数理解析研究所講究録
998 巻 1997 年 174-187

Galois 群や基本群から元の対象を復元する問題に関する歴史と最近の発展
(Recovering geometric objects from Galois groups and/or fundamental groups — History and recent development)

玉川安騎男 (AKIO TAMAGAWA)

京都大学数理解析研究所 (RIMS, Kyoto Univ.)

§0. Introduction

体 K に対し、その分離閉包 K^{sep} を 1 つ固定します。この時、G_K で K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ を表します。これは、K^{sep} の取り方を変えてもすべて(内部自己同型を除いて標準的に)同型な profinite 群を与えます。$K \mapsto G_K$ によって、体の圏から profinite 群 modulo 内部自己同型の圏への(反変)関手が定義されます。

一方、連結 scheme X に対し、その上の geometric point $\overline{x}: \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ (Ω は分離閉体)を 1 つ固定します。この時、$\pi_1(X)$ で X の基本群 $\pi_1(X, \overline{x})$ を表します。これは、$\overline{x}$ の取り方を変えてもすべて(内部自己同型を除いて標準的に)同型な profinite 群を与えます。$X \mapsto \pi_1(X)$ によって、scheme の圏から profinite 群 modulo 内部自己同型の圏への(共変)関手が定義されます。

Remark. G_K は基本群としてとらえられます:

$$G_K \simeq \pi_1(\mathrm{Spec}(K)).$$

また、locally noetherian、normal な(連結)scheme X に対しては、$\pi_1(X)$ は絶対 Galois 群 G_K の商群としてとらえられます。ここで、K は X の関数体です。例えば、X が更に regular の時には、K^{sep}/K の有限次部分拡大で X の任意の余次元 1 の点 x に対して離散付値 ord_x が不分岐になるようなものすべての合成体を K^{ur} とすれば、

$$\pi_1(X) \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K)$$

となります。

さて、G_K は体 K から、$\pi_1(X)$ は scheme X から、それぞれ決まるわけですが、逆に、K や X は G_K や $\pi_1(X)$ という位相群だけから(どのくらい)復元されるか、というのがここで取り上げる基本的な問題です。より詳しく言えば、以下のようないろいろな versions が考えられます。ここでは、scheme とその基本群の場合に説明します。

(Absolute versions.) Schemes 全体のなす圏の「よい」部分圏 $\mathcal{C}$ をとれば、$X, Y \in \mathcal{C}$ に対して、

$$\text{(Equiv)}: \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y) \implies X \simeq Y.$$

$$\text{(Isom)}: \mathrm{Isom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\mathrm{Inn}(\pi_1(Y)).$$

$$\text{(Hom)}: \mathrm{Hom}'(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}'(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\mathrm{Inn}(\pi_1(Y)).$$

(Relative versions.) k を「よい」体とする時、(geometrically connected) k-schemes 全体のなす圏の「よい」部分圏 $\mathcal{C}_k$ をとれば、$X, Y \in \mathcal{C}_k$ に対して、

$$\text{(Equiv)}_k: \pi_1(X) \underset{G_k}{\simeq} \pi_1(Y) \implies X \underset{k}{\simeq} Y.$$

$$\text{(Isom)}_k: \mathrm{Isom}_k(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\mathrm{Inn}(\pi_1(Y \underset{k}{\otimes} \overline{k})).$$

$$\text{(Hom)}_k: \mathrm{Hom}'_k(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}'_{G_k}(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\mathrm{Inn}(\pi_1(Y \underset{k}{\otimes} \overline{k})).$$

ここで、Hom$'$ は Hom の「適当な」部分集合を表します。また、relative versions において、G_k 上の homomorphism（あるいは isomorphism）とは、構造射 $X, Y \to \mathrm{Spec}(k)$ から関手性によって決まる $\pi_1(X), \pi_1(Y) \to \pi_1(\mathrm{Spec}(k)) = G_k$ と両立する homomorphism（あるいは isomorphism）をいいます。

Remark. Hom$'$ の定義にもよりますが、

$$\text{(Hom)} \implies \text{(Isom)} \implies \text{(Equiv)},$$

$$\text{(Hom)}_k \implies \text{(Isom)}_k \implies \text{(Equiv)}_k$$

となります。

また、(Isom) あるいは (Isom)_k において $X = Y$ の場合だけを考えたものを (Aut) あるいは (Aut)_k と書けば、

$$\text{(Isom)} \iff \text{(Equiv)} + \text{(Aut)},$$

$$\text{(Isom)}_k \iff \text{(Equiv)}_k + \text{(Aut)}_k$$

となります。

上の定式化は、「よい」とか「適当な」とかいう言葉が入っていてあいまいですが、漠然と Grothendieck 予想と呼ばれることが多いと思います。もともと Grothendieck が予想したのは（[Grothendieck1,2]）、k が素体上有限生成な体の場合の relative versions で、彼は、この場合の $\mathcal{C}_k$ の対象を anabelian k-schemes と呼びました。（但し、呼んだだけで定義はしませんでした。）

上のような問題が、どのような場合にどのように解かれているかを解説するのが本稿の目的ですが、正確な statements については現時点で最良（というか「極良」）のもの以外省略して references に譲り、むしろ証明に重点を置いて解説したいと思います。それも、証明全部ではなく、「局所構造の復元」という点にのみ注目します。ここで、局所構造とは、G_K や $\pi_1(X)$ の中のさまざまな分解群あるいは惰性群（の集合）のことで、これを群論的に復元することが、多くの場合に証明の最も重要なステップの 1 つになります。

なお、上記の問題に関しては、他にも [Nakamura8][Pop7][Tamagawa2] などの解説がありますので、興味のある方は合わせて参照して下さい。

I. Galois groups

§1. Local fields

局所体の絶対 Galois 群から元の局所体がどのくらい復元できるかという問題ですが、もともと局所的な問題なので、§0 で述べた「局所構造の復元」という観点からは外れており、以下の文献を挙げるのにとどめさせていただきます。

Real :

○ $G_K \simeq G_{\mathbb{R}} \iff K$: real closed : [Artin][ArSc]

p-adic :

○ $G_K \simeq G_{\mathbb{K}}$ ($\exists \mathbb{K}$, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p] < \infty$) $\iff K$: p-adically closed :
[Neukirch2][Pop1][Efrat][Koenigsmann]

○ $[K_i : \mathbb{Q}_p] < \infty$, $G_{K_1} \simeq G_{K_2} \iff$? :
[Yamagata][JarRi1][Ritter][Jenkner]

○ Description of G_K, $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$:
[Jakovlev1,2][Koch1,3][Zel'venskii][Jannsen][JanWi][Wingberg][Diekert]
(Description of $G_{\mathbb{F}_q((T))}$: [Koch2])

○ Restriction on group isomorphisms :
[JarRi2](normal automorphisms) [Mochizuki3](filtration-preserving isomorphisms)

§2. Global fields

$[K : \mathbb{Q}] < \infty$ または $[K : \mathbb{F}_p(T)] < \infty$ の時に、絶対 Galois 群 G_K から元の体 K を復元するという問題です。文献は次の通りです：

$[K : \mathbb{Q}] < \infty$: [Neukirch1–4][Ikeda1–3][Iwasawa][Kanno][Komatsu1,2][Uchida1,2,4,5]
(cf. [Hironaka][Sueyoshi])

$[K : \mathbb{F}_p(T)] < \infty$: [Uchida3]

この場合に復元したい局所構造は、もちろん、K の各（有限）素点 v に対する分解群 $D_v = G_{K_v}$ です。ポイントは、Neukirch（冥福を祈ります）による、Brauer 群の local-global principle を使うアイディアです。

簡単のため、ある奇素数 $l \neq \mathrm{char}(K)$ に対して、K が 1 の原始 l 乗根を含んでいる場合を考えます。この時、

$$H^2(G_K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Br}(K)[l],$$

$$H^2(D_v, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Br}(K_v)[l] (\simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$

となりますから、次の完全列が存在します。

$$0 \to H^2(G_K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \bigoplus_v H^2(D_v, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to 0.$$

特に、素点の集合 S に対して

$$\mathrm{res}_S : H^2(G_K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \prod_{v \in S} H^2(D_v, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$

を考えると、S が（有限）素点全体の集合の時には res_S は単射、S が有限集合の時には res_S は全射になることがわかります。更に、K の有限次拡大を走ることにより、K を $\overline{K}$ に含まれる K の任意の拡大に取り替えても同様の単射性、全射性が成り立ちます。

さて、G_K の閉部分群 D に対して、次のような群論的な条件を考えます。

(∗) D の任意の開部分群 D' に対して、

$$H^2(D', \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}.$$

例えば、各素点 v に対する分解群 D_v — 正確には、v の K^{sep} への延長 $\overline{v}$ を1つ選ぶごとに分解群 $D_{\overline{v}}$ が定まる — やその各開部分群は、条件 (∗) を満たします。

主張は、$D_{\overline{v}}$ 全体は、(∗) を満たす閉部分群の中で包含関係に関して極大なもの全体と一致する、ということです。これを示すには、(∗) を満たすような D に対して、$D \subset D_{\overline{v}}$ を満たすただ1つの（K^{sep} の）素点 $\overline{v}$ が存在することを示せば十分です。D に対応する K^{sep} の部分体を L とする時、上述の単射性、全射性を L に対して適用すれば、L の素点 w で

$$H^2(G_{L_w}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \neq 0$$

となるものがただ1つ存在することがわかります。これを、更に L の各有限次拡大 L' に対して考えて行けば、K^{sep} の素点 $\overline{v}$ が（ただ1つ）定まり、求める性質 $D \subset D_{\overline{v}}$ が成り立つことがわかります。詳細は省略します。

§3. Finitely generated fields

§2 の結果は、更に有限生成体に拡張されます。文献は次の通りです：

[Pop2,4,5][Mochizuki2,4] (cf. [Voevodskiĭ3][Bogomolov1–3][Spiess][Tamagawa1])

現時点での最良の結果を次に掲げておきます。

(Absolute version.)

Theorem ([Pop5]). *K_i: finitely generated $/\mathbb{Q}$ $\Longrightarrow$*

$$\mathrm{Isom}(K_2, K_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(G_{K_1}, G_{K_2}) / \mathrm{Inn}(G_{K_2}).$$

($/\mathbb{F}_p$ version もありますが、例えば [Pop4] の結果は、そこに述べられたままだと正しくありません。)

(Relative version.)

Theorem ([Mochizuki4]). *k: sub p-adic (i.e. $k \subset \exists L$: finitely generated $/\mathbb{Q}_p$) for some prime p, K_i: finitely generated $/k$ $\Longrightarrow$*

$$\mathrm{Hom}_k(K_2, K_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{G_k}(G_{K_1}, G_{K_2}) / \mathrm{Inn}(G_{K_2\overline{k}}).$$

（もちろん、finitely generated $/\mathbb{Q}$ ならば、任意の p に対して sub p-adic です。）

Pop が復元したのは、次のような局所構造です。

Definition. K を体とし、v をその上の valuation（$K^\times$ から順序加群への準同型で、いくつかの条件を満たすもの）、k を v の剰余体とする。この時、v が defectless とは、等式

$$\dim_{\mathbb{Q}}(v(K^\times)\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q})+\dim(k)=\dim(K)$$

が成立することをいう。（一般に $\leq$ は成立。）但し、体 F に対して、$\mathbb{F}$ をその素体とする時、

$$\dim(F)\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}(\text{transcendence degree of } F \text{ over } \mathbb{F}) & (\text{if } \mathrm{char}(F)>0),\\ (\text{transcendence degree of } F \text{ over } \mathbb{F})+1 & (\text{if } \mathrm{char}(F)=0).\end{cases}$$

Pop は、有限生成体 K に対して、K の（正確には K^{sep} の）各 defectless valuation に対して決まる G_K の中の分解群たちが、位相群 G_K だけから復元できることを示しました（[Pop4]）。証明は、Brauer 群のある種の弱い local-global principle が鍵となっており、彼自身 “far-reaching generalization of Neukirch's Galois characterization of the places of global fields” と書いているように、前の §で述べた Neukirch のアイディアの拡張と言えます。但し詳細はかなり複雑で、数学基礎論の ‘model theory’ なども用いており、ここで説明するのは省略させていただきます。

また、[Spiess] では、K が代数体上の 1 変数代数関数体の場合に、Neukirch のアイディアの別の拡張（H^2 の代わりに H^3 を利用）を用いて Pop の定理の別証を与えています。

なお、望月氏の結果（あるいは [Tamagawa1]）では、多様体の基本群の射影極限として関数体の絶対 Galois 群の場合を導いています。

II. Fundamental groups

§4. Curves of genus 0

文献は次の通りです：

Genus 0 : [Nakamura1–3] (cf. [Voevodskiĭ2])

Toward general curves : [Nakamura6,7,9][NaTs][Tsunogai] (cf. [Voevodskiĭ2])

ここでは、中村氏による局所構造の復元の方法について述べます。

k を代数体、X を k 上の smooth, hyperbolic な曲線とし、X^* をその（smooth な）コンパクト化とします。各 $x\in X^*-X$（の延長）に対し、分解群 D_x、惰性群 I_x が $\pi_1(X)$ の中に定まり、次の完全列が存在します。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & I_x & \to & D_x & \to & G_{\kappa(x)} & \to & 1\\ & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ 1 & \to & \pi_1(X\underset{k}{\otimes}\overline{k}) & \to & \pi_1(X) & \overset{\mathrm{pr}_X}{\to} & G_k & \to & 1.\end{array}$$

但し、$\kappa(x)$ は x の剰余体を表します。目標は、I_x を群論的に復元することです。（この時、D_x は I_x の $\pi_1(X)$ における正規化群として復元されます。）

ここで、I_x は位相群としては $\widehat{\mathbb{Z}}$（$\mathbb{Z}$ の profinite 完備化）と同型で、$\pi_1(X\underset{k}{\otimes}\overline{k})$ の中で self-normalizing（すなわち I_x の $\pi_1(X\underset{k}{\otimes}\overline{k})$ における正規化群は I_x に一致）で

あることがわかります。また、D_x の元は共役によって I_x の自己同型を定めますが、I_x はアーベルなので、これによって、

$$G_{\kappa(x)} \to \mathrm{Aut}(I_x) = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$$

が定まります。これが cyclotomic character であること（すなわち $I_x \simeq \widehat{\mathbb{Z}}(1)$）はよく知られています。

中村氏は、逆に次のことを示しました：J を $\pi_1(X \otimes_k \overline{k})$ の $\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型な閉部分群で self-normalizing なものとする時、J がある $x \in X^* - X$ （の延長）に対する惰性群 I_x に一致するための必要十分条件は、$\pi_1(X)$ の閉部分群 E であって

(i) $E \cap \pi_1(X \otimes_k \overline{k}) = J$；

(ii) $\mathrm{pr}_X(E)$ は G_k の開部分群；

(iii) 共役によって定まる $\mathrm{pr}_X(E) \to \mathrm{Aut}(J) = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は cyclotomic character、

の 3 条件を満たすものが存在することである。

十分性の証明は、ある x に対して $J \subset I_x$ が言えればよいわけです（self-normalizing を仮定していることに注意。）が、もしどの惰性群にも入らないと仮定すると、$\pi_1(X \otimes_k k^{\mathrm{sep}})$ の適当な開部分群 H を取れば、$J \cap H$ の H^{ab} における像が惰性群の像で生成される部分群に含まれないようにできてしまうことがわかり、Frobenius weight を考えると (iii) に矛盾します。

§5. Affine curves

ここでは、[Tamagawa1] における局所構造の復元について述べます。

k を有限体とし、X を k 上 proper, smooth, geometrically connected で種数が 2 以上の曲線とします。（[Tamagawa1] で最終的に扱うのは affine 曲線なのですが、簡単のため proper の場合に説明します。）復元したいのは、X の各閉点 x （の延長）に対して定まる、分解群 $D_x \subset \pi_1(X)$ です。§2 で述べた関数体 $k(X)$ の場合と比べて難しいのは、惰性群が自明になっていることで、したがって D_x は x の剰余体 $\kappa(x)$ の絶対 Galois 群 $G_{\kappa(x)}$ と一致しています。$\kappa(x)$ は有限体ですから、$D_x \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ となり、H^2 は自明になってしまいます。

今、x の惰性群が自明なので、次の図のようになっています。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & D_x & \xrightarrow{\sim} & G_{\kappa(x)} & & \\ & & & & \cap & & \cap & & \\ 1 & \to & \pi_1(X \otimes_k \overline{k}) & \to & \pi_1(X) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} & G_k & \to & 1. \\ & & & & & & \| & & \\ & & & & & & \widehat{\mathbb{Z}} & & \end{array}$$

つまり、部分群 D_x は、

$$s_x : G_{\kappa(x)} \xrightarrow{\sim} D_x \subset \pi_1(X)$$

という pr_X の部分的な section を与えています。（実は、s_x は、自然な射 $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ に π_1 の関手性を適用して得られる射と一致しています。）簡単のため $\kappa(x) = k$ とすれば、s_x は pr_X の section になります。

さて、逆に pr_X の勝手な（位相群としての） section $s : G_k \to \pi_1(X)$ が与えられた時、その像 $s(G_k)$ がある $x \in X(k)$ に対する分解群 D_x になっているかを群論的な情報だけから判断する必要があります。

$\pi_1(X)$ の各開部分群 H に対し、対応する X の被覆を X_H で表します。（$\pi_1(X_H) = H$ となることに注意して下さい。）まず、

$$\exists x \in X(k) \text{ s.t. } D_x = s(G_k) \iff s(G_k) \subset \forall H \underset{\text{open}}{\subset} \pi_1(X),\ X_H(k) \neq \emptyset$$

となることに注意します。実際、 $\Longrightarrow$ は分解群の一般論から直ちにわかります。 $\Longleftarrow$ の方は、 Tikhonov の定理によって $\varprojlim_H X_H(k)$ も空でないことがわかり、したがって $s(G_k)$ に対応する X の（pro）被覆に k- 有理点があることになり、その k- 有理点を１つ取って対応する分解群 D を考えれば、 $D \subset s(G_k)$ となりますが、 D も $s(G_k)$ も pr_X によって G_k に同型に落ちるので、 $D = s(G_k)$ が帰結されます。

そこで、各 H に対して $X_H(k)$ が空でないかどうかを群論的に判定できればよいことになります。これは、Lefschetz trace formula によって達成されます。簡単のために $X_H = X$ としますと、

$$X(k) \neq \emptyset \iff \sum_{i=0}^{2} \mathrm{tr}(\varphi_k \mid H^i_{\mathrm{cont}}(\pi_1(X \underset{k}{\otimes} \overline{k}), \mathbb{Q}_l)) > 0$$

というわけです。ここで、l は $\mathrm{char}(k)$ と異なる素数、φ_k は k の (geometric) Frobenius を表します。

§6. General curves

ここでは、望月氏の仕事を紹介します。文献は [Mochizuki1,2,4] です。

結果は次の通りです。（この他にもさまざまな versions があります。詳しくは論文を参照して下さい。）

Theorem ([Mochizuki4]). *k: sub p-adic, V: (connected) smooth variety /k, C: smooth, hyperbolic curve /k* $\Longrightarrow$

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}_k(V, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{G_k}(\pi_1(V), \pi_1(C)) / \mathrm{Inn}(\pi_1(C_{\overline{k}})).$$

§4、§5 では Frobenius weight や Lefschetz trace formula という「l 進的」な道具が使われましたが、望月氏の議論は完全に「p 進的」です。

K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とし、O_K をその整数環とします。X を K 上 proper, smooth, geometrically connected で種数 $g \geq 2$ の曲線とし、$\mathfrak{X}$ をその適当な O_K 上の model とする時、ここで復元したい局所構造は、だいたい、$\mathfrak{X}$ の special fiber の各既約成分の generic point に対して定まる分解群（$\subset \pi_1(X)$）です。より正確な問いは、以下のように述べられます：L を、K を含む p 進完備な離散付値体で剰余体が K の剰余体の上の１変数代数関数体になっているものとする。G_K 上の射 $\alpha : G_L \to \pi_1(X)$ が与えられた時、α がある $\mathrm{Spec}(K)$ 上の射 $\mathrm{Spec}(L) \to X$ から来るかどうか（すなわち幾何的かどうか）を群論的に判定せよ。

この問いに対する答えは、さまざまな p 進的な議論を組み合わせてできるかなり複雑なものですが、ここでは、ごく簡単に議論の概略を述べます。

以下、J^n で X の Picard scheme の次数 n の部分を表します。($J = J^0$ は X の Jacobian variety です。)自然な射 $X \to J^1$ によって $\pi_1(X) \to \pi_1(J^1)$ が定まりますが、その geometric part は、

$$\pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}) \to \pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K})^{\mathrm{ab}} \simeq \pi_1(J^1 \underset{K}{\otimes} \overline{K}) \simeq T(J)$$

となっています。ここで、$T(J)$ は J の Tate 加群 $\varprojlim J[n](\overline{K})$ です。

第 1 段階では、$\pi_1(X) \to \pi_1(J^1)$ という群論的構造を用いて、$\pi_1(J^1) \to G_K$ の幾何的な section α_0 を(1つ)見つけます。[Mochizuki2] では、$\pi_1(X)$ の p 進 cohomology の Poincaré duality を用いて $\pi_1(J^{2g-2}) \to G_K$ の canonical bundle に対応する(したがって幾何的な) section を復元し、それによって $\pi_1(J^1) \to G_K$ の幾何的な section を見つけました。[Mochizuki4] では、次のような簡明な観察によって Poincaré duality を排除することに成功しました。(この観察は、$(\mathrm{Isom})_K$ でなく $(\mathrm{Hom})_K$ を示すために必要となります(§0 参照)。また、上の定理の 'truncated version' を証明する上でも重要です。)簡単のため、X が good reduction を持つとし、$\mathfrak{X}$ を O_K 上 proper, smooth な X の model とします。全射

$$\pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}) \to \pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K})^{\text{ét}} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(\mathfrak{X} \underset{O_K}{\otimes} O_{K^{\mathrm{ur}}})$$

の核による $\pi_1(X)$ の商を $\pi_1(X)^{\text{ét}}$ で表すと、次の完全列が存在します。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K})^{\text{ét}} & \to & \pi_1(X)^{\text{ét}} & \to & G_K & \to & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
1 & \to & \pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K}) & \to & \pi_1(X) & \to & G_K & \to & 1.
\end{array}$$

ここで、幾何学的な section $G_K \to \pi_1(X)$ については、それによる惰性群 $G_{K^{\mathrm{ur}}}$ の像は、$\pi_1(X)^{\text{ét}}$ に落とすと geometric part $\pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K})^{\text{ét}}$ と可換になります。J が ordinary reduction を持つ場合には、逆にこの性質を持つ section は、$\pi_1(J^1)$ に落とすと(ある意味で)幾何的になることがわかります。一般の場合は $\pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K})^{\text{ét}}$ の代わりに $\pi_1(X \underset{K}{\otimes} \overline{K})$ の Malčev Lie 環(に $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{K}}$ をテンソルしたもの)の 'weight zero quotient' を取る必要があります。

第 2 段階では、勝手な $\alpha : G_L \underset{G_K}{\to} \pi_1(X)$ に対し(あるいは、勝手な section $G_L \to \pi_1(X \underset{K}{\otimes} L)$ と言っても同じ)、それを $\pi_1(J^1)$ (あるいは $\pi_1(J^1 \underset{K}{\otimes} L)$)に落とした時に幾何的かどうかを群論的に判定します。これは、α と第 1 段階で既に幾何的とわかっている section α_0 の「差」を考えれば、

$$H^1(G_L, \pi_1(J^1 \underset{K}{\otimes} \overline{K})) = H^1(G_L, T(J))$$

の中の幾何的な部分、すなわち J の L- 有理点からくる部分を群論的に特徴付けるという問題になります。ここでは、p-divisible groups の間の射が generic fibers (つまり Galois 表現)の射によって統制されるという Tate の定理を用います。(もし $L = K$

ならば、これは Bloch-Kato の意味の e-part $=$ f-part $=$ g-part ということになります。)

第 3 段階では、$J^1(L)$ が空でない時に、$X(L^{\mathrm{tame}})$ が空でないことに注意します。これは、$J^1(L)$ の元に対応する X_L 上の line bundle の十分大きい p と素な冪を考えれば、その section の零点のなす divisor の support に、L 上 p と素な次数の拡大体に値をとる有理点があることからわかります。

第 4 段階は、§5 と同様の問題ですが、ずっと複雑です。第 3 段階までを各被覆に適用することにより、与えられた section $\alpha : G_L \to \pi_1(X \underset{K}{\otimes} L)$ に対して、$\alpha(G_L)$ を含む $\pi_1(X \underset{K}{\otimes} L)$ の各開部分群 H に対応する $X \underset{K}{\otimes} L$ の被覆 X_H が L^{tame}- 有理点を持つかどうかを群論的に判定することができます。問題は、これは α 自身が幾何的であることの必要条件でしかないことで、これで十分であることを言わなければなりません。有限体上の場合は、Tikhonov の定理によって有理点の塔が自明な意味で収束したのですが、今度は、有理点の塔が $\widehat{L^{\mathrm{tame}}}$- 有理点として（ただ 1 つの点に）$p$ 進収束することを示します。（唯一性から descent できて L- 有理点となることがわかります。）この部分は、mod p^N 版の p 進 Hodge 理論の力を借ります。

§7. Higher-dimensional varieties

現在ある肯定的な結果はすべて曲線の場合に帰着して示されており、「局所構造の復元」という観点から付け加えることはありません。文献は次の通りです：

(Negative)

- Siegel modular varieties, Hilbert modular varieties : [IhNa]

(Affirmative)

- Configuration spaces of curves (esp. $M_{0,n}$) : [Nakamura4–6][NaTak][IhNa]
- Hyperbolically fibered surfaces : [Mochizuki5]

§8. Curves over algebraically closed fields

文献は次の通りです：

(Negative)

char $= 0$:

- $\pi_1(X) \simeq \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \mid [\alpha_1, \beta_1] \ldots [\alpha_g, \beta_g]\gamma_1 \ldots \gamma_n = 1\rangle^{\wedge}$: [GrRa]
- $G_{k(X)}$: free profinite group of rank $|k|$: [Douady] (cf. [Bogomolov1–3])
  (Description of $G_{\mathbb{R}(T)}$: [KrNe])

char $= p > 0$:

- $\pi_1(X)^{\text{pro-}p'} \simeq \langle \ldots \rangle^{\wedge \text{pro-}p'}$: [GrRa]
- Abhyankar's conjecture : [Abhyankar1,2][Serre1,2][Raynaud][Harbater1][Pop6]
- $G_{k(X)}$: free profinite group of rank $|k|$: [Pop3,6][Harbater4] (cf. [Bogomolov1–3])

(Affirmative (char $= p > 0$))

∘ Examples : [Harbater2,3] (cf. [Asada])

∘ Genus 0 : [Tamagawa3]

ここでは、[Tamagawa3] における局所構造の復元について簡単に説明します。

k を標数 $p > 0$ の代数閉体とし、X を k 上 smooth, connected な曲線とします。X^* を X の（smooth な）compact 化、g をその種数、n を $S \stackrel{\mathrm{def}}{=} X^* - X$ の点の数とします。各 $x \in S$（の延長）に対して定まる惰性群（＝分解群）$I_x \subset \pi_1(X)$ の集合を $\pi_1(X)$ だけから群論的に復元するというのが問題です。k の標数が 0 の時には、このようなことは望めません。実際、$n > 0$ ならば、上で述べたように $\pi_1(X)$ は階数 $2g + n - 1$ の自由 profinite 群となり、したがって、一般には惰性群の集合を保たないような自己同型がいくらでもあります。

証明は、まず、$\pi_1(X)$ から群論的に (g, n) を復元します。この部分で既に標数 0 だとうまくいかない（$2g + n$ は復元可能）のですが、正標数に固有な現象である p-rank に関する Deuring-Shafarevich の公式などを用いてクリアします。

あとは、次のような問題になります：$\pi_1(X)$ の開部分群 H に対して、対応する X の被覆を X_H、X_H における S の（集合論的な）逆像を S_H とする。$\pi_1(X)$ の各開部分群 N に対し、$G_N = \pi_1(X)/N$ が S_N に作用するが、これを（同型を除いて）群論的に復元せよ。

これができれば、作用の固定部分群の集合として G_N の中の惰性群の集合が復元されます。ここでは、有限群の置換表現に関する次の簡単な補題の力を借ります。

Lemma. *Let G be a finite group, and X_i a finite set on which G acts (i=1,2). If, for all $i = 1, 2$ and for all $P_i \in X_i$, the stabilizer of P_i in G is cyclic, then the following are equivalent.*

(i) *X_1 is isomorphic to X_2 as G-sets.*

(ii) *For any subgroup H of G, $\sharp(H\backslash X_1) = \sharp(H\backslash X_2)$ holds.*

$\pi_1(X)$ の各開部分群 H に対して $n_H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sharp(S_H)$ は群論的に復元されていますから、X_N/X が至る所高高 tame ならば、（惰性群が巡回群になるので）この補題から直ちに G_N の S_N への作用が（同型を除いて）復元されます。一般には、各 $H = \pi_1(X_H)$ に対する tame 基本群 $\pi_1^{\mathrm{tame}}(X_H)$ の中の惰性群の集合をまず復元し、それらを「つなげる」ことによって証明します。

References

[Abhyankar1] Shreeram S. Abhyankar, *Coverings of algebraic curves*, Amer. J. Math. **79** (1957), 825–856.

[Abhyankar2] ———, *Galois theory on the line in non-zero characteristic*, Bul. (New Ser.) AMS **27** (1992), 68–133.

[Artin] Emil Artin, *Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen*, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **3** (1924), 319–323.

[ArSc] Emil Artin and Otto Schreier, *Eine Kennzeichnung der reell-abgeschlossenen Körper*, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **5** (1927), 225–231.

[Asada] Mamoru Asada, *On the Action of the Frobenius Automorphism on the Pro-l Fundamental Group*, Math. Z. **199** (1988), 15–28.

[Bogomolov1] Fedor A. Bogomolov, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), no. 1; English transl., *Abelian subgroups of Galois groups*, Math. USSR Izv. **38** (192), no. 1, 27–67.

[Bogomolov2] ———, *On Two Conjectures in Birational Algebraic Geometry*, ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Algebraic Geometry and Analytic Geometry (A. Fujiki, K. Kato, T. Katsura, Y. Kawamata and Y. Miyaoka, eds.), Springer-Verlag, Tokyo, 1991, pp. 26–52.

[Bogomolov3] ———, *Commuting elements in the Galois groups of the functional fields*, preprint.

[Diekert] Volker Diekert, *Über die absolute Galoisgruppe dyadischer Zahlkörper*, J. reine angew. Math. **350** (1984), 152–172.

[Douady] Adrien Douady, *Détermination d'un groupe de Galois*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 5305–5308.

[Efrat] Ido Efrat, *A Galois-theoretic characterization of p-adically closed fields*, Israel J. Math. **91** (1995), 273–284.

[Grothendieck1] Alexander Grothendieck, *A letter to Gerd Faltings* (1983).

[Grothendieck2] ———, *Esquisse d'un programme*, preprint (1984), to appear in "Geometric Galois Actions" (L. Schneps and P. Lochak eds.), London Math. Soc. Lecture Note, No.241, Cambridge U.P., 1997.

[GrRa] Alexander Grothendieck and Mme. M. Raynaud, *Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois Marie 1960/61, Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[Harbater1] David Harbater, *Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves*, Invent. math. **117** (1994), 1–25.

[Harbater2] ———, *Galois groups with prescribed ramification*, Contemporary Math. **174** (1994), 35–60.

[Harbater3] ———, *Fundamental Groups of Curves in Characteristic p*, in Proceedings of the ICM, Zürich, Switzerland 1994, Birkäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1995, pp. 656–666.

[Harbater4] ———, *Fundamental groups and embedding problems in characteristic p*, Contemporary Math. **186** (1995), 353–369.

[Hironaka] Yumiko Hironaka-Kobayashi, *On the Galois groups of the maximal p-extensions of algebraic number fields*, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **27** (1976), no. 2, 99–105.

[IhNa] Yasutaka Ihara and Hiroaki Nakamura, *Some Illustrative Examples for Anabelian Geometry in High Dimensions*, preprint RIMS-1110.

[Ikeda1] Masatoshi Ikeda, *On the group of automorphisms of the absolute Galois group of the rational number field*, Archiv der Math. **26** (1975), 250–252.

[Ikeda2] ———, *Completeness of the absolute Galois group of the rational number field*, J. reine angew. Math. **291** (1977), 1–22.

[Ikeda3] ———, *On automorphisms of Galois groups*, manuscript.

[Iwasawa] Kenkichi Iwasawa, *Automorphisms of Galois groups of number fields*, manuscript (1975).

[Jakovlev1] A.V. Jakovlev, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **32** (1968), no. 6, 1283–1322; English transl., *The Galois group of the algebraic closure of a local field*, Math. USSR Izv. **2** (1968), 1231–1269.

[Jakovlev2] ———, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 1; English transl., *Remarks on my paper "The Galois group of the algebraic closure of a local field"*, Math. USSR Izv. **12** (1978), 205–206.

[Jannsen] Uwe Jannsen, *Über Galoisgruppen lokaler Körper*, Invent. math. **70** (1982), 53–69.

[JanWi] Uwe Jannsen and Kay Wingberg, *Die Struktur der absoluten Galoisgruppe $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper*, Invent. math. **70** (1982), 71–98.

[JarRi1] Moshe Jarden and Jürgen Ritter, *On the Characterization of the Local Fields by Their Absolute Galois Groups*, J. Number Th. **11** (1979), 1–13.

[JarRi2] ———, *Normal automorphisms of absolute Galois groups of $\mathfrak{p}$-adic fields*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 1, 47–56.

[Jenkner] Wolfgang Jenkner, *Les corps p-adiques dont les groupes de Galois absolus sont isomorphes*, Astérisque **209** (1992), 221–226.

[Kanno] Tsuneo Kanno, *Automorphisms of the Galois group of the algebraic closure of the rational number filed*, Kōdai Math. Sem. Rep. **25** (1973), 446–448.

[Koch1] Helmut Koch, *Über Galoissche Gruppen von $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörpern*, Math. Nachr. **29** (1965), 77–111.

[Koch2] ———, *Über die Galoissche Gruppe der algebraischen Abschließung eines Potenzreihenkörpers mit endlichem Konstantenkörper*, Math. Nachr. **35** (1967), 323–327.

[Koch3] ———, Dokl. Akad. Nauk SSSR **238** (1978), no. 1; English transl., *The Galois group of a p-closed extension of a local field*, Soviet. Math. Dokl. **19** (1978), no. 1, 10–13.

[Koenigsmann] Jochen Koenigsmann, *From p-rigid elements to valuations (with a Galois-characterization of p-adic fields)*, with Appendix by Florian Pop, J. reine angew. Math. **465** (1995), 165–182.

[Komatsu1] Keiichi Komatsu, *The Galois group of the algebraic closure of an algebraic number field*, Kōdai Math. Sem. Rep. **26** (1974), 44–52.

[Komatsu2] ———, *A remark of a Neukirch's conjecture*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), no. 4, 253–255.

[KrNe] Wolfgang Krull and Jürgen Neukirch, *Die Struktur der absoluten Galoisgruppe über dem Körper $\mathbf{R}(t)$*, Math. Ann. **193** (1971), 197–209.

[Mochizuki1] Shinichi Mochizuki, *The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **3** (1996), 571–627.

[Mochizuki2] ———, *The Local Pro-p Grothendieck Conjecture for Hyperbolic Curves*, preprint RIMS-1045 (1995).

[Mochizuki3] ———, *A Version of the Grothendieck Conjecture for p-adic Local Fields*, preprint RIMS-1069 (1996).

[Mochizuki4] ———, *The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves*, preprint RIMS-1097 (1996).

[Mochizuki5] ———, *A Grothendieck Conjecture-Type Result for Certain Hyperbolic Surfaces*, preprint RIMS-1104 (1996).

[Nakamura1] Hiroaki Nakamura, *Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line*, J. reine angew. Math. **405** (1990), 117–130.

[Nakamura2] ———, *Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines*, J. reine angew. Math. **411** (1990), 205–216.

[Nakamura3] ———, *On galois automorphisms of the fundamental group of the projective line minus three points*, Math. Z. **206** (1991), 617–622.

[Nakamura4] ———, *Centralizers of Galois Representations in Pro-l Pure Sphere Braid Groups*, Proc. Japan Acad. **67** (1991), Ser. A

[Nakamura5] ———, *Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties*, International Journal of Mathematics **4** (1993), 421–438.

[Nakamura6] ———, *Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **1** (1994), 71–136.

[Nakamura7] ———, *On exterior Galois representations associated with open elliptic curves*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 197–231.

[Nakamura8] ———, 副有限基本群のガロア剛性, 数学 **47** (1995), 1–17 (Japanese); English transl., *Galois rigidity of profinite fundamental groups*, to appear in Sugaku Exposition (AMS).

[Nakamura9] ———, *Coupling of universal monodromy representations of Galois-Teichmüller modular groups*, Math. Ann. **304** (1996), 99–119.

[NaTak] Hiroaki Nakamura and Naotake Takao, *Galois rigidity of pro-l pure braid groups of algebraic curves*, preprint UTMS 95-30, to appear in Trans. Amer. Math. Soc. (1995).

[NaTs] Hiroaki Nakamura and Hiroshi Tsunogai, *Some finiteness theorems on Galois centralizers in pro-l mapping class groups*, J. reine angew. Math. **441** (1993), 115–144.

[Neukirch1] Jürgen Neukirch, *Über eine algebraische Kennzeichnung der Henselkörper*, J. reine angew. Math. **231** (1968), 75–81.

[Neukirch2] ———, *Kennzeichnung der p-adischen und endlichen algebraischen Zahlkörper*, Invent. math. **6** (1969), 296–314.

[Neukirch3] ———, *Kennzeichnung der endlich-algebraischen Zahlkörper durch die Galoisgruppe der maximal auflösbaren Erweiterungen*, J. reine angew. Math. **238** (1969), 135–147.

[Neukirch4] ———, *Über die absoluten Galoisgruppen algebraischer Zahlkörper*, Astérisque **41–42** (1977), 67–79.

[Pop1] Florian Pop, *Galoissche Kennzeichnung p-adisch abgeschlossener Körper*, J. reine angew. Math. **392** (1988), 145–175.

[Pop2] ———, *On Galois theory of function fields of one variable over number fields*, J. reine angew. Math. **406** (1990), 200–218.

[Pop3] ———, *The geometric case of a conjecture of Shafarevich*, Heidelberg-Mannheim, Preprint series Arithmetik (1993), no. 8.

[Pop4] ———, *On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry*, Annals of Math. **138** (1994), 145–182.

[Pop5] ———, *On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry II*, Preprint Series Arithmetik II, No.16, Heidelberg (1995).

[Pop6] ———, *Étale Galois covers of affine smooth curves. The geometric case of a conjecture of Shafarevich. On Abhyankar's conjecture*, Invent. math. **120** (1995), 555–578.

[Pop7] ———, *Glimpses of Grothendieck's Anabelian Geometry*, preprint.

[Raynaud] Michel Raynaud, *Revêments de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Invent. Math. **116** (1994), 425–462.

[Ritter] Jürgen Ritter, *$\mathfrak{P}$-adic Fields Having the Same Type of Algebraic Extensions*, Math. Ann. **238** (1978), 281–288.

[Serre1] Jean-Pierre Serre, *Construction de revêtements étales de la droite affine en caracteristique p*, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), Sér. I, 341–346.

[Serre2] ———, *Revêtements de courbes algébriques*, Sém. Bourbaki 44ème année, 1991/92, no. 749, Astérisque **206** (1992), 167–182.

[Spiess] Michael Spiess, *An arithmetic proof of Pop's theorem concerning Galois groups of function fields over number fields*, J. reine angew. Math. **478** (1996), 107–126.

[Sueyoshi] Yutaka Sueyoshi, *A Characterization of Number Fields by p-Closed Extensions*, J. Number Th. **28** (1988), no. 2, 145–151.

[Tamagawa1] Akio Tamagawa, *The Grothendieck Conjecture for Affine Curves*, preprint RIMS-1064, to appear in Compositio Math. (1996).

[Tamagawa2] ———, 代数曲線の数論的基本群に関する *Grothendieck* 予想, 第４１回代数学シンポジウム報告集 (1996), 73–82. (Japanese)

[Tamagawa3] ———, in preparation.

[Tsunogai] Horoshi Tsunogai, *On the Automorphism Group of a Free Pro-l Meta-abelian Group and an Application to Galois Representations*, Math. Nachr. **171** (1995), 315–324.

[Uchida1] Kôji Uchida, *Isomorphisms of Galois groups*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), no. 4, 617–620.

[Uchida2] ———, *Isomorphisms of Galois groups of algebraic number fields*, in Algebraic Number Theory, Papers contributed for the Kyoto International Symposium, 1976 (S. Iyanaga, ed.), . Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo, 1977, pp. 263–266.

[Uchida3] ———, *Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields*, Annals of Mathematics **106** (1977), 589–598.

[Uchida4] ———, *Isomorphisms of Galois groups of solvably closed Galois extensions*, Tôhoku Math. J. **31** (1979).

[Uchida5] ———, *Homomorphisms of Galois groups of solvably closed Galois extensions*, J. Math. Soc. Japan **33** (1981), no. 4, 595–604.

[Voevodskiĭ1] V. A. Voevodskiĭ, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), no. 6; English transl., *Étale topologies of schemes over fields of finite type over* **Q**, Math. USSR Izv. **37** (1991), no. 3, 511–523.

[Voevodskiĭ2] ———, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), no. 6; English transl., *Galois representations connected with hyperbolic curves*, Math. USSR Izv. **39** (1992), 1281–1291.

[Voevodskiĭ3] ———, Uspekhi Mat. Nauk **46** (1991), no. 5; . English transl., *On Galois groups of functional fields over fields of finite type over* **Q**, Russian Math. Surveys **46** (1991), no. 5, 202–203.

[Wingberg] Kay Wingberg, *Der Eindeutigkeitssatz für Demuškinformationen*, Invent. math. **70** (1982), 99–113.

[Yamagata] Shuji Yamagata, *A Counterexample for the Local Analogy of a Theorem by Iwasawa and Uchida*, Proc. Japan Acad. **52** (1976), no. 6, 276–278.

[Zel'venskiĭ] I. G. Zel'venskiĭ, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), no. 5; English transl., *On the algebraic closure of a local field for* $p = 2$, Math. USSR Izv. **6** (1972), no. 5, 925–937.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-01, Japan

E-mail address: tamagawa@kurims.kyoto-u.ac.jp