数理解析研究所講究録
998 巻 1997 年 132-140

p 進体上の半安定還元を持つ非特異完備多様体の余次元 2 のサイクル写像の単射性

東京大学数理科学研究科　佐藤周友

序

この原稿において著者は, p 進体上のあるクラスの多様体 X の余次元 2 の Chow 群のねじれ部分 $CH^2(X)_{\mathrm{tor}}$ の有限性についての概説, 及びそのクラスの多様体のサイクル写像:

$$\rho_{n,\mathrm{tor}} : CH^2(X)_{\mathrm{tor}} \to H^4(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$$

の単射性に関する最近の結果の紹介を試みます. 第 1 節では Chow 群の定義, Bloch の方法と呼ばれる手法などについて述べます. 第 2 節では p 進体上の多様体の余次元 2 の Chow 群のねじれ部分の有限性についての Colliot-Thélène, Raskind [CTR1], [CTR2], Salberger [Sal], Saito [S2] らの結果を紹介し, 第 3 節において主結果 [Sat] を述べます. 技術的な点についての説明は割愛したため, そちらに興味を持たれた方には文末に掲載された文献を参照して頂きたいと思います. また, スキーム, 及びエタールコホモロジーの一般論の知識も仮定します.

末筆ながら, この原稿を書く機会を下さいました金子昌信先生, 暖かく御指導下さいました斎藤秀司先生, そして私をとりまく全ての人達に心より感謝の意を捧げたいと思います. 尚, 筆者は日本学術振興会特別研究員 (DC) として援助を受けております.

記号

Abel 群 M と正の整数 n に対して, ${}_nM$ と M/n は各々, 写像 $M \xrightarrow{n} M$ の核と余核を表す. 素数 l に対して, $M\{l\}$ は M に含まれる l-準素なねじれ元から成る部分群, M_{tor} は M に含まれるねじれ元全体からなる部分群, M_{div} は M の最大加除部分群を表す.

スキーム X と非不整数 q に対して, X^q は X の余次元 q の素点全体から成る集合を表す. 点 $x \in X$ に対し, $\kappa(x)$ はその点での剰余体を表す. X 上で可逆な正の整数 n に対して, μ_n は 1 の n 乗根のなす層を表し, 正の整数 i に対して, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)$ は $\mu_n^{\otimes i}$ を表す. X 上で可逆な素数 l に対し, $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i)$ は $\varinjlim_\nu \mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(i)$ を表す. 尚, 特に表示の無い限りスキームのコホモロジーは全てエタール位相でとったものとする.

体 k に対し, k^* は乗法群, $\overline{k}$ は固定された一つの分離閉包, G_k は絶対 Galois 群 Gal $(\overline{k}/k)$ を表し, k上のスキーム X に対して $\overline{X}$ は係数拡大 $X \otimes_k \overline{k}$ を表す. 離散 G_k 加群 M に対して, $H^i(k,M)$ は Galois コホモロジー群 $H^i_{\mathrm{Gal}}(G_k, M)$ を表す.

1. Chow 群についての基本的事実

この節では, 体上の多様体の Chow 群の定義, 及び非特異な多様体の Chow 群について, 重要かつ, 本稿の基礎となっている事項について説明する.

まずは k を一般の体とする. 体 k 上の多様体 X の Chow 群は Weil 因子類群の自然な高余次元化として定義される. 即ち, 正の整数 q に対して余次元 q の Chow 群 $CH^q(X)$ とは

$$CH^q(X) := \mathrm{Coker}(\bigoplus_{x\in X^{q-1}} \kappa(x)^* \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{y\in X^q} \mathbb{Z})$$

で定義される Abel 群である. ここで, 非負整数 r に対して X^r は X の余次元 r の素点全体の集合を表す. また, 準同型 ∂ の (x,y) 成分 ∂_{xy} は, $y \notin \overline{\{x\}}$ (x の X での Zariski 閉包) なら 0, $y \in \overline{\{x\}}$ かつ $\overline{\{x\}}$ が y において正規ならば, $\kappa(x)^*$ の y での離散付値 ord_{xy} として定義される. $y \in \overline{\{x\}}$ かつ $\overline{\{x\}}$ が y において正規でない時は, $\overline{\{x\}}$ の正規化 $Z \to \overline{\{x\}}$ ($\overline{\{x\}}$ が体上有限型なので, これは有限射である) を用いて,

$$\partial_{xy} := \sum_{i\in I} [\kappa(y_i) : \kappa(y)]\ \mathrm{ord}_{xy_i}$$

で定義される. ここで y_i ($i \in I$) は y の逆像を表すが, これらが有限個であることによって ∂_{xy} が well-defined であることに注意しよう. Chow 群の定義から, 多様体の平坦射 $f : X \to Y$ に対して自然な引き戻し $f^* : CH^q(Y) \to CH^q(X)$ が定義できることも分かる. このように, Chow 群の定義は非常に初等的であるが, これの具体的な (抽象群としての) 構造を知ることは一般には困難である.

以下では X が非特異完備かつ k 上絶対既約であるとする. $q = 1$ のとき, つまり Weil 因子類群の場合は比較的よくわかっているので復習してみよう. まず, X が非特異であるので, $CH^1(X)$ は Picard 群 $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ と同一視出来る. また, X が完備であることから, $H^0(\overline{X}, \mathbb{G}_\mathrm{m}) = \overline{k}^*$ である. 従って Hilbert の定理 90 及び Hochschild-Serre のスペクトル系列から導かれる完全列:

$$0 \to H^1(k, \overline{k}^*) \to H^1(X, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \overset{\mathrm{res}}{\to} H^1(\overline{X}, \mathbb{G}_\mathrm{m})^{G_k}$$

によって, 自然な射 $\overline{X} \to X$ による引き戻し $CH^1(X) \to CH^1(\overline{X})^{G_k}$ は単射である. さらに $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ は次のような構造を持つことが知られている:

$$0 \to \mathrm{Picvar}_X(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{NS}(\overline{X}) \to 0 \quad (\text{exact}).$$

ここで Picvar_X は X の Picard 多様体とよばれる Abel 多様体で, 第 2 項はその $\overline{k}$-値点のなす Abel 群である. また Néron-Severi 群 $\mathrm{NS}(\overline{X})$ はよく知られているように有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群である. かくして $CH^1(X)$ の構造を知ることは $\mathrm{Picvar}_X(k) = \mathrm{Picvar}_X(\overline{k})^{G_k}$ を知ることとほぼ同じであることが分かる. 実際 $\mathrm{Picvar}_X(k)$ は, k が有限体の場合は明らかに有限群である. また, k が代数体の場合も有限生成である (Mordell-Weil の定理). k が p 進体の場合は, $\mathrm{Picvar}_X(k)$ は一般に有限生成ではないが, その中に k の整数環の有限直和と同型で指数有限な部分群 M を含んでいることが知られている. 従って, 特に k が上の三者のいずれかであれば, $CH^1(X)_{\mathrm{tor}}$ は常に有限群である.

ところが, X の次元, 及び q が 2 以上であるときには, 次のような二つの難しさに直面する. 第一に, 体の拡大 L/k による引き戻し

$$CH^q(X) \to CH^q(X_L)$$

が単射になる保証が全く無い, ということである. 第二に, k が分離閉体である場合, $CH^q(X)$ がもはや Abel 多様体のような有限次元の幾何的な対象では捉えられないという現象が実際に起こり得る, ということである (Mumford の定理, [B1, Chap. 1] 参照).

そこで, Chow 群のねじれ部分を解析する有効な手法として, Bloch の方法と呼ばれるものが登場する. 以下, 簡単のため体 k の標数は 0 であるとする. X を k上の非特異な多様体とする. この方法は, 高余次元の Chow 群のねじれ部分を, エタールコホモロジーと高次代数的 K群に結び付ける単完全列:

$$(1.1) \qquad 0 \to H^{q-1}(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{K}_q) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^{q-1}(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^q(q)) \to CH^q(X)_{\mathrm{tor}} \to 0$$

によって調べようというものである. ここで, $\mathcal{K}_q$, 及び $\mathcal{H}^q(q)$ は各々, X の Zariski 位相での前層:

$$U \longmapsto K_q(U),$$
$$U \longmapsto H^q(U_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q))$$

の層化である. $K_q(U)$ は Quillen が定義したスキームの高次代数的 K群 [Q] であるが, $q=2$, かつ U がアファインであるときには古典的な代数的 K群 $K_2(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))$ と自然に同一視出来る.

短完全列(1.1) は, 決して初等的ではない次の 3 つの基本定理から導かれる:

(1) $\mathcal{K}_q$ の i 番目のコホモロジーは, 複体:

$$\bigoplus_{x \in X^0} K_q(\kappa(x)) \to \bigoplus_{x \in X^1} K_{q-1}(\kappa(x)) \to \cdots \to \bigoplus_{x \in X^q} K_0(\kappa(x))$$

の i 番目のコホモロジーと同型である (Quillen の定理 [Q]).

(2) $\mathcal{H}^q(q)$ の i 番目のコホモロジーは, 複体:

$$\bigoplus_{x \in X^0} H^q(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q)) \to \bigoplus_{x \in X^1} H^{q-1}(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q-1)) \to \cdots \to \bigoplus_{x \in X^q} H^0(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

の i 番目のコホモロジーと同型である (Bloch-Ogus の定理 [BO]).

(3) 体 L 及び L で可逆な正の整数 n に対して, $L^*/n \to H^1(L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))$ という自然な同型がある (Hilbert の定理 90). さらに, Tate が定義した, K群から Galois コホモロジーへの Galois symbol と呼ばれる自然な準同型:

$$h^2_{L,n} : K_2(L)/n \to H^2(L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$$

が全単射, 特に全射である (Merkur'ev-Suslin の定理 [MS]).

(1) と (2) の結果を結び付ける重要な役割を果たすのが (3) である. 特に, $q=2$ の場合, 短完全列(1.1) は次のようになる:

$$(1.2) \qquad 0 \to H^1(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to NH^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to CH^2(X)_{\mathrm{tor}} \to 0.$$

ここで, 中央の項は次で定義される $H^3(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ の部分群である:

$$NH^3(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) := \ker(H^3(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

例 **1.1.** k が代数閉体, X が k上の非特異完備多様体であるとする. このとき

$$H^1(X_{\mathrm{zar}},\mathcal{K}_2)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}=0$$

である [MS, (18.4)]. 従って, 完全列 (1.2) から $CH^2(X)_{\mathrm{tor}}$ は $H^3(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ の部分群であり, 更に X が 2 次元であれば Lefchetz の弱定理によって

$$NH^3(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

であるので, 以上から

$$CH^2(X)_{\mathrm{tor}} = H^3(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

更にこの場合, エタールコホモロジーの Poincaré 双対性及び Picard 多様体と Albanese 多様体の双対性によって右辺は $\mathrm{Alb}_X(k)_{\mathrm{tor}}$ と自然に同型になる. 従って, 代数閉体上の非特異完備曲面の余次元 2 の Chow 群のねじれ部分は Albanese 多様体の閉点のなす Abel 群のねじれ部分に等しい (Roitman の定理, [B1, Chap. 5] 参照).

注意 1.2. この節の内容は k の標数 p が正の場合でも p-準素な部分を無視すれば全く同じ結果が成り立つ. また, p-準素な部分でも平行した結果が得られている ([GS1], [GS2] 参照). さらに k が有限体, X が k上の非特異完備多様体である場合, 完全列(1.1) に Weil 予想等を適用すると $CH^2(X)_{\mathrm{tor}}$ が有限群であることが分かる ([CTSS] 参照).

2. 有限性と単射性

k を p 進体とする. この節では, 次に述べる定理 2.1 の証明の 2 つの方法の概要について解説する. いずれも Bloch の方法を使って $CH^2(X)_{\mathrm{tor}}$ の有限性をエタールコホモロジーの有限性に帰着させるものであるが, 重要なのは, $\overline{X}$ のエタールコホモロジーへの k の絶対 Galois 群の作用がある程度わかっていることにより必要な有限性が示せるということである.

定理 **2.1 (Colliot-Thélène, Raskind, Salberger).** X は k上絶対既約な非特異完備多様体で,

(*) $\quad H^2(X,\mathcal{O}_X)=0$

を満たすものとする. X が k上潜在的良還元を持たないときはさらに次を仮定する:

(**) X が 2 次元であるか, または第 3 Betti 数 $\dim_{\mathbb{Q}} H^3_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C})^{\mathrm{an}},\mathbb{Q})$ が 0 である.

このとき $CH^2(X)_{\mathrm{tor}}$ は有限である.

1. Colliot-Thélène と **Raskind** の方法 ([CTR1], [CTR2] 参照). これは自然な制限写像 $CH^2(X)_{\mathrm{tor}} \to CH^2(\overline{X})_{\mathrm{tor}}$ の核と像をエタールコホモロジーを用いて評価する方法である. 前節の例で示したように $CH^2(\overline{X})_{\mathrm{tor}}$ は $H^3(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ の部分 G_k加群であるから, 像の有限性は

$$H^3(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^{G_k}$$

の有限性に帰着されるが, X が潜在的良還元を持つ場合は重み (weight) の議論 (Deligne が示した Weil 予想 [D], 及び Fontaine, Messing と Faltings が示した Crystalline 予想 ([J] 参照)) によって, そうでない場合は仮定 (**) によってこれを示すことが出来る.

次に K群の Zariski 層のコホモロジーとエタールコホモロジーの比較によって, 条件 (*) の下で核の有限性は次の定理に帰着される.

定理 **2.2 (Salberger** [Sal]). *k は p 進体, X は k上絶対既約かつ非特異完備多様体とする. このとき合成写像:*

$$\alpha_X : H^2(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))_{\mathrm{div}} \to H^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

の核は有限である. ここで左の写像は Hochschild -Serre のスペクトル系列, 及び k のコホモロジー次元が 2 であることにより得られる自然な準同型である.

この定理の証明方法を簡潔に述べる. まず, X が k上射影的である場合に帰着させ, 次に Bloch-Ogus 理論によって, 非特異な超平面切断 $Y \subset X$ に対して $\ker(\alpha_Y)$ と $\ker(\alpha_X)$ の比較を行い, X が 1 次元である場合に帰着させる. X が 1 次元である場合は, Saito の局所体上の曲線の不分岐類体論[S1] によって $\ker(\alpha_X)$ の有限性が示される.

2. Saito の方法 ([S2] 参照). これは, $CH^2(X)_{\mathrm{tor}}$ の有限性を, サイクル写像 (定義については [M, Chap. IV §9] を参照):

$$\rho_n : CH^2(X) \to H^4(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$$

の制限写像:

$$\rho_{n,\mathrm{tor}} : CH^2(X)_{\mathrm{tor}} \to H^4(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$$

の像と核を見ることにより評価する方法である. 右辺は $\overline{X}$ 及び k のコホモロジーの有限性によって有限であるので, 像は明らかに有限である. 核の評価に於て重要なのが次の定理である.

定理 **2.3 (Saito** [S2]). *X は k上絶対既約な非特異完備多様体で, (*) 及び (**) を満たすものとする. このとき, ある正の整数 N が存在して, N で割れる任意の正の整数 n に対して $\ker(\rho_{n,\mathrm{tor}})$ は $\ker(\alpha_X)$ の商である.*

この定理によって核の有限性は Salberger の有限性定理 (定理 2.2) に帰着される. また $H^2(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$ が有限であれば α_X は明らかに単射であるので次の系を得る.

系 **2.4 (Saito** [S2]). *X は (*) を満たし, k上潜在的良還元を持つものとする. このとき十分大きい整数 n に対して $\rho_{n,\mathrm{tor}}$ は単射である.*

注意 2.5. X の次元が 2 である場合は $CH^2(X)$ と Brauer 群の間に自然なペアリング:

$$CH^2(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \quad (\Sigma a_x[x], \omega) \mapsto \Sigma a_x \mathrm{Cor}_{\kappa(x)/k}(\omega|_x)$$

を考えると, エタールコホモロジーの Poincaré 双対性より, $\rho_{n,\mathrm{tor}}$ が十分大なる n で単射であることは σ が単射であることを意味する.

注意 2.6. この節では k は p 進体であったが, k が代数体の場合でも上に挙げた方法は有効である. 実際, これらの方針に従って $(*)$ を満たす k上の非特異完備多様体 X に対して同様の有限性が得られている [CTR2] [S2] (この場合は仮定 $(**)$ は不要である). 尚, ここでもやはり Salberger の有限性 (定理2.2) が重要な役割を果たす.

3. 主結果

さて, ここからが本題である. 前節の系 2.4から次のような疑問が湧いてくる. 即ち, 一般に定理 2.1の仮定 $(*)$ 及び $(**)$ を満たす非特異完備多様体 X に対してサイクル写像$\rho_{n,\mathrm{tor}}$ は単射であろうか? 実は一般には $\rho_{n,\mathrm{tor}}$ は単射ではないことが知られている. Saito の定理 (定理 2.3) は $\ker(\rho_{n,\mathrm{tor}})$ を上から評価するものであったが, X が p 進体上の非特異完備曲線の上の 2 次曲線のスムース族である場合には $\ker(\rho_{n,\mathrm{tor}})$ を下から評価する議論があり [PS], Parimala と Suresh はこれを用いて定理 2.1の仮定を満たすような曲面 X で, k上潜在的良還元を持たず, $CH^2(X)_{\mathrm{tor}}$ がいかなる整数 n に対しても $\rho_{n,\mathrm{tor}}$ の核となる 2-準素元を含んでいる例を具体的に構成したのである[PS, Section 8].

定義 **3.1.** p 進体 k の整数環を $\mathcal{O}_k$, 剰余体を $\mathbb{F}$ で表す. k上の非特異完備多様体 X の k上の半安定還元 $\mathfrak{X}$ とは, $\mathcal{O}_k$ 上平坦かつ固有な X の正則モデル $\mathfrak{X}$ (モデルとは $\mathfrak{X}\otimes k\simeq X$ なるスキーム) で Spec $\mathbb{F}$ 上のファイバー $\mathfrak{X}\otimes\mathbb{F}$ が $\mathfrak{X}$ の正規交差因子であるようなものを言う.

更に, 半安定還元 $\mathfrak{X}$ が狭義 (strict) であるとは, $\mathfrak{X}\otimes\mathbb{F}$ の各既約成分が全て非特異であることを言う.

以下では記号を少し変更して, 素数 l を一つ固定した際のサイクル写像:

$$\rho_{l^\nu,\mathrm{tor}} : CH^2(X)\{l\} \to H^4(X,\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}(2))$$

を考え, 主結果として p 進体 k上絶対既約な非特異完備多様体 X で $(*)(**)$ を満たし k上狭義半安定還元を持つものに対して$\rho_{l^\nu,\mathrm{tor}}$ が十分大なる整数 ν で単射となるための十分条件を X のモデルの言葉で与える.

Saito の定理 (定理 2.3) によって仮定 $(*)(**)$ の下では合成写像:

$$\alpha_{X,l} : H^2(k,H^1(\overline{X},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)))_{\mathrm{div}} \to H^3(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3(k(X),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

が単射であれば十分大な整数 ν に対して $\rho_{l^\nu,\mathrm{tor}}$ は単射である. 従って, 狭義半安定還元を持つ k上絶対既約な非特異完備多様体 X に対して $\alpha_{X,l}$ の単射性を考えることが本質的である. 主結果を述べる前にいくつかの記号を導入する.

$\mathfrak{X}$ を X の狭義半安定還元モデルとし, Spec $\mathbb{F}$ 上のファイバーを Y で表す. また, Y の singular locus (Y_i $(i\in I)$ を Y の既約成分達とするときの $Y_i\times_Y Y_j$ $(i\neq j)$ 達の Y での合併) を $Y^{\langle 1\rangle}$, $\overline{Y}:=Y\otimes_{\mathbb{F}}\overline{\mathbb{F}}$ の双対グラフ ($\overline{Y}$ の既約成分達の組合せ論的な交わり具合を表す自然な単体複体. 正確な定義は[Sat, §2]参照) を $\Gamma_{\overline{Y}}$ で表す.

定理 3.2. X, $\mathfrak{X}$ は上の通り．l は p でない素数とし，$\mathfrak{X}$ は次の条件を満たすとする:
(1) $Y^{\langle 1\rangle}$の各既約成分は $\mathbb{F}$ 上絶対連結である．
$H^2(\overline{Y},\mathbb{Z}_l)$ が非自明なねじれ元を持つときは更に次を仮定する．
(2) 各 $i\in I$ に対して $\mathrm{NS}(\overline{Y}_i)$ への $G_{\mathbb{F}}$ の作用が自明である．
(3) $H^2(\Gamma_{\overline{Y}},\mathbb{Z})$ が l-準素なねじれ元を持たない．
このとき $\alpha_{X,l}$ は単射である．

次の結果は上の結果の自然な p-類似であるが，$H^*_{\text{log-crys}}(Y/W(\mathbb{F})))$ は半安定族 $\mathfrak{X}$ に対して Hyodo と Kato が定義した対数的クリスタルコホモロジーを表す [HK].

定理 3.3. X, $\mathfrak{X}$ は上の通り．$\mathfrak{X}$ は ordinary ([H1] 参照) であるとし，更に次の条件を全て満たすとする:
(1) $Y^{\langle 1\rangle}$ の各既約成分は $\mathbb{F}$ 上絶対連結である．
(2) 各 $i\in I$ に対して $\mathrm{NS}(\overline{Y}_i)$ への $G_{\mathbb{F}}$ の作用が自明である．
(3) $H^2_{\text{log-crys}}(Y/W(\mathbb{F}))$ が非自明なねじれ元を持たない．
このとき $\alpha_{X,p}$ は単射である．

上の各結果において，条件 (1) 及び (2) は Y を $\mathbb{F}$ の適当な有限次拡大体で (従って $\mathfrak{X}$ を $\mathcal{O}_k$ の不分岐拡大で) 係数拡大すれば満たされる条件である．定理 2.3, 定理 3.2, 定理 3.3 から次の系を得る．

系 3.4. l を p と異なる素数 (*resp.* $l=p$) とする．X は $(*)$, $(**)$ を満たす k上絶対既約な非特異完備多様体で，定理 3.2 (*resp.* 定理 3.3) の条件を全て満たす狭義半安定還元 $\mathfrak{X}$ を持つものとする．このとき十分大なる正の整数 ν に対して $\rho_{l^\nu,\mathrm{tor}}$ は単射である．

$\mathcal{O}_{\mathrm{nr}}$, $\overline{\mathcal{O}}$ を各々，k の最大不分岐拡大，k の代数閉包，における $\mathcal{O}_k$ の整閉包とする．主結果の証明の方針を大まかに述べると，$l\neq p$ の場合は自然な射 $\overline{X}\to\mathfrak{X}\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{nr}}$ ($l=p$ の場合は $\overline{X}\to\mathfrak{X}\otimes\overline{\mathcal{O}}$) に対する Leray スペクトル系列から $H^1(\overline{X},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ に入るフィルター付けの各次数商を係数とする k の Galois コホモロジーを計算して $\ker(\alpha_{X,l})$ を上から評価する，というものである．このとき本質的なのは，$l\neq p$ の場合は Rapoport と Zink [RZ] の結果によって，$l=p$ である場合は Bloch, Kato [BK]と Hyodo [H1] の p 進エタールコホモロジーに関する結果によって，フィルター付けの各次数商への惰性群 I_k の作用がよく分かっているので k の Galois コホモロジーの計算を $\mathbb{F}$ の Galois コホモロジーの計算に帰着できる，という点である．

証明の方針として述べたように，今回の結果はあくまで $\ker(\alpha_{X,l})$ を上から評価したものであり，従って各条件がどれだけ必要条件に近いものであるかについては一切主張していないことに注意したい．

最後に，定理 3.2 (resp. 定理 3.3) の証明過程から，k上半安定還元 (resp. ordinary な半安定還元) を持つ非特異完備多様体 X に対して，任意の素数 $l\neq p$ で $\alpha_{X,l}$ の核が有限，かつ殆ど全ての素数 $l\neq p$ で $\alpha_{X,l}$ は単射である (resp. $\alpha_{X,p}$ の核が有限である) ことが判る．更に，Hyodo, Kato [HK] [K] と Tsuji [Ts]の p 進 Hodge 理論 (Fontaine-Jannsen 予想 [J]) を用いると，ordinary という仮定がなくても$\alpha_{X,p}$ の核の有限性を示すことができ

る. 従って, de Jong の alteration に関する定理 [dJ] とノルムの議論によって Salberger の有限性定理 (定理 2.2) の別証明が得られることが判る.

References

[B1] Bloch, S.: Lectures on algebraic cycles. (Duke. Univ. Math. series 4) Durham: Duke University Press 1980

[BK] Bloch, S., Kato, K.: p-adic etale cohomology. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **63**, 107–152 (1986)

[BO] Bloch, S., Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4 Série **7**, 181–202 (1974)

[CT] Colliot-Thélène, J.-L.: Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique. In: Arithmetic Algebraic Geometry, Trento. (SLN vol. 1553) Berlin Heidelberg New York: Springer 1993

[CTR1] Colliot-Thélène, J.-L., Raskind, W.: K_2-cohomology and the second Chow group. Math. Ann. **270**, 165–199 (1985)

[CTR2] Colliot-Thélène, J.-L., Raskind, W.: Groupe de Chow de codimension deux des variétés définis sur un corps de nombres: un théorème de finitude pour la torsion. Invent. Math. **105**, 221–245 (1991)

[CTSS] Colliot-Thélène, J.-L., Sansuc, J.-J., Soulé, C.: Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux. Duke Math. J. **50**, 763–801 (1983)

[D] Deligne, P.: La conjecture de Weil II. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **52**, 137–252 (1980)

[GS1] Gros, M., Suwa, N.: Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques. Duke Math. J. **57**, 579–613 (1988)

[GS2] Gros, M., Suwa, N.: La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmique. Duke Math. J. **57**, 615-628 (1988)

[G] Grothendieck, A.: Le groupe de Brauer III. In: Dix exposé sur la cohomologie des schémas pp. 88–188 Amsterdam: North-Holland 1968

[H1] Hyodo, O.: A note on p-adic etale cohomology in the semi-stable reduction case. Invent. Math. **91**, 543–557 (1988)

[HK] Hyodo, O., Kato, K.: Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles. In: Périodes p-adiques. Astèrisque 223, pp. 221–268 (1994)

[J] Janssen, U.: On l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology. In: Y. Ihara, K.A. Ribet, J.-P. Serre (eds.) Galois Group over $\mathbb{Q}$. Berlin Heidelberg New York: Springer 1989

[dJ] de Jong, A.J.: Smoothness, semi-stability, and alterations. preprint

[K] Kato, K.: Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology. In: Périodes p-adiques. Astèrisque 223 (1994)

[M] Milne, J.S.: Étale cohomology. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 1980

[MS] Merkur'ev, A.S., Suslin, A.A.: K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. Math. USSR Izv. **21**, 307–341 (1983)

[PS] Parimala, R., Suresh, V.: Zero-cycles on quadric fibrations: Finiteness theorems and the cycle map. Invent. Math. **122**, 83–117 (1995)

[Q] Quillen, D.: Higher algebraic K-theory I. In: Algebraic K-theory I. (SLN vol. 341 pp. 85–147) Berlin Heidelberg New York: Springer 1973

[RZ] Rapoport, M., Zink, T.: Üeber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik. Invent. Math. **68**, 21–101 (1982)

[S1] Saito, S.: Class field theory for curves over local fields. J. of Number Theory **21**, 44–80 (1985)

[S2] Saito, S.: On the cycle map for torsion algebraic cycles of codimension two. Invent. Math. **106**, 443–460 (1991)

[Sal] Salberger, P.: Torsion cycles of codimension two and l-adic realizations of motivic cohomology. In: S. David (ed.) Séminaire de Théorie des Nombres 1991/1992 Boston: Birkhäuser 1993

[Sat] Sato, K.: Injectivity of the torsion cycle map of codimension two of varieties over p-adic fields with semi-stable reduction. preprint

[Se] Serre, J.-P.: Cohomologie Galoisienne. (SLN vol. 5) Berlin Heidelberg New York: Springer 1965

[T] Tate, J.: p-divisible groups. In: T. Springer (ed.) Proceedings of a Conference on Local Fields. Berlin Heidelberg New York: Springer 1967

[Ts] Tsuji, T.: p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. preprint