数理解析研究所講究録
998巻 1997年 54-66

3次のGauss和と関係する初等的な積について

名大 多元数理 伊藤 博 (Hiroshi Ito)

1. 主結果.

この小論は[I]の続編であり，主な結果は[I2]として印刷される予定である．$\rho=e^{2\pi i/3}$ とし，ω を2次体 $\mathbb{Q}(\rho)$ の素idealで1次かつ3と素なものの生成元とする．また，ω は $\omega\equiv 1 \pmod 3$ と取られているとし，$p=\omega\overline{\omega}$ とおく（$\overline{\omega}$ は ω の複素共役である）．3次のGauss和 $\tau_3(\omega)$ を

$$\tau_3(\omega)=\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{\omega}\right)_3 e^{2\pi i a/p}$$

で定義する．ここで $\left(\frac{a}{\omega}\right)_3$ は $\mathbb{Q}(\rho)$ の3乗剰余記号である．次に，標題の「初等的な積」を定義する．複素平面 $\mathbb{C}$ 上の2つの関数

$$g(z)=e(z)+\rho e(\rho z)+\rho^2 e(\rho^2 z),\qquad G(z)=e(z)+e(\rho z)+e(\rho^2 z)$$

を考える．但し，$e(z)=\exp\left(2\pi\frac{z-\overline{z}}{\sqrt{3}}\right)=\exp\left(2\pi i\, tr\left(\frac{z}{\rho-\rho^2}\right)\right)$ である（tr は $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ のトレース）．S を $\bmod\ \omega$ の $\frac{1}{3}$-代表系とする；すなわち S は整数環 $\mathbb{Z}[\rho]$ の $(p-1)/3$ 個の元か

らなる部分集合で，$\lambda, \rho\lambda, \rho^2\lambda$ （$\lambda \in S$） の全体が $\mathbb{Z}[\rho]/\omega\mathbb{Z}[\rho]$ の既約剰余類の完全代表系となるようなものである．このような S に対しては，-1 の3乗根 $\alpha(S)$ を

$$\alpha(S) \equiv \prod_{\lambda \in S} \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)$$

で定めることができる．関数 $g(z)$, $G(z)$ は $\mathbb{Z}[\rho]$ を周期としてもち，また

$$g(\rho z) = \rho^{-1} g(z), \quad G(\rho z) = G(z)$$

を満たす．よって，2つの積

$$\alpha(S) \prod_{\lambda \in S} g\left(\frac{\lambda}{\omega}\right), \qquad \prod_{\lambda \in S} G\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)$$

は S の取り方に依らない．次が本小論の主結果である．

<u>定理</u> ある絶対定数 C （>0） が存在して，

$$\alpha(S)\, p^{1/3} \prod_{\lambda \in S} \frac{g\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)}{G\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)} \sim C \left(\frac{3}{\omega}\right)_3 \overline{\tau_3(\omega)} \quad \text{as } p \to \infty.$$

ここで，上の "$\sim$" は，両辺の商が，$p \to \infty$ のとき 1 に収束することを意味する（以下同様）．証明の基本手法は [I] の主結果のそれとほぼ同じである．本小論では証明には立ち入らないことにするが，証明の過程で，定理の定数 C は下に記すように与えられることがわかる．いま $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\rho]$ の（境界の考察を除いた）基本領域 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} ;\ |z| < |z-u| \quad (0 \neq u \in \mathbb{Z}[\rho]) \}$$

ととる．このとき，

$$3\log C = \log 3 - \log(2\sqrt{3}\pi) - \frac{2}{\sqrt{3}}\int_D \log|z|\,d\mu$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{0\neq a\in\mathbb{Z}[\rho]}\int_D \log\left|1+\frac{z}{a}\right|d\mu - \frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{a\in\mathbb{Z}[\rho]+\frac{1}{\lambda}}\int_D \log\left|1+\frac{z}{a}\right|d\mu$$
$$+\frac{6}{\sqrt{3}}\sum_{a\in\mathbb{Z}[\rho]+\frac{1}{3}}\int_D \log\left|1+\frac{z}{a}\right|d\mu$$

となる．但し，$\lambda=\rho-\rho^2=\sqrt{3}i$，また μ は $\mathbb{C}$ の Lebesgue 測度である．近似計算により，$C=1.135\cdots$ となることがわかる．定理の両辺を3乗して $\tau_3(\omega)^3=-p\omega$ を用いれば，次の系を得る．

系 $\displaystyle\prod_{a=1}^{p-1}\frac{g\left(\frac{a}{\omega}\right)}{G\left(\frac{a}{\omega}\right)}\sim C^3\overline{\omega}$ as $p\longrightarrow\infty$.

以下では，定理の証明は一際省略し（[I2]参照），上記のような結果に至った背景・経緯や動機などについて，説明したい．

2. 背景と動機．

上記の定理と系は，それぞれ，奇素数 p に対して成立する

$$\prod_{\substack{a=1\\2\nmid a}}^{p-1}\frac{e^{2\pi ia/p}-e^{-2\pi ia/p}}{e^{2\pi ia/p}+e^{-2\pi ia/p}}=\left(\frac{2}{p}\right)\tau_2(p),$$

$$\prod_{a=1}^{p-1}\frac{e^{2\pi ia/p}-e^{-2\pi ia/p}}{e^{2\pi ia/p}+e^{-2\pi ia/p}}=p$$

の類似と見なせる．ここで $\left(\frac{a}{p}\right)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の平方剰余記号で，$\tau_2(p)$ は Gauss 和

$$\tau_2(p)=\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right)e^{2\pi ia/p}$$

である．第1の等式は，よく知られた等式

$$(2.1)\qquad \tau_2(p)=\prod_{\substack{a=1\\2\nmid a}}^{p-1}\left(e^{2\pi ia/p}-e^{-2\pi ia/p}\right)$$

から容易に従うものである．筆者の研究の動機は，さかのぼれば，これの高次の Gauss 和への拡張を考えたい，ということである．拡張を考えたいと思う理由は，（説明の要もないかも知れぬが，）第1に，この（和）＝（積）という式自体が見事にきれいな式だと思われ魅力的であること（テータ関数に関する Jacobi の積公式も同様である．２つの積公式の関係については，Sczech [S] の考察がある），第２に，積で表示できれば Gauss 和の偏角がわかり易くなる可能性があると思われること（実際 $\tau_2(p)$ については，そうであった），の２つが主である．このような拡張の考察は，他の研究者によっても行なわれており，主なものに，Loxton [L]，Matthews [M]，Reshetukha [R] などがある．彼らの仕事については，すでに [I] で触れたので，ここでは [I] の記述との重複をできるだけ避けるようにしたい．

さて，上記のような問題を考えようとすれば，自然な成り行きとして，まず３次の Gauss 和が考察の対象となろう（い

きなり一般のGauss和について考えるという道もあり得ないわけではなかろうが). 結論から言えば, この3次の場合には, 我々の問題は一応の解答を得ている. 1の定理を記したときの記号に戻ると, $\tau_3(\omega)$ と関係する積として, 次の2種類のタイプのものが考えられている. ひとつは楕円関数の等分値の積で, 楕円関数として例えば Weierstraß の $\wp$-関数を使えば,

$$(2.2) \qquad \tau_3(\omega) = \alpha(S)^{-1} p^{1/3} \omega \prod_{\lambda \in S} \wp\left(\frac{\lambda\theta}{\omega}\right)$$

なる等式が成り立つ (Matthews [M]). ここで, $\wp$ は $\wp'^2 = 4\wp^3 - 1$ を満たす $\wp$-関数, $\theta\ (>0)$ は $\mathbb{Z}[\rho]\theta$ が $\wp$ の周期格子となるような数である. もうひとつのタイプは, もっと初等的な関数 (ここでの $g(z)$ のようなもの) を使った積であり, [L], [R], [I] などで考察されている. 例えば [I] の結果を再記すれば,

$$(2.3) \qquad \arg\left\{\left(\frac{3}{\omega}\right)_3^{-1} \tau_3(\omega) \cdot \alpha(S) \prod_{\lambda \in S} g\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)\right\} \to 0 \quad \text{as } p \to \infty$$

が成り立つ. これは1の定理の主張の"偏角部分"である.

なお, [L]にも記されているように, ここに現れる積 $\prod_{\lambda \in S} g\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)$ は, 150年ほど前の Cauchy の論文 [C] にすでに見い出せるものである (もちろん, このままの形ではないが, 若干の変形で同じものになる. また [C] のこのタイプの積に関する議論は, 3次に限ったものではない; [L]参照). 以上3次

の場合について記したことは，4次・6次の場合についてもほとんど同様に言える（［I］参照）．

そこで，次に5次の場合を考えたいわけであるが（こう進むのが自然と思われるが，あるいは，8次，12次を先に考察してもよいのかも知れない），明らかな理由により，(2.3) の拡張の方が (2.2) のそれより，うまくいく見込みがありそうである．関数 $g(z)$ の形式的な拡張は，$\mathbb{C}^2$ 上の関数として容易に作れるが，これを用いて数値実験を中心とする試行錯誤を行ってみても，今の所あまり希望を与えてくれるような知見を得ていない．話が多少前後するが，ここで試行したのは，(2.3) を3乗した所の

(2.4) $$\arg\left\{\omega\prod_{a=1}^{p-1} g\left(\frac{a}{\omega}\right)\right\}\to 0 \quad \text{as} \quad p\to\infty$$

を5次の場合に拡張しようという問題である（Loxton は，これを証明した上で，(2.3) を予想した）．そこで少し引きさがって，(2.3) あるいは (2.4) について再考してみると，いくつか気になる問題点が浮かび上ってくる．まず，(2.3) の証明は，現在の所，一通りしかないが，そこでは実は (2.2) が利用されるのである．こういう状況が変わらなければ，(2.2) のタイプの積表示の拡張でなく，(2.3) の拡張に向かった意味が半減するだろう．次に，(2.4) の証明も，これまた現在の所，本質的には一通りと言ってよく，基本的なアイデアは，

等分値 $g(\frac{a}{\omega})$ をしかるべき積分で近似するというものである。しかしながら，このような扱い方をする時，一番デリケートな問題をひき起こすのは，$g(z)$ の 0 点の近くでの近似の評価である。高次への拡張を考えるとき，扱わなければならない関数は多変数のものになるだろうし，そうするとその 0 点は孤立点ではなくなるだろうから，上記のような扱い方は，我々にとってあまり好都合なものとは言えない。

以上のような経緯を経て，筆者は，(2.4) の積 $\prod_{a=1}^{p-1} g(\frac{a}{\omega})$ を今まで [L]，[I] などで用いられてきたのとは別の，もっと直接的な手法で扱えないものか（，そしてできれば，(2.3) の (2.2) を使わなくて済む別証明を得たいものだ），と思うようになった。そのような視点で文献を眺めたとき，注目するに価すると思われたのが，Reshetukha [R] であった。主の定理は，Reshetukha の仕事を上記の視点から見直しての，ひとつの副産物である。「副産物」と言うのは，結局，この段落の初めに記した当初の課題は，解答を得ていない（少なくとも今の所）からである。節を改めて，[R] と本小論の結果との関係を概説しよう。

3. Reshetukha の仕事との関係.

彼の扱い方は，非常に elementary なものであるが，(2.4)

の成立を，少なからず"感覚的に"納得させてくれる．また，安直な5次（あるいはもっと高次）の場合への拡張のアイデアが，どのような問題を含んでいるかも，ある程度示してくれる（これについては，本小論では略す．まだ十分考察を尽くしていないので）． $\underline{\underline{1}}$，定理の記号を使う． Cauchyにより

$$\prod_{\lambda\in S} g\left(\frac{\lambda}{\omega}\right) = \gamma\,\tau_3(\omega)$$

となる数γが$\mathbb{Z}[\rho]$の中に存在する．いま，

$$\Omega := \frac{1}{p}\prod_{a=1}^{p-1} g\left(\frac{a}{\omega}\right) = \frac{1}{p}\left(\prod_{\lambda\in S} g\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)\right)^3 = -\gamma^3\omega$$

で，(2.4)は，

(3.1) $$\arg(\omega\Omega) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad p\longrightarrow\infty$$

とかける．ReshetukhaのΩの扱い方の基本は，まず，

(3.2) $$F(z) := \prod_{a=0}^{p-1} g\left(z+\frac{a}{\omega}\right)$$

において，積$\prod_{a=0}^{p-1}$を直接に展開し，しかる後に，極限

(3.3) $$\lim_{z\to 0} F(z)/g(z)$$

を考える，というものである．$F(z)$は，すぐに見れるように，$F(\rho z)=\rho^{-1}F(z)$をみたし，周期$\frac{1}{\omega}\mathbb{Z}[\rho]$をもつから，そのFourier展開は，$\sum_{l} a(l)\,g(lz)$ $(l\in\omega\mathbb{Z}[\rho])$の形にまとめられるはずであるが，こういう考察をぬきにしても，(3.2)を直接に展開してしまえば，

(3.4) $$F(z) = g(pz) + \sum_{l\in\Lambda_0} d(l)\,g(\bar{l}z)$$

なる展開が得られる．ここで，Λ_0は$\bar{\omega}\mathbb{Z}[\rho]$内の有限集合，

また $d(\ell)$ は p で割れる整数となる．Λ_0 と $d(\ell)$ については，しばらく後で，きちんとした表示を与える．$g(z)$ については，

$$\lim_{z\to 0} g(\ell z)/g(z) = \ell$$

が成り立つから，(3.4) を (3.3) に代入してやると，

(3.5) $$\prod_{a=1}^{p-1} g\left(\frac{a}{\omega}\right) = p + \sum_{\ell\in\Lambda_0} d(\ell)\,\ell,$$

すなわち，

(3.6) $$\Omega = 1 + \sum_{\ell\in\Lambda_0} d_0(\ell)\,\ell \qquad \left(d_0(\ell) := \frac{1}{p}\, d(\ell)\right)$$

を得る．以上が，(Λ_0 と $d(\ell)$ の説明を省いた) Reshetukha の考え方のあらすじの説明である．さて，2 の最後に述べた経緯により，我々のここでの差し当りの問題は，(3.6) から (3.1) を導くことはできないか，ということである．この問題は，上に出てくる整数 $d(\ell)$ がどのくらいよくわかるか，という問題に，結局の所，帰着する．現時点での状況は，$d(\ell)$ についてはあまりよくわかっていないが，1 の定理から部分的な結果が導ける，というものである（もちろん，2 の記述から明らかであろうが，事の順序は逆で，この「部分的な結果」が 1 の定理への動機となったのである）．この辺の事情を説明して，この稿を閉じることにするが，まず，(3.4) の Λ_0 と $d(\ell)$ について説明しなければなるまい．

整数 f で，$f \equiv p \pmod{\omega}$ をみたすものをひとつとる．$n \in \mathbb{Z}$ に対し，$\psi_p(n)$ で n を p で割った余り $(0, 1, \cdots, p-1)$ を

表わす。3つの集合 K, K_0, Λ_0 を次のよう定める：

$$K=\{(k_0,k_1,k_2)\,;\ k_0=1,2,\cdots,p-1,\ k_j=\nu_p(f^jk_0)\ (j=1,2)\},$$

$$K_0=\{(k_0,k_1,k_2)\in K\,;\ k_0+\rho^2k_1+\rho k_2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)\},$$

$$\Lambda_0=\{l(k_0,k_1,k_2)\,;\ (k_0,k_1,k_2)\in K_0\}.$$

但し，$l(k_0,k_1,k_2)=k_0+\rho^2k_1+\rho k_2$ とする．$\#K=p-1$, $\#K_0=\#\Lambda_0=(p-1)/6$ で，$K_0\ni(k_0,k_1,k_2)\mapsto l(k_0,k_1,k_2)\in\Lambda_0$ は全単射である．また，$\Lambda_0\subset\varpi\mathbb{Z}[\rho]$ で，

(3.7) $$k_0+k_1+k_2=p\quad((k_0,k_1,k_2)\in K_0)$$

が成り立つ．$l=l(k_0,k_1,k_2)\in\Lambda_0$ に対して，

(3.8) $$d(l)=\frac{1}{k_1!\,k_2!}\sum_{x_1,\cdots,x_{k_1},y_1,\cdots,y_{k_2}\in\mathbb{F}_p\ (\text{すべて異なる})}\zeta^{f\sum_{i=1}^{k_1}x_i-\sum_{j=1}^{k_2}y_j}$$

で $d(l)$ を定める．ここで，$\zeta=e^{2\pi i/p}$, $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$．$d(l)$ は，次のようにも書き表わすことができる．上のような l について，$t(l)=p!/(k_0!\,k_1!\,k_2!)$ とおく．これは，$\mathbb{F}_p$ の部分集合の3つ組 $(\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2)$ で，

(3.9) $$\mathbb{F}_p=\bigcup_{j=0}^{2}\Gamma_j\ (\text{disjoint}),\quad \#\Gamma_j=k_j\ (j=0,1,2)$$

をみたすものの個数である．この条件 (3.9) に加えてさらに，

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_j}\gamma=0\qquad(j=0,1,2)$$

をもみたすような $(\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2)$ の個数を $t_0(l)$ とする．このとき，次が成り立つ：

(3.10) $$d(l)=\frac{1}{p-1}\left(p^2t_0(l)-t(l)\right).$$

$d(\ell) \in p\mathbb{Z}$ となる（以上，[R] 参照）．

さて，以上 $\prod_{a=1}^{p-1} g(\frac{a}{\varpi})$ について考えたが，全く同じことを，

$$M := \prod_{a=1}^{p-1} G\left(\frac{a}{\varpi}\right)$$

について行なうと，(3.6) に対応する式として，

$$M = 1 + ph \qquad \left(h := \sum_{\ell \in \Lambda_0} d_0(\ell) \right)$$

を得る．そしてこれにより (3.6) を少し変形すると，

(3.11) $$\Omega = 1 + h\bar{\varpi} + \sum_{\ell \in \Lambda_0} d_0(\ell)(\ell - \bar{\varpi})$$

という式が得られる．$d_0(\ell) = \frac{1}{p} d(\ell)$ については，(3.8), (3.10) などの表示がある他は，$|\ell - \bar{\varpi}|$ が大きくなるにつれて $|d_0(\ell)|$ が小さくなる傾向を示している若干の数値例があるだけである．h に関連して，[R] には "evaluation shows that h increases significantly as p increases" とあり，また，"(by (3.11)) it is natural to suppose that the term $h\bar{\varpi}$ is in the same sextant inside which Ω lies" とある．$p \to \infty$ のときの h の増加傾向については，筆者自身も数値計算で確認した（もっとも，そのことの実際は，数値がどんどん大きくなるのを目で見て実感した，という感じに過ぎないが）．いずれにせよ，当初の筆者の期待は，「$h\bar{\varpi}$ が (3.11) において $p \to \infty$ のときの main term を与えていて，これが (3.1) の成立する理由なのではなかろうか」というものであった．本小論の結果（1，定理）は，この問に解答を与えてくれる．すなわち定理の系によれば，

(3.12) $$\lim_{p\to\infty} |h\varpi/\Omega| = \lim_{p\to\infty} \left| \frac{M\varpi}{p\Omega} - \frac{\varpi}{p\Omega} \right| = C^{-3} = 0.68\cdots$$

となり，上の期待は否定的な答を得たわけである．しかしながら，この結果は，$h\varpi$ が (3.11) において一定の割合で Ω に寄与している（すなわち，とにかく (3.12) の極限が存在する）ことを示しており，微小なものとはいえひとつの成果ではあろう（(3.6) の少し下で「部分的な結果」と呼んだのは，(3.12) のことである）．$d(\ell)$ の性質をさらに研究すれば，(3.6) を利用した，(3.1) あるいは (2.4) の別証明が得られるかもしれない．

文献

[C] A. Cauchy, Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binomes, J. de Math., 5 (1840), 154 -168.

[I] 伊藤　博, 3次の Gauss 和の偏角を近似する初等的な積について, 数理解析研究所講究録, 837 (1993), 14 - 24.

[I 2] H. Ito, On a product related to the cubic Gauss sum, II, to appear in Nagoya Mathematical Journal.

[L] J. H. Loxton, Products related to Gauss sums, J. reine angew. Math., 268/269 (1974), 202 - 213.

[M] C. R. Matthews, Gauss sums and elliptic functions : I. The Kummer sums, Invent. Math., 52 (1979), 163 -185.

[R] I. V. Reshetukha, A product related to the cubic Gauss sum, Ukrain. Math. J., 37 (1985), 611 -616.

[S] R. Sczech, Gaussian sums, Dedekind sums and the Jacobi triple product identity, submitted to Kyushu Journal of Mathematics.

付記：この機会に、本講究録収録の以前の私の小論中の誤りについてコメントする事を、お許し頂きたい。講究録 726 (1990) の「Dedekind 和と平方剰余記号」の p. 62 - 64 では、コホモロジー群 $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$ と保型形式の空間 $G_2(\Gamma)$ の関係について、初歩的な誤りとしか言いようの無いことを記してしまった。導入の部分であるので、本論に障りはないが、大なる恥かきではある。然るべき文献を参照していただければ事足りると思うので、訂正には立ち入らない。誤りの存在のみをここにしるしておく。

(９７年３月)