

# 正規部分ホップ代数における Jordan-Hölder 型定理

照屋 保

北海道大学大学院理学研究科

1997年1月

## 1 はじめに

今回扱うホップ代数  $(H, \Delta, \varepsilon, S)$  はすべて有限次元カツ代数, すなわち, 複素数体  $\mathbb{C}$  上の有限次元半単純ホップ代数で対合射 (antipode) の 2 乗  $S^2$  が恒等射になることを仮定する. この仮定は証明に直接必要という訳ではなく, もともと作用素環の研究から始まった為についたものである. 従って, どれだけ一般のホップ代数に対して Jordan-Hölder 型定理が成り立つかという問題も興味深い.

筆者はホップ代数の専門家と言う訳ではなく, また浅才薄学のため今回の話しがどれだけ知られているのか全く判らないことを最初に告白しておく. 従って引用しなければならないホップ代数の論文が多々あると思われるがほとんど参考文献に載せることができなかつたことをお詫びする.

## 2 正規部分ホップ代数

$K$  を  $H$  の部分ホップ代数, すなわち,  $K$  は部分代数で  $\Delta(K) \subset K$ ,  $S(K) \subset K$  となるもとする. このとき  $K$  が正規であるとは任意の  $H$  の元  $h$  に対し,

$$(ad_l h)(K) \subset K \text{ かつ } (ad_r h)(K) \subset K,$$

ただし,  $ad_l, ad_r$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} ad_l h(k) &= \sum h_1 k (S h_2), \\ ad_r h(k) &= \sum (S h_1) k h_2, \quad k \in K, \Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2 \end{aligned}$$

により定義される left (right) adjoint action である. ([Mon92](3.4.1) 参照.)

いま,  $H$  を有限群  $G$  の群環  $\mathbb{C}G$ ,  $K$  を  $G$  の部分群  $F$  の群環  $\mathbb{C}F$  とすると上の条件は

$$gFg^{-1} \subset F \quad \text{かつ} \quad g^{-1}Fg \subset F$$

となる. 従って, この定義は正規部分群の素朴な拡張になっている. 次の正規性の特徴付けは有用である.

**定理 2.1**  $K$  を  $H$  の部分ホップ代数とする. このとき  $K$  正規である必要かつ十分条件は  $K$  の積分空間

$$\int_K = \{x \in K \mid xy = yx = \epsilon(y)x, \forall y \in K\}$$

が  $H$  の中心に含まれることである.

証明は [Mon92] の Corollary 3.4.4 よりすぐわかる.

$H$  の正規部分ホップ代数  $K$  に対し 積分空間  $\int_K$  の元で余単位元  $\epsilon$  の値が 1 になるものを  $e_K$  と書くことにする. このとき

- $e_K^2 = e_K$ ,
- $\Delta(e_K)(e_K \otimes e_K) = e_K \otimes e_K$ ,
- $S(e_K) = e_K$ .

となる.  $H_{e_K}$  にたいし  $(\Delta_{H_{e_K}}, \epsilon_{H_{e_K}}, S_{H_{e_K}})$  を

- $\Delta_{H_{e_K}}(xe_K) = \Delta(x)(e_K \otimes e_K)$ ,
- $\epsilon_{H_{e_K}}(xe_K) = \epsilon(x)$ ,
- $S_{H_{e_K}}(xe_K) = S(x)e_K$ .

とおけば  $(H_{H_{e_K}}, \Delta_{H_{e_K}}, \epsilon_{H_{e_K}}, S_{H_{e_K}})$  は再びホップ代数になる.

このことを有限群の群環の場合にみてみよう.  $H$  が有限群  $G$  の群環  $\mathbb{C}G$ ,  $K$  が  $G$  の部分群  $F$  の群環  $\mathbb{C}F$  とする. このとき

$$\int_K = \mathbb{C} \cdot \left( \sum_{f \in F} f \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_K \text{ が } H \text{ の中心にふくまれる} &\iff g\left(\sum_{f \in F} f\right) = \left(\sum_{f \in F} f\right)g, \quad \forall g \in G \\ &\iff gFg^{-1} = F, \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

となる.

$e_K = \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} f$  である. このとき,

$$\begin{aligned} \Delta(e_K)(e_K \otimes e_K) &= \frac{1}{|F|^3} \sum_{f, g, h \in F} (f \otimes f)(g \otimes h) \\ &= \frac{1}{|F|^3} \sum_{f, g, h \in F} (fg \otimes fh) \\ &= \frac{1}{|F|^2} \sum_{g, h \in F} (g \otimes h) = e_K \otimes e_K \end{aligned}$$

$\varepsilon(e_K) = 1$ ,  $S(e_K)$  は明らかである.  $F$  が  $G$  の正規部分群であれば  $e_K$  は  $H$  の中心の元で  $He_K$  は  $H$  のイデアルである. いま  $G = g_0F \cup g_1F \cup \cdots \cup g_nF$  を剰余分解とする. このとき

$$\begin{aligned} \Delta_{He_K}(g_i e_K) &= \frac{1}{|F|^3} \left( \sum_{f \in F} g_i f \otimes g_i f \right) \left( \sum_{g, h \in F} (g \otimes h) \right) \\ &= \frac{1}{|F|^2} \sum_{g, h \in F} g_i g \otimes g_i h = g_i e_K \otimes g_i e_K \end{aligned}$$

となるから剰余群  $G/F$  の群環  $C(G/F)$  と  $He_K$  が対応  $gF \mapsto g e_K$  により同型であるのは明らかであろう.

### 3 正規部分ホップ代数による束

今,  $H$  の正規部分ホップ代数全体を  $\mathcal{N}(H)$  と書くことにする.  $K, L \in \mathcal{N}(H)$  について

$$K \wedge L = K \cap L$$

$$K \vee L = K \text{ と } L \text{ で生成される部分ホップ代数}$$

と定義する. 正規の定義より,  $K \wedge L \in \mathcal{N}(H)$ . また,  $\int_{K \vee L} = \{xy \mid x \in \int_K, y \in \int_L\}$  であるから定理 2.1 より  $K \vee L \in \mathcal{N}(H)$  となる. 従って,  $\mathcal{N}(H)$  は和  $\vee$  と結び  $\wedge$  により束になる.

群論の場合と同様に次の定理が成立する.

**定理 3.1**  $\mathcal{N}(H)$  は modular 束である. すなわち  $K_1 \subset K, K_1, K \in \mathcal{N}(H)$  のとき,

$$K \wedge (K_1 \vee L) = K_1 \vee (K \wedge L)$$

が任意の  $L \in \mathcal{N}(H)$  に対して成立する.

この定理は Jordan-Hölder 型の定理を証明するときのキーポイントなので証明の概略をみてみたい. そのために少し準備がひつようである.

**補題 3.1**  $K, L \in \mathcal{N}(H)$  のとき,

$$\begin{aligned} K \vee L &= KL = \left\{ \sum_{\text{有限和}} x_i y_i \mid x_i \in K, y_i \in L \right\} \\ &= LK = \left\{ \sum_{\text{有限和}} y_i x_i \mid x_i \in K, y_i \in L \right\} \end{aligned}$$

となる.

**証明** いま  $K, L \in \mathcal{N}(H)$  とする.  $x \in K, y \in L$  にたいし,

$$yx = \sum y_1 x \epsilon(y_2) = \sum y_1 x S(y_2) y_3 = \sum ad_i(y_1)(x) y_2$$

となる.  $K$  の正規性より,  $yx \in KL$ . 同様に  $xy \in LK$ . このことより上の補題をえる. Q.E.D.

**3.1の証明の概略**  $H$  上にはハールトレースと呼ばれるつぎの条件をみたす positive linear map  $tr : H \rightarrow \mathbb{C}$  が一意に存在する.

- $(id \otimes tr)\Delta(x) = (tr \otimes id)\Delta(x), \forall x \in H,$
- $tr(1) = 1.$

$H$  の部分ホップ代数  $K$  に対し条件付き期待値とよばれる  $E_K : H \rightarrow K$  が存在して次の条件をみたす.

- $E_K(ahb) = aE_K(h)b, a, b \in K, h \in H$  特に  $E_K(k) = k, k \in K,$
- $tr(E_K(h)) = tr(h), \forall h \in H,$  ただし,  $tr$  は  $H$  上のハールトレース.

このとき  $K, L \in \mathcal{N}(H)$  に対し,

$$E_K E_L = E_L E_K = E_{K \wedge L}$$

が成立する.

いま  $x \in K \wedge (K_1 \vee L)$  とする. 定理 3.1 より  $p_1, p_2, \dots, p_n \in K_1$  と  $q_1, q_2, \dots, q_n \in L$  が存在して  $x = \sum_i p_i q_i$  となる.  $x \in K$  でもあるから条件付き期待値の性質より

$$\begin{aligned} x = E_K(x) &= \sum_i p_i E_K(q_i) \\ &= \sum_i p_i E_K E_L(q_i) \\ &= \sum_i p_i E_{K \wedge L}(q_i) \in K_1 \vee (K \wedge L) \end{aligned}$$

となり  $K \wedge (K_1 \vee L) \subset K_1 \vee (K \wedge L)$  を得る.  $K \wedge (K_1 \vee L) \supset K_1 \vee (K \wedge L)$  は明らかである.

証明の詳細は綿谷 [Wat96] を参照.

#### 4 Jordan-Hölder 型定理

$M$  と  $H$  を有限群  $G$  の正規部分群で  $G = MN$  かつ  $M \cap N = \{e\}$  となるものとする. このとき  $G$  は  $M$  と  $N$  の直積群  $M \times N$  と同型である. ホップ代数でも同様なことが成立する.

定理 4.1  $K, L \in \mathcal{N}(H)$  に対し

$$K \vee L = H, \quad K \wedge L = \mathbf{C} \cdot 1$$

ならば  $H = K \otimes L$  となる.

証明は [Ter] を参照.

次の定理は群論の第二同型定理に相当するものである.

定理 4.2  $K, L \in \mathcal{N}(H)$  に対し

$$(K \vee L)e_L \simeq Ke_{K \wedge L}$$

証明  $Ke_{K \wedge L} \wedge Le_{K \wedge L} = (K \wedge L)e_{K \wedge L} = \mathbf{C}$ ,  $Ke_{K \wedge L} \vee Le_{K \wedge L} = (K \vee L)e_{K \wedge L}$  であるから定理 4.1より

$$(K \vee L)e_{K \wedge L} = Ke_{K \wedge L} \otimes Le_{K \wedge L}$$

であるから

$$\begin{aligned} (K \vee L)e_L &= (K \vee L)e_{K \wedge L}e_L \\ &= Ke_{K \wedge L} \otimes Le_L \\ &= Ke_{K \wedge L} \otimes \mathbf{C} \\ &\simeq Ke_{K \wedge L} \end{aligned}$$

となる. Q.E.D.

講演の後, 竹内先生に  $K, L$  は両方とも正規である必要はなく  $L$  が正規であればこの定理が成り立つことを指摘されたことを注意しておく.

つぎの定理は群論の Zassenhaus の定理に相当するものである.

定理 4.3  $K, K_1, L, L_1 \in \mathcal{N}(H)$ , に対し  $K \supset K_1, L \supset L_1$  のとき,

$$K_1 \vee (K \wedge L)e_{K_1 \vee (K \wedge L_1)} \simeq L_1 \vee (K \wedge L)e_{L_1 \vee (K_1 \wedge L)}$$

証明 定理 4.2において  $K, L$  をそれぞれ  $K_1 \vee (K \wedge L_1), K \wedge L$  とすると  $K_1 \vee (K \wedge L) = (K_1 \vee (K \wedge L_1)) \vee (K \wedge L)$  であるから

$$K_1 \vee (K \wedge L)e_{K_1 \vee (K \wedge L_1)} \simeq (K \wedge L)e_{(K_1 \vee (K \wedge L_1)) \wedge (K \wedge L)}$$

となる. 同様に

$$L_1 \vee (K \wedge L)e_{L_1 \vee (K_1 \wedge L)} \simeq (K \wedge L)e_{(L_1 \vee (K_1 \wedge L)) \wedge (K \wedge L)}$$

となる.  $(K \wedge L) \supset (K_1 \wedge L)$  であるから定理 3.1 より

$$(K_1 \vee (K \wedge L_1)) \wedge (K \wedge L) = ((K_1 \wedge (K \wedge L)) \vee (K \wedge L_1)) \wedge (K \wedge L) = (K_1 \wedge L) \vee (K \wedge L_1)$$

を得る. 同様に

$$(L_1 \vee (K_1 \wedge L)) \wedge (K \wedge L) = (K_1 \wedge L) \vee (K \wedge L_1)$$

となる. 従って

$$K_1 \vee (K \wedge L) e_{K_1 \vee (K \wedge L)} \simeq (K \wedge L) e_{(K_1 \wedge L) \vee (K \wedge L)} \simeq L_1 \vee (K \wedge L) e_{L_1 \vee (K \wedge L)}$$

を得る. Q.E.D.

以上にことより群論の場合と全く同様に次の Jordan-Hölder 型定理を得る.

**定理 4.4**  $A_i, B_j \in \mathcal{N}(H)$  を

$$A_0 = H \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n = \mathbf{C}$$

$$B_0 = H \supset B_1 \supset \cdots \supset B_m = \mathbf{C}$$

で各  $A_{i-1} \supset A_i, B_{j-1} \supset B_j$  に対し  $A_{i-1} \neq A_i, B_{j-1} \neq B_j$  でその間に  $\mathcal{N}(H)$  の元はないものとする. このとき  $n = m$  となり 適当な順番で  $A_{i-1}e_{A_i}$  と  $B_{j-1}e_{B_j}$  は同型となる.

最後になりましたが, 今回の研究集会で終始お世話になり, 発表の機会を下さった土井先生にお礼を申し上げます. ありがとうございました.

## 参考文献

- [Mon92] S. Montgomery. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*. CBMS series number 82, 1992.
- [Ter] T. Teruya. Jordan-Hölder type theorem in normal intermediate subfactor lattices. preprint.
- [Wat96] Y. Watatani. Lattices of intermediate subfactors. *J. Funct. Anal.*, 140:312–334, 1996.