal{H}}_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\mathcal{H}}_{\beta_m}} \mathbb{C}_{\bar{\zeta}_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}}.$$

ここで, $\mathbb{C}_{\bar{\zeta}_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}}$ は, $\bar{\xi} \in \bar{\mathfrak{t}}$ が $\bar{\zeta}_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}(\bar{\xi})\mathrm{id}$ で作用する 1 次元 $\bar{\mathcal{H}}_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\mathcal{H}}_{\beta_m}$ 加群である.

さらに, 命題 2.5.3 と命題 3.6.1 を合わせると次がわかる.

定理 3.7.2. $\bar{\mathcal{H}}$ 加群 $\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ $(\bar{\mu},\bar{\lambda}\in P_{\bar{\mathfrak{g}}}^{+})$ は既約であり, その基底は

$$\left\{\varphi_{w_T}\cdot v(\bar{\mu},\bar{\lambda})\,|\,T\in\mathcal{T}_s(Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}})\right\}$$

で与えられる.

注意 3.7.3.
(1) $\bar{\mathcal{H}}$ 加群 $\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ はスタンダード加群と呼ばれ ([6] 参照), $\bar{\mu},\bar{\lambda}\in P_{\bar{\mathfrak{g}}}^{+}$ の時, $\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ はその唯一の既約商加群である.
(2) 式 (5) などにより, $A\otimes V_{\Box}^{\otimes N}\otimes B$ 上で,

$$y_i\equiv\imath_0\otimes\imath_i(\Omega)+\textstyle\sum_{j<i}\tau_2(s_{ij})\qquad(\mathrm{mod}\ \bar{\mathfrak{g}}(A\otimes V_{\Box}^{\otimes N}\otimes B))\tag{11}$$

が成立する.
(3) 元 $\bar{\epsilon}_i^{\vee}\in\bar{\mathcal{H}}$ に対して上式の右辺を対応させて同様に $\bar{\mathcal{H}}$ を $V(\bar{\mu})\otimes V_{\Box}^{\otimes N}$ 上の表現を構成すると,

$$V(\bar{\mu})\otimes V_{\Box}^{\otimes N}\cong\bigoplus_{\bar{\lambda}\in P_{\bar{\mathfrak{g}}}^{+}}\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})\otimes V(\bar{\lambda})\tag{12}$$

となり, $\bar{\mathcal{H}}$ と $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ は互いに commutant となる. 特に, $\mu=0$ の場合, $\bar{\mathcal{V}}(0,\bar{\lambda})$ はヤング図形 $Y_{0,\lambda}$ に付随した $\bar{W}$ の既約表現となり、同型 (12) はワイルの相互律そのものとなる.
(4) 上で構成した $\bar{\mathcal{H}}$ の表現 $\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ $(\bar{\mu},\bar{\lambda}\in P_{\bar{\mathfrak{g}}}^{+})$ に Drinfel'd の関手 (注意 2.4.4 参照) を作用させてできるヤンギアンの表現は [7] で研究された tame 表現と一致するようである([8]).

3.8. $\mathrm{Mod}(\bar{\mathcal{H}})$ を $\bar{\mathcal{H}}$ の左加群のなす圏とし, $\mathrm{Tame}(\bar{\mathcal{H}})$ を $\bar{\mathfrak{t}}$ が半単純に作用する加群のなす部分圏とする. 定理 3.7.2 より $\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})\in\mathrm{Tame}(\bar{\mathcal{H}})$ である.
ここで, $\bar{\mathcal{H}}$ の表現空間 V に対し, 表現 V_a $(a\in\mathbb{C})$ を自己同型

$$\begin{array}{ccc}\bar{\mathcal{H}}&\longrightarrow&\bar{\mathcal{H}}\\ \bar{\epsilon}_i^{\vee}&\longmapsto&\bar{\epsilon}_i^{\vee}+a\\ w&\longmapsto&w\end{array}$$

の引き戻しにより定義する.
すると, 定理 3.7.2 と [9] の結果を合わせると次が成立する.

定理 3.8.1. 任意の既約な $\bar{\mathcal{H}}$ 加群 $V\in\mathrm{Tame}(\bar{\mathcal{H}})$ は次の形の $\bar{\mathcal{H}}$ 加群に同型.

$$\bar{\mathcal{H}}\otimes_{\bar{\mathcal{H}}_{N_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\mathcal{H}}_{N_k}}\left(\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu}^{(1)},\bar{\lambda}^{(1)})_{a_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu}^{(k)},\bar{\lambda}^{(k)})_{a_k}\right).$$

ここで, $\bar{\lambda}^{(i)}-\bar{\mu}^{(i)}\in\mathrm{wt}(V_{\Box}^{\otimes N_i})$, $a_i\in\mathbb{C}$ かつ $a_i-a_j\notin\mathbb{Z}$.

3.9. 前節までで, 我々は双関手

$$\begin{array}{rccc} \bar{\mathcal{F}}: & \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}}) \times \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}}) & \to & \mathrm{Mod}(\bar{\mathcal{H}}) \\ & \cup & & \cup \\ & \mathrm{Fin}(\bar{\mathfrak{g}}) \times \mathrm{Fin}(\bar{\mathfrak{g}}) & \to & \mathrm{Tame}(\bar{\mathcal{H}}) \end{array}$$

を構成した. ここで, $\bar{\mu} \in P_{\bar{\mathfrak{g}}}^{+}$ を固定して次の関手 $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mu}}$ を定める.

$$\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mu}}(A) := \bar{\mathcal{F}}(\bar{M}(\bar{\mu}), A) \qquad (A \in \mathrm{Mod}(\bar{\mathfrak{g}})).$$

この時

命題 3.9.1. 支配的整ウエイト $\bar{\mu}, \bar{\lambda}$ に対し,

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = \bar{\mathcal{F}}_{\mu}(V^{*}(\bar{\lambda}))$$

が成立する.

また, 定義より, $\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = \bar{\mathcal{F}}_{\mu}(M^{*}(\bar{\lambda}))$ である. さて, 次を示すことができる.

定理 3.9.2. 支配的整ウエイト $\bar{\mu}$ に対し, $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mu}}$ は完全関手.

今,

$$\bar{X}^{*}(\bar{\lambda}) : 0 \leftarrow V^{*}(\bar{\lambda}) \leftarrow \bar{C}_0 \leftarrow \bar{C}_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \bar{C}_{\frac{m(m-1)}{2}} \leftarrow 0 \tag{13}$$

を $V^{*}(\bar{\lambda})$ の BGG 完全列とする. ここで, $\bar{C}_i = \bigoplus_{\substack{w \in W_{\bar{\mathfrak{g}}} \\ l(w)=i}} \bar{M}^{*}(w \cdot \lambda)$, $W_{\bar{\mathfrak{g}}}$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ のワイル群, $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho_{\bar{\mathfrak{g}}}) - \rho_{\bar{\mathfrak{g}}}$.

系 **3.9.3.** 支配的整ウエイト $\bar{\mu}, \bar{\lambda}$ に対し, $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mu}}(\bar{X}^{*}(\bar{\lambda}))$ は完全列. 特に, $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\mu}}(\bar{X}^{*}(\bar{\lambda}))$ は, $\bar{\mathcal{H}}$ 加群 $\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ のスタンダード加群による resolution を与える.

4. アフィン化=ダブル化

前節の双関手の構成をダブル化(あるいはアフィン化) することを考える. 有限次元リー環 $\bar{\mathfrak{g}}$ のベクトル表現 $V_{\square}$を, 対応するアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ のレベル 0 の表現 $\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes V_{\square}$ で置き代えて, $\mathfrak{g}$ 加群 A, Bに対して, テンソル積 $M := A \otimes \left(\otimes_{i=1}^{N} \left(\mathbb{C}[z_i, z_i^{-1}] \otimes V_{\square} \right) \right) \otimes B$ の商空間

$$\mathcal{F}(A, B) = M / \mathfrak{g}' M$$

($\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) を考える. 共型場理論において現れる, クニツニク・ツァモロチコフ接続 (KZ 接続) と呼ばれる作用素と, チェレドニク・ダンクル作用素を組み合わせることにより, この空間上には, 退化ダブルアフィンヘッケ環 $\mathcal{H}$の作用が定義できることが示される.

4.1. リー環 $\bar{\mathfrak{g}}$ に付随したアフィンリー環を $\mathfrak{g}$ と書く: $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d_{\mathfrak{g}}$. ここで, $c_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の中心の元で, $d_{\mathfrak{g}}$ は次数作用素 $([d_{\mathfrak{g}}, X \otimes t^n] = nX \otimes t^n)$ であり, このとき, $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c_{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数である. $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ を $\mathfrak{g}$ の三角分解とする. また, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bar{\mathfrak{g}} \otimes [t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c_{\mathfrak{g}}$ とおく. $\mathfrak{g}$ の普遍古典 r 行列と呼ばれる元を次で定義する:

$$r = \bar{r} + \frac{1}{2}(d_{\mathfrak{g}} \otimes c_{\mathfrak{g}} + c_{\mathfrak{g}} \otimes d_{\mathfrak{g}}) + \sum_{k=1}^{\dim \bar{\mathfrak{g}}} \sum_{n \geq 1} (J_k \otimes t^n) \otimes (J^k \otimes t^{-n}). \tag{14}$$

ここで, $\bar{r}$ は式 (4) で与えられる $\bar{\mathfrak{g}}$ の古典 r 行列である.

$\mathfrak{g}$ 加群 M に対し, $\mathfrak{g}$ の中心 $c_{\mathfrak{g}}$ が M 上, 定数 ℓ で作用する時, M をレベル ℓ の加群と呼ぶ. $\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes V_{\Box}$ には, $X \otimes f(t) \mapsto f(z) \otimes X$, $d_{\mathfrak{g}} \mapsto z\frac{\partial}{\partial z} \otimes id$ により, $\mathfrak{g}$ がレベル 0 で作用する. $\mathbb{C}[\bar{P}] = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_N^{\pm N}]$ と同一視していたので, テンソル積を $\otimes_{i=1}^N \left(\mathbb{C}[z_i, z_i^{-1}] \otimes V_{\Box}\right) = \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\Box}^{\otimes N}$ と書くことにする. この空間を対角作用により $\mathfrak{g}$ 加群とみなす.

以下, 複素数 ℓ をひとつ固定し, $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(\ell)$(及び $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}{}^*(\ell)$) を, 有限生成レベル $\ell(-\ell)$ $\mathfrak{g}$ 加群で, $\mathfrak{n}_+(\mathfrak{n}_-)$ 局所有限, かつ, $\mathfrak{h}$ に関し有限次元ウエイト分解を持つものを対象とする $\mathfrak{g}$ 加群の圏とする. レベル ℓ ウエイトの集合を $\mathfrak{h}^*(\ell) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid h(c_{\mathfrak{g}}) = \ell\}$ とすると, $\lambda \in \mathfrak{h}^*(\ell)$ に対し, 最高ウエイト λ を持つ左ヴァーマ加群 $M(\lambda)$ 及び, 最低ウエイト $-\lambda$ を持つ左ヴァーマ加群 $M^*(\lambda)$ などは, それぞれ $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(\ell)$ 及び $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}{}^*(\ell)$ の対象である. レベル ℓ の支配的整ウエイトの集合を $P_{\mathfrak{g}}{}^+(\ell)$ と書く. ℓ が非負整数でない限り $P_{\mathfrak{g}}{}^+(\ell)$ は空集合である.

4.2. $\mathfrak{g}$ 加群 $A \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(\ell)$ 及び $B \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}{}^*(\ell)$ に対して, 空間

$$\mathcal{F}(A, B) = A \otimes \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\Box}^{\otimes N} \otimes B / \mathfrak{g}' \left(A \otimes \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\Box}^{\otimes N} \otimes B\right) \tag{15}$$

上に, 退化ダブルアフィンヘッケ環 $\mathcal{H}$ の作用を定義することが当面の目標である. 最初に, $\mathcal{H}$ の部分代数であるアフィンワイル群 $\mathbb{C}[W] = \mathbb{C}[\bar{W}] \otimes \mathbb{C}[\bar{P}]$ の作用を与える: $\mathbb{C}[\bar{P}]$ には, 変数の入れ換えにより, $\bar{W}$ が自然に作用する. この作用を τ_1 で表す. 一方, $V_{\Box}^{\otimes N}$ 上にも $\bar{W}$ の作用 τ_2 があったことを思い出して (式 (7)), $A \otimes \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\Box}^{\otimes N} \otimes B$ 上の $\bar{W}$ の作用を, $\tau = \mathrm{id}_A \otimes (\tau_1 \otimes \tau_2) \otimes \mathrm{id}_B$ で定めることにする. また, $\mathbb{C}[\bar{P}]$ はかけ算で自然に, $A \otimes \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\Box}^{\otimes N} \otimes B$ に作用する. このとき, これらの $\bar{W}$ と $\mathbb{C}[\bar{P}]$ の作用は, $\mathfrak{g}$ の作用と可換になり, $\mathcal{F}(A, B)$ 上の $\mathbb{C}[W]$ の作用を与えることが分かる. 従って, $\mathcal{H} = \mathbb{C}[W] \otimes S[\mathbf{t}']$ に注意すると, $\mathcal{F}(A, B)$ 上に $\mathcal{H}$ を作用を定めるためには, $S[\mathbf{t}']$ の作用を与えれば良いことになる.

4.3. $\mathfrak{g}$ の古典 r 行列を用いて KZ 接続を導入する. KZ 接続自身は $\mathcal{F}(A, B)$ には作用しないので, 一旦, 考える空間を広げておく必要がある. 多様体

$$X = (\mathbb{C}^*)^N \setminus \{\text{ ある } i \neq j \text{ に対して } z_i = z_j\} \tag{16}$$

を考え, $\mathcal{R}(X)$ を X 上の正則関数のなす環とする. $\mathbb{C}[\bar{P}] \subset \mathcal{R}(X)$ とみなし, $\mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\Box}^{\otimes N}$ 上の $\mathfrak{g}$ の作用を自然に $\mathcal{R}(X) \otimes V_{\Box}^{\otimes N}$ 上に拡張しておく. $\mathcal{F}(A, B)$ の場合と同様にし

て, 変数の入れ換えにより $A\otimes\mathcal{R}(X)\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B/\mathfrak{g}$ 上にも, $\mathbb{C}[W]$ の作用が定義される. 写像 $\imath_j:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^{\otimes(N+2)}$を前と同様に $j+1$ 番目の成分への埋め込みとし, 次のような $A\otimes\mathcal{R}(X)\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B/\mathfrak{g}$ 上の作用素を考える:

$$r_{(0,i)}=\imath_0\otimes\imath_i(r),\ r_{(i,N+1)}=\imath_i\otimes\imath_{N+1}(r)\quad(1\le i\le N),\tag{17}$$

$$r_{(i,j)}=\imath_i\otimes\imath_j(\bar{r})+\frac{z_i/z_j}{1-z_i/z_j}\imath_i\otimes\imath_j(\Omega)\qquad(1\le i<j\le N).\tag{18}$$

領域 $\{|z_i|<|z_j|\}$ では, 形式的に $r_{(i,j)}=\imath_i\otimes\imath_j(r)$ が, 成り立っていることに注意しておく. 各 $i=1,\dots,N$に対して, KZ 接続 $\nabla_i\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A\otimes\mathcal{R}(X)\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B)$ を

$$\nabla_i=\sum_{j=0}^{i-1}r_{(j,i)}-\sum_{j=i+1}^{N+1}r_{(i,j)}+\imath_i\left(m\cdot d_{\mathfrak{g}}+\rho_{\bar{\mathfrak{g}}}\right)\tag{19}$$

で定める. 普遍古典r行列の性質 ([10] 参照) より導かれる次の命題4.3.1及び命題 4.3.2 は, 共型場理論においても重要な役割を果たす ([2]):

命題 4.3.1. 次が成り立つ:

$$[\nabla_i,\nabla_j]=0\qquad(1\le i,j\le N),\tag{20}$$
$$\tau(w)\nabla_i\tau(w^{-1})=\nabla_{w(i)}\quad(w\in\bar{W}),\tag{21}$$
$$[\nabla_i,f]=(\ell+m)\partial_i f\quad(f\in\mathbb{C}[P]).\tag{22}$$

命題 4.3.2. KZ 接続 ∇_i $(i=1,\dots,N)$ は部分空間 $\mathfrak{g}'(A\otimes\mathcal{R}(X)\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B)$ を保つ:

$$\nabla_i\mathfrak{g}'(A\otimes\mathcal{R}(X)\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B)\subset\mathfrak{g}'(A\otimes\mathcal{R}(X)\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B).\tag{23}$$

4.4. 複素数$\kappa\neq0$ 及び, 各$\bar{\xi}\in\bar{\mathfrak{t}}'$ に対して $\mathbb{C}[\bar{P}]$(または $\mathcal{R}(X)$) 上のチェレドニク・ダンクル作用素 $D_{\bar{\xi}}$ は,

$$D_{\bar{\xi}}=\kappa\partial_{\bar{\xi}}+\sum_{\bar{\alpha}\in\bar{R}_+}\bar{\alpha}(\bar{\xi})\frac{1-\tau_2(s_{\bar{\alpha}})}{1-e^{-\bar{\alpha}}}-\rho(\bar{\xi})\tag{24}$$

で定義されていた (注意 2.4.9). 今,

$$\mathcal{D}_{\bar{\xi}}=\nabla_{\bar{\xi}}+\sum_{\bar{\alpha}\in\bar{R}_+}\bar{\alpha}(\bar{\xi})\frac{1-\tau(s_{\bar{\alpha}})}{1-e^{-\bar{\alpha}}}-\rho(\bar{\xi})-\frac{1}{2m}\Big((m-1)\partial_{\bar{\xi}}\mathrm{log}G+m^2-N\Big)\tag{25}$$

なる, $A\otimes\mathcal{R}(X)\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B$上の作用素を考える. ここで, $\nabla_{\bar{\xi}}=\sum_{i=1}^N(\bar{\xi},\bar{\epsilon}_i)\nabla_i$, また, $G=\Pi_{\bar{\alpha}\in R}(1-e^{\bar{\alpha}})\in\mathbb{C}[\bar{P}]$ である. 直接計算により, 次が示せる.

命題 4.4.1. 作用素 $\mathcal{D}_{\bar{\xi}}$ は $A\otimes\mathbb{C}[\bar{P}]\otimes V_\square^{\otimes N}\otimes B$ を保つ.

最後の項を除くと, 作用素 $\mathcal{D}_{\bar{\xi}}$は, $D_{\bar{\xi}}$の定義式 (24) の右辺において, $\kappa\partial_{\bar{\xi}}\mapsto\nabla$, $\tau_2\mapsto\tau$ と, それぞれ置き代えたものである. 命題 4.3.1 により, $\nabla_{\bar{\xi}}$, $\tau(w)$ 及び f は, $\kappa\partial_{\bar{\xi}}$, $\tau_2(w)$ 及び fと同じ関係式を持つことから, 直ちに次の命題が従う.

命題 4.4.2. 対応

$$\begin{array}{llll} \bar{\xi} & \mapsto & \mathcal{D}_{\bar{\xi}} & (\bar{\xi} \in \bar{\mathfrak{t}}') \\ w & \mapsto & \tau(w) & (w \in \bar{W}) \\ f & \mapsto & f & (f \in \mathbb{C}[P]) \\ c & \mapsto & \ell + m & \end{array} \tag{26}$$

は, $A \otimes \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\square}^{\otimes N} \otimes B$上の退化ダブルアフィンヘッケ環 $\mathcal{H}$の表現を定める.

最後に, 命題 4.3.2 により, 次の定理を得る.

定理 4.4.3. 命題 4.4.2で定義された $\mathcal{H}$ の作用に関して, 部分空間 $\mathfrak{g}'(A \otimes \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes V_{\square}^{\otimes N} \otimes B)$ は $\mathcal{H}$部分加群. 従って, この表現は $\mathcal{F}(A, B)$ 上の $\mathcal{H}$の表現を誘導する.

複素数$\kappa \neq 0$ に対して, 商代数 $\mathcal{H}(\kappa) = \mathcal{H}/\langle c = \kappa \rangle$ (注意 2.4.2) を考え, $\mathcal{H}(\kappa)$ 加群の圏を $\mathrm{Mod}\,(\mathcal{H}(\kappa))$ と書く. $\mathcal{H}(\kappa)$ 加群を考えることと, 中心 $c \in Z(\mathcal{H})$ が定数$\kappa \in \mathbb{C}^*$ で作用する $\mathcal{H}$加群を考えることは同値なので, 以下では両者を同一視する. 定理 4.4.3 から, 双関手

$$\mathcal{F} : \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(\ell) \times \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}{}^*(\ell) \to \mathrm{Mod}\,(\mathcal{H}(\ell + m)) \tag{27}$$

が得られることが分かる.

4.5. $\mathfrak{g}$ のウエイト$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*(\ell)$ に対し,

$$\mathcal{M}(\mu, \lambda) = \mathcal{F}(M(\lambda), M^*(\mu)), \quad \mathcal{V}(\mu, \lambda) = \mathcal{F}(L(\lambda), L^*(\mu)) \tag{28}$$

と, おいて, これらの空間の $\mathcal{H}$加群としての構造を調べることを目標とする. ここで $L(\lambda), L^*(\lambda)$ は, それぞれ,$M(\lambda), M^*(\lambda)$ の既約商加群を表す.

$\mathfrak{g}$ のウエイトλに対して, その古典部分$\bar{\lambda}$を, $\bar{\lambda} = \lambda|_{\bar{\mathfrak{h}}} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ で定義する. 簡単な考察と命題??により次を得る.

命題 4.5.1. $\mathfrak{g}$ のウエイトλ, μ に対して $\mathcal{H}(\kappa)$ 加群として

$$\mathcal{M}(\mu, \lambda) \cong \mathcal{H}(\kappa) \otimes_{\bar{\mathcal{H}}} \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \cong \mathcal{H}(\kappa) \otimes_{\bar{\mathcal{H}}_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\mathcal{H}}_{\beta_m}} \mathbb{C}_{\bar{\zeta}_{\bar{\mu}, \bar{\lambda}}} \tag{29}$$

ここで, $\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ は$\bar{\mathcal{H}}$のスタンダード加群, $(\beta_1 \ldots, \beta_m)$ は$\bar{\lambda}, \bar{\mu}$の定める Nの分割.

この命題と, 命題 3.5.2を合わせると, 特に, ベクトル空間として

$$\mathcal{M}(\mu, \lambda) \cong \mathbb{C}[\bar{P}] \otimes (V_{\square}^{\otimes N})_{\bar{\lambda} - \bar{\mu}} \tag{30}$$

が成り立つことも分かる. $\mathcal{H}$加群 $\mathcal{M}(\mu, \lambda)$ を, $\mathcal{H}$のスタンダード加群と呼ぶことにする. ウエイトの対λ, μ が 適当な意味で generic な場合には, $\mathcal{M}(\mu, \lambda) = \mathcal{V}(\mu, \lambda)$ となり, 定理 3.7.2と同様にして, $\mathcal{M}(\mu, \lambda)$ は $\mathcal{H}$加群として, 既約になることが示される. しかし, 例えば, λ, μとして支配的整ウエイトをとると, 一般には generic な場合から外れ, 既約性がくずれる. そこで, そのような場合に, どのようにして, スタンダード加群から, 既約加群を取り出すか, ということが問題になる. 注意 3.7.3によれば, $\bar{\mathcal{H}}$のス

タンダード加群$\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ は唯一の既約商加群として$\bar{\mathcal{V}}(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ を持つのであった. 我々は, $\mathcal{M}(\mu,\lambda)$ の場合も, $\mathcal{V}(\mu,\lambda)$ がその既約商加群を与えていると期待している:

予想 4.5.2. 支配的整ウエイト$\lambda,\mu \in P_{\mathfrak{g}}{}^{+}(\ell)$ に対して, $\mathcal{V}(\mu,\lambda)$ は$\mathcal{H}$加群として既約.

そこで, $\mathcal{V}(\mu,\lambda)$ の構造を調べることが必要になるわけであるが, そのための一つの手段として, $\mathcal{V}(\mu,\lambda)$ の スタンダード加群による resolution を構成することを考えよう. まず, 命題3.9.1のアフィン版として,

命題 4.5.3. $\lambda,\mu \in P_{\mathfrak{g}}{}^{+}(\ell)$ の時, $\mathcal{H}$加群として

$$\mathcal{V}(\mu,\lambda) \cong \mathcal{F}(L(\mu), M^*(\lambda)) \cong \mathcal{F}(M(\mu), L^*(\lambda)). \tag{31}$$

が示されるので, 関手 $\mathcal{F}_\mu : \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}{}^*(\ell) \to \mathrm{Mod}_{\ell+m}(\mathcal{H})$ を, $\mathcal{F}_\mu(B) = \mathcal{F}(M(\mu), B)$ で定義すると,

$$\mathcal{F}_\mu(M^*(\lambda)) = \mathcal{M}(\mu,\lambda), \quad \mathcal{F}_\mu(L^*(\lambda)) = \mathcal{V}(\mu,\lambda) \tag{32}$$

となる. 同じく系 3.9.3 のアフィン版として,

予想 4.5.4. 支配的整ウエイト$\lambda,\mu \in P_{\mathfrak{g}}{}^{+}(\ell)$ に対して, $L^*(\lambda)$ のBGG 完全列に, 関手$\mathcal{F}_\mu$をほどこして得られる $\mathcal{H}$加群の復体は完全.

が期待される.

4.6. 最後に, 2.5節で導入した$\mathcal{H}$の纏わり作用素の応用と, 予想4.5.4の帰結について簡単に述べる. $\bar{W}$加群 Vに対して, その対称部分空間を $V^{\bar{W}} := \{ v \in V \mid w(v) = v \ \forall w \in \bar{W} \}$ で定める. $\mathcal{H}$加群 (従って$\bar{\mathcal{H}}$加群) の対称部分空間には, $\bar{\mathcal{H}}^{\bar{W}} = S[\bar{\mathfrak{t}}]^{\bar{W}}$ が作用している. 最初に, チェレドニク・ダンクル作用素で定義される $\mathcal{H}(\kappa)$ 加群 $\mathbb{C}[\bar{P}]$(注意2.4.9参照) を考える. これは, 我々の構成した $\mathcal{H}$加群 $\mathcal{M}(\mu,\lambda)$ において, $\bar{\lambda}_0 = N\bar{\Lambda}_1, \bar{\mu}_0 = 0$ なる$\lambda_0,\mu_0 \in \mathfrak{h}^*(\ell)$ をとった場合に相当する: $\mathcal{M}(\mu_0,\lambda_0) \cong \mathbb{C}[\bar{P}]$ [6] (ただし$\kappa = \ell + m$). $S[\bar{\mathfrak{t}}]^{\bar{W}}$ の元は, 対称部分空間 $\mathbb{C}[\bar{P}]^{\bar{W}}$上では, ある微分作用素と等価になり, $S[\bar{\mathfrak{t}}]^{\bar{W}}$に対応する, 微分作用素の族の作用に関する同時固有関数達は, $\mathbb{C}[\bar{P}]^{\bar{W}}$ の基底をなし, 対称ジャック多項式と呼ばれる. これは次のように記述することができる:

$$\mathbb{C}[\bar{P}]^{\bar{W}} = \bigoplus_{\eta \in \bar{P}^-} \mathbb{C}Q_+(\varphi_{t_\eta} 1). \tag{33}$$

ここで, $\bar{P}^-$は, 反支配的整ウエイトの集合で, $Q_+ = \sum_{w\in\bar{W}} w$ は対称化作用素である. 各 $Q_+(\varphi_{t_\eta}1)$ が同時固有関数になっていることは, $\varphi_{t_\eta}1$ が $S[\bar{\mathfrak{t}}]$ のウエイトベクトルになっていることから明らかであるから, これらは, ジャック多項式に他ならない.

一般の $\mathcal{M}(\lambda,\mu)$ に対して表示 (33) の一般化を考えよう. 以下, $\bar{\lambda} - \bar{\mu} \in \mathrm{wt}(V_{\square}^{\otimes N})$ なる $\mathfrak{g}$ のウエイトμ,λを固定し, その古典部分$\bar{\lambda},\bar{\mu}$ の定める斜ヤング図形 $Y_{\bar{\mu},\bar{\lambda}}$ 及びそれ

[6]正確には, ある定数 Cによってチェレドニク・ダンクル作用素を $D'_\xi = D_i + C$ $(i = 1,\ldots,N)$ とずらした作用で同型になる.

に付随した Nの分割$\beta(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ を, それぞれ単に, $Y, \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ と書く. 式 (30) より, $\mathcal{M}(\mu,\lambda)$ の対称部分空間 $\mathcal{M}(\mu,\lambda)^{\bar{W}}$ について次の同型が成立する:

$$\mathcal{M}(\mu,\lambda)^{\bar{W}} \cong \mathbb{C}[\bar{P}]^{\bar{W}_\beta} \cong \mathbb{C}[\bar{P}_{\beta_1}]^{\bar{W}_{\beta_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[\bar{P}_{\beta_m}]^{\bar{W}_{\beta_m}} \tag{34}$$

ただし $\mathbb{C}[\bar{P}_{\beta_k}] = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{\beta_k}]$. 従って, この空間 $\mathbb{C}[\bar{P}]^{\bar{W}_\beta}$上において, 作用素の族 $S[\bar{\mathfrak{t}}]^{\bar{W}}$ に関する同時固有関数達が纏わり作用素で書けるか, そしてそれらが, $\mathbb{C}[\bar{P}]^{\bar{W}_\beta}$ を張るか, ということを問題にするわけである. ウエイトλ,μが generic の場合には, 式 (33) と同様にして, 纏わり作用素による記述

$$\mathcal{M}(\mu,\lambda)^{\bar{W}} = \bigoplus_{\eta\in\bar{P}^-} \bigoplus_{T\in\mathcal{T}(Y)} \mathbb{C}Q_+(\varphi_{t_\eta\sigma_T} v(\mu,\lambda)). \tag{35}$$

が得られる. ここで, $v(\mu,\lambda)$ は式 (10) と同様に定義される $\mathcal{M}(\mu,\lambda)$ のウエイトベクトルであり, σ_Tは$T \in \mathcal{T}(Y)$ に対して定まるあるアフィンワイル群の元であるが, 紙面の都合上, 正確な定義はここでは省略する. 次に, λ,μが支配的整ウエイトで $\mathcal{M}(\mu,\lambda)$ が既約でなくなるような場合を考えよう. この場合, もはや$\mathcal{M}(\mu,\lambda)^{\bar{W}}$に対して式 (33) のような記述を得るのは難しいようである. しかし, 商加群 $\mathcal{V}(\mu,\lambda)$ の対称部分空間については, 予想4.5.4の仮定のもとで, やはり次のような記述を持つことが示せる:

$$\mathcal{V}(\mu,\lambda)^{\bar{W}} = \bigoplus_{\eta\in\bar{P}^-} \bigoplus_{T\in\mathcal{T}_s^{(\ell)}(Y)} \mathbb{C}Q_+(\varphi_{t_\eta\sigma_T} v(\mu,\lambda)). \tag{36}$$

ここで, $\mathcal{T}_s^{(\ell)}(Y)$ は $\mathcal{T}_s(Y)$ のある部分集合である.

References

1. . Cherednik, *Elliptic Quantum Many-Body Problem and Double Affine Kniznik-Zamolodohikov Equation*, Commun. Math. Phys., 169 (1995), 441-461.
2. A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Vertex Operators in Conformal Field Theory on $\mathbb{P}^1$ and Monodoromy Representations of Braid Group*, Adv. Stud. in Pure. Math., 16 (1988), 297-372.
3. E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representation of graded Hecke algebras*, Acta. Math. , 175 (1995), 75-121.
4. V. G. Drinfel'd, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangian*, Funct. Anal. Appl., 20 (1986), 58-60.
5. G. Lustig, *Affine Hecke algebras and thier graded version*, J. Amer. Math. Soc., 2 (1989), 599-685.
6. J. D. Rogawski, *On modules over the Hecke Algebra of a p-adic group*, Invent. math. , 79 (1985), 443-465.
7. M.Nazarov and V. Tarasov, *Representations of Yangians with Gelfand-Zetlin bases*, preprint, 1994.
8. H. Inubushi, Yandigian $Y(\mathfrak{gl}_N)$ とその表現, 修士論文, Nagoya university, 1997.
9. I. Cherednik, *Special Basis of Irreducible Representations of a Degenerate Affine Hecke Algebra*, Func. Anal. Appl., 20:1 (1986), 87-89.
10. V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge Univ. Press.,Cambridge, 1994.