数理解析研究所講究録
997巻 1997年 206-212

曲面上のコード・ダイアグラムのなすポワソン代数の量子化

東大M2　柳沢　韻 (Yanagisawa Hibiki)

1. 量子化

Lie代数Pが可換な積をもち、Leibniz則
$\{ab, c\} = \{a, c\}b + a\{b, c\}$ をみたすとき、PをPoisson代数という。Poisson代数Pの量子化は、Pの非可換な拡大である。

定義　$\mathbb{C}$上のPoisson代数Pの量子化とは、$\mathbb{C}[h]$上の代数Aと全射$p: A \to P$の組(A, P)で次をみたすものである。

(1)　$\varphi: \mathbb{C}[h] \to \mathbb{C}$ $(\varphi(h) = 0)$ なる線形写像に関して、
$$p(\alpha x) = \varphi(\alpha)p(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}[h], x \in A)$$

(2)
$$ab - ba = hp^{-1}\{p(a), p(b)\} \mod h^2A \qquad (a, b \in A)$$

例　$\mathbb{C}$上のLie代数$\mathfrak{g}$の対称代数$S(\mathfrak{g})$には、Leibniz則によって、bracketが(一意的に)拡張され、Poisson代数となる。$\mathfrak{g}$のbracketを$\{,\}$とすると、$\mathbb{C}[h]\otimes\mathfrak{g}$は$h\{,\}$なるbracketに関して$\mathbb{C}[h]$上のLie代数となるが、この包絡代数$U_h(\mathfrak{g})$を考える。$h \to 0$とすれば、線型写像

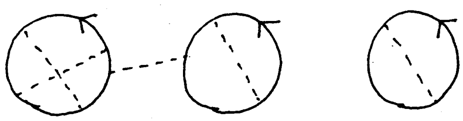
$p : U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$ を得るが、これは定義により次をみたす。

$ab - ba = h\{a, b\} = hp^{-1}\{p(a), p(b)\}$

従って $(U_h(\mathfrak{g}), p)$ は $S(\mathfrak{g})$ の量子化である。

2. 曲面上のコードダイアグラム

Chord diagram とは、有限個の oriented circle と両端をそれらの上にもつ arc (以下 chord) の集まりである。ただし、chord の端点はすべて異なり、向きを保つ circles の deffeomorphisms によって同一視を行なう。

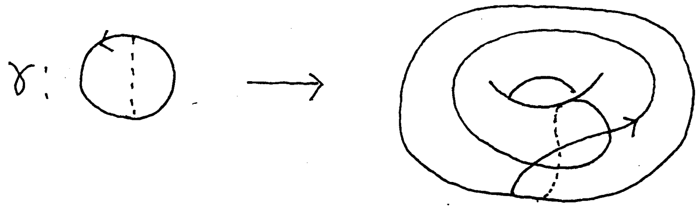
a chord diagram ; 

Σ を oriented surface としたとき、chord diagram をなす circles から Σ への連続写像 γ で次をみたすものを Σ 上の chord diagram という。

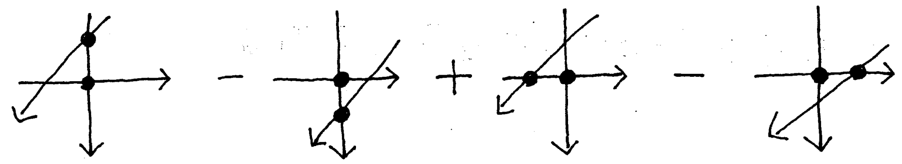
* a, b が一つの chord の両端ならば $\gamma(a) = \gamma(b)$

ただし、上の条件をみたす free homotopy による変形によって同一視をする。また、端点の像を黒点で表わす。

例



$\mathcal{D}(\Sigma)$ を Σ 上の chord diagram で張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし、$D(\Sigma)=\mathcal{D}(\Sigma)/$ 4term relation とする。ここで、4term relation とは、



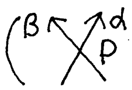
$= 0$

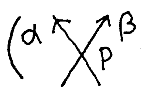
なる関係である。

Σ 上の chord diagram γ の self intersection が有限個で全て transverse double point であるとき、γ は generic であるという。今、$\alpha\cup\beta$ が generic となる α, β を選び bracket を

$$\{\alpha,\beta\}=\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\varepsilon(p;\alpha,\beta)\,\alpha\cup\beta(p)$$

$$\varepsilon(p;\alpha,\beta)=\begin{cases}+1 & \text{に対して}\\ -1 & \text{に対して}\end{cases}$$





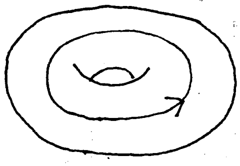
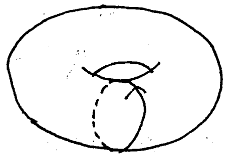
$\alpha\cup\beta(p)$ は $\alpha\cup\beta$ の一部  を  でおきかえた diagram と定義する。また、α,β の(可換な)積を $\alpha\beta=\alpha\cup\beta$ と定める。このとき次が知られている。

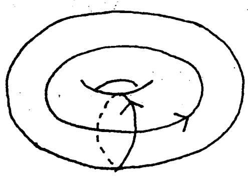
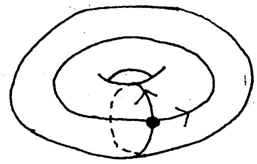
命題[AMR1]

上の bracket は $D(\Sigma)$ で well defined であり、$D(\Sigma)$ は Poisson 代数になる。

Remark　$D(\Sigma)$ は[K] における $\mathcal{A}(\Sigma)$，[AMR]における $ch(\Sigma)$ と同じものである。

例

$\alpha =$  $\beta =$  とする。

$\alpha\beta =$  $\{\alpha, \beta\} =$ 

3. $D(\Sigma)$の量子化

$\Sigma \times I$ ($I = [0,1]$) 内の oriented singular link とは、有限個の oriented circle の immersion

$L : S^1 \cup \cdots \cup S^1 \longrightarrow \Sigma \times I$

であって、intersection が有限個ですべて transverse double point となるもののことである。ただし、同値関係を次で定める。

$L_1 = L_2 \Leftrightarrow$ $\Sigma \times I$ の isotopy h_t が存在して、$h_0 = id$,
$h_1(L_1) = L_2$ かつ $h_t(L_1)$ は singular link となる。

$\Sigma \times I$ 内の singular link が $\mathbb{C}[[h]]$ 上張る加群を次の skein relation で割った加群を $Q(\Sigma)$ とする。

$Q(\Sigma) = \mathbb{C}[h]\{\text{singular links in } \Sigma \times I\} / \text{skein relation}$

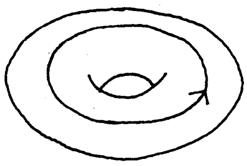
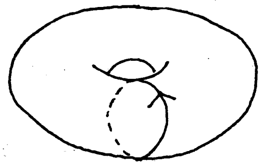
skein relation： h 

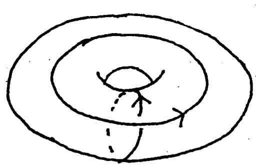
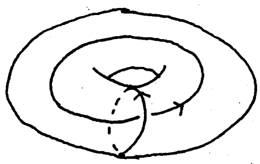
<u>Remark</u>　L_1, L_2をintersectionをもたないlinksとする。このとき、$L_1 \neq L_2$ ならば$L_1 \neq L_2$ in $Q(\Sigma)$

Singular links L_1, L_2に対して積を次で定める。

$$L_1 L_2 = \frac{\boxed{L_1}}{\boxed{L_2}} = \left\{ \begin{array}{l} (a, t) \in \Sigma \times I \quad ; \\ t > \frac{1}{2} \text{ のとき} (a, 2t-1) \in L_1 \\ t < \frac{1}{2} \text{ のとき} (a, 2t) \in L_2 \end{array} \right\}$$

<u>例</u>

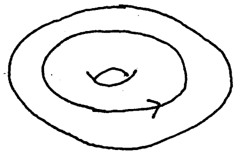
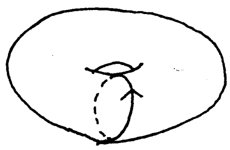
$a =$ 　　$b =$ 

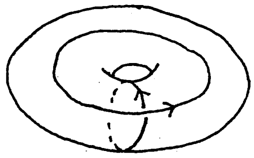
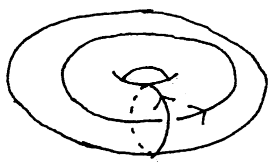
$ab =$ 　　$ba =$ 

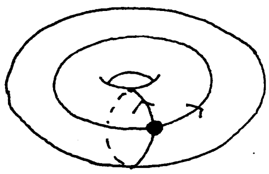
射影$\pi: \Sigma \times I \to \Sigma$は$h \to 0$としたときの写像$p: Q(\Sigma) \to D(\Sigma)$を引き起こす。

<u>定理</u>　$p: Q(\Sigma) \longrightarrow D(\Sigma)$ は量子化である。

例

$a =$  $b =$  のとき、

$ab - ba =$  $-$ 

$= h$  $= hp^{-1}\{p(a), p(b)\}$

Remark 一般には、$ab-ba$の全てのcrossingについての同様の議論によって定理は証明される。

4. 参考文献

ここで述べたことは、曲面上のloopの量子化に関する[T]の拡張であり、関連した事柄が[AMR2]で扱かわれている。

[AMR1] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin : The Poisson structure on the moduli space of flat connections and chord diagrams. Topology 35(4) p.p. 1069–1083, 1996

[AMR2] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin : Quantization of the algebra of chord diagrams

MSRI Preprint 1996-072

[K] T. Kohno: Elliptic KZ system, braid group of the torus and Vassiliev invariant,

[T] V. Turaev: Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. An. Sci. Éc. Norm. Sup., 24 pp. 635-704, 1991