数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 1-18

Base change for GL(N) — A historical survey

京都大学人間環境学研究科
齋藤 裕

土井，長沼両氏により保型形式の base chnage の発見の報告がなされたのは，１９７７年の論文 [D-N1] においてであった．この小論では，前半でその後３０年の発展を概観する．また後半では，現在までのもっとも進んだ結果である Arthur-Clozel の結果を簡単に紹介する．

§1. 起源と動機

上記論文 [D-N1] はガロア群の志村曲線への作用について考察したものであるが，この節ではその論文の base change と関連する結果を紹介し，これと関連して local Langlands 予想について述べる．

$E/F(=\boldsymbol{Q})$ を実二次体とする．B を E 上の 4 元数環で，一つの無限素点が split しているもの，すなわち

$$B\otimes_E \boldsymbol{R}\simeq \boldsymbol{H}\times M_2(\boldsymbol{R})$$

を満たすものとする．ここで $\boldsymbol{H}$ はハミルトンの 4 元数環である．O をその極大整環とすると，そのノルム 1の元のなす群 O^1 は複素上半平面 $\mathcal{H}$ に作用し，その商空間として代数曲線が得られるが，例えば E の類数が 1とすると E 上定義された代数曲線 A で

$$A\times_E \boldsymbol{C}\simeq(\mathcal{H}/O^1)^*$$

を満たすものが存在する．簡単のため A は楕円曲線と仮定すると，A の E 上のゼータ関数 $\zeta_A(s)$ は，$B^\times$ 上の保型形式 f_E を用いて

$$\zeta_A(s)=L(s,f_E)$$

と表される．ここで A が F 上定義されたモデル A' を持つとする．すなわち，$A'\times_F E\simeq A$. これは，例えば B の判別式 $D(B)$ がガロア群 $\mathrm{Gal}(E/F)$ の作用で不変なとき成り立つことが [D-N1] で示されている．このとき F 上の 4 元数環 B' とその整環 O' で uniformization $\mathcal{H}/O'^1\longrightarrow A'$ を持つものが存在すると予想される（これは今日では多くの場合正しいことが確かめられているが）．これを仮定すると B' 上の保型形式 f で,

$$L(s,f_E)=L(s,f)L(s,f,\chi)$$

を満たすものが存在する．ここでχ は二次拡大 E/F に対応する F の指標である．このとき f, f_E のフーリエ係数をそれぞれ a_n, $a(\mathbf{n})$ で表すと

$$\left(\frac{E/F}{p}\right)=1\Longrightarrow a(\boldsymbol{p})=a(\boldsymbol{p}')=a_p,\quad (p)=\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}',$$
$$\left(\frac{E/F}{p}\right)=-1\Longrightarrow a(\boldsymbol{p})=a_p^2-2p,\quad (p)=\boldsymbol{p}$$

が成り立つ．上記論文において，この関係式が，$E = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, $D(B) = \mathbf{p}_2\mathbf{p}_7\mathbf{p}'_7$, $D(B') = 2\cdot 7$ の場合に，１２個の素数について確認された．これが，base change の存在が実際に確かめられた最初であると思われる．

さてこれを逆に次のように考える．A を簡単のため，F 上定義された楕円曲線とする．これから，ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の表現 ρ $(= \{\rho_l\}$, $\rho_l\colon \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_2(\boldsymbol{Q}_l))$ が得られ，それは $\zeta_A(s) = L(s,\rho)$ を満たす．またある場合には，$GL_2(F)$ 上の保型形式 f，あるいは $GL_2(\boldsymbol{A}_F)$ の保型表現 π で関係

$$\zeta_A(s) = L(s,\rho) = L(s,f)(= L(s,\pi))$$

を満たすものが存在する．E を F の拡大体とすると，E 上の楕円曲線 $A_E = A \times_F E$ が得られるが，これから A_E に対応するガロア表現 ρ_E が，ρ の $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ への制限として得られる．また A_E に対し，対応する $GL_2(E)$ 上の保型形式 f_E, あるいは $GL_2(\boldsymbol{A}_E)$ の保型表現π_E が存在すれば，それらは

$$L(s,f_E) = L(s,f)L(s,f,\chi), \quad L(s,\pi_E) = L(s,\pi)L(s,\pi\times\chi)$$

を満たし，f または π の base change であると考えられる．[D-N1] において，このような f_E を見い出す，すなわち base change の存在を示すという問題が提出された．

ここで local Langlands 予想について述べておくことは，全体の見通しをよくする上で意味があると思われる．F を非アルキメデス局所体とする．$\mathcal{A}(n,F)$ で，$GL_n(F)$ の既約許容表現の同値類の集合を表す．また $\mathcal{G}(n,F)$ で，Weil-Deligne 群 W'_F(あるいは，$W_F \times SL_2(\boldsymbol{C})$) の半単純表現の同値類の集合を表す．このとき ([Ku1] 参照)

Conjecture(Langlands) 各自然数 n に対し，$\mathcal{G}(n,F)$ から $\mathcal{A}(n,F)$ への全単射 π_F で次の条件を満たすものがただ一つ存在する．
(1) $F^\times$ の指標 χ に対し $\pi_F(\rho(\chi)) = \pi_F(\rho)(\chi)$.
(2) $\det\rho$ は局所類体論の同型により $\pi_F(\rho)$ の central character $\omega_{\pi_F(\rho)}$ に対応する．
(3) $(\pi_F(\rho))^\vee = \pi_F((\rho)^\vee)$.
(4) $L(s,\rho_1\otimes\rho_2) = L(s,\pi_F(\rho_1)\otimes\pi_F(\rho_2))$.
(5) $\varepsilon(s,\rho_1\otimes\rho_2,\psi) = \varepsilon(s,\pi_F(\rho_1)\times\pi_F(\rho_2),\psi)$.
(6) π_F は conductor を保つ．
(7) F が F_0 の有限次ガロア拡大ならば，π_F は $\mathrm{Gal}(F/F_0)$ の $\mathcal{G}(n,F)$, $\mathcal{A}(n,F)$ への作用と compatible である．

ここで $L(s,\pi_F(\rho_1)\times\pi_F(\rho_2))$, $\varepsilon(s,\pi_F(\rho_1)\times\pi_F(\rho_2),\psi)$ は Rankin-Selberg convolution の L 関数，ε-factor である ([J-P-S2] 参照)．この予想の $n=1$ の場合の対応は局所類体論から導かれるものである．

ここで E を F の拡大体とし，$[E:F] = l$, $G = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, $H = \mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ とする．制限写像を考えることにより自然に $\mathcal{G}(n,F)$ から $\mathcal{G}(n,E)$ への写像 Res が得られるが，このとき上の予想から，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(n,F) & \xrightarrow{\pi_F} & \mathcal{A}(n,F) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Res} & & \Big\downarrow{\scriptstyle BC_{E/F}} \\ \mathcal{G}(n,E) & \xrightarrow{\pi_E} & \mathcal{A}(n,E) \end{array}$$

を可換にするような写像 $BC_{E/F}$ が存在することが導かれる．これがこの状況の下での base change である．また lifting という言葉も使われる．しかし実際は，予想から base change の存在を導くのではなく，base change の存在が π_F の存在を示すのに用いられている (例えば [He], [Ha] 参照．最近，表現の構成から base change の存在を示すことも考えられている [B-H].).

$n=1$ の場合，$N_{E/F}$ で E から F へのノルム写像を表すと，次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc} F^\times & \longrightarrow & G/[G,G] \\ \uparrow{\scriptstyle N_{E/F}} & & \uparrow \\ E^\times & \longrightarrow & H/[H,H] \end{array}$$

ここで $G=\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, $H=\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ で，横向きの写像は類体論の写像，右辺の写像は包含写像から得られる自然な写像である．従って $n=1$ の場合，$BC_{E/F}$ は，$F^\times$ の指標 χ に $E^\times$ の指標 $\chi\circ N_{E/F}$ を対応させるものである．

次に $\rho\in\mathcal{G}(n,F)$ が unramified な表現であるとし，Fr でフロベニウス自己同型を表すことにすると，$F^\times$ の unramified な指標 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n$ で

$$\rho(Fr)(=t_\chi)=diag(\chi_1(\varpi),\chi_2(\varpi),\cdots,\chi_n(\varpi))$$

となるものが存在する．$Q(\chi)$ で指標 χ から決まる $GL_n(F)$ の unramified principal series 表現とすれば，ρ には $Q(\chi)$ が対応する．t_χ は Satake parameter と呼ばれる．これから E/F が unramified の場合には，$Q(\chi)$ の base change は $Q(\chi\circ N_{E/F})$ であり，そのときの Satake parameter の対応は，$t_\chi\longmapsto t_{\chi\circ N_{E/F}}=t_\chi^l$ で与えられる．

この予想は，アルキメデス局所体の拡大，すなわち $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}$ の場合にも考えられ，ほぼ成り立つことが分かっている (cf. [J-S2]).

次に E/F が代数体の有限次拡大の場合を考える．F の素点 v に対し

$$E_v=E\otimes_F F_v=\oplus_{w|v}E_w$$

とし

$$W'_{E\otimes_F F_v}=\prod_{w|v}W'_{E_w},\quad GL_n(E_v)=\prod_{w|v}GL_n(E_w)$$

と置く．このとき上の予想の下で，$\mathcal{A}(n,F_v)$ から $\mathcal{A}(n,E_v)$ への base change を

$$\pi_v\longmapsto\Pi_v=\otimes_{w|v}BC_{E_w/F_v}(\pi_v)$$

で定めれば， global な base change は$\pi=\otimes\pi_v\longmapsto\Pi=\otimes\Pi_v$ で与えられると考えられるが，π が保型表現のとき Π も保型表現であるかどうかが問題である．

次にいくつかの注意を述べる．

Remark 1. G を群, H をその指数有限部分群とし, ρ, λ をそれぞれその有限次元表現とすると

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(\rho)\otimes\lambda)=\rho\otimes\mathrm{Ind}_H^G(\lambda)$$

より

$$\begin{aligned} L_E(s,\mathrm{Res}_H^G(\rho)\otimes\lambda) &= L_F(s,\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(\rho)\otimes\lambda)) \\ &= L_F(s,\rho\otimes\mathrm{Ind}_H^G(\lambda)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

が得られる. 特に, G が H の正規部分群で G/H が可換群のときには

$$\mathrm{Ind}_H^G(1_H)=\oplus_{\chi\in\widehat{G/H}}\chi$$

より $\lambda=1_H$ と置いて

$$L(s,f_E)=\prod_\chi L(s,f,\chi)$$

を得る.

Remark 2. 誘導表現をとることにより, $\mathcal{G}(n,E)$ から $\mathcal{G}(nl,F)$ への自然な写像 Ind が得られるが, それと対応して, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(n,E) & \xrightarrow{\pi_E} & \mathcal{A}(n,E) \\ \downarrow{\scriptstyle Ind} & & \downarrow{\scriptstyle Ind_{E/F}} \\ \mathcal{G}(nl,F) & \xrightarrow{\pi_F} & \mathcal{A}(nl,F) \end{array}$$

を可換にする $\mathcal{A}(n,E)$ から $\mathcal{A}(nl,F)$ への写像 $Ind_{E/F}$が存在すると考えられる. 実際これは $l=2$, $n=2$ のときには, 古典的に Hecke により二次体の指標から得られる保型形式として見い出されている. また [J-L] には $l=2$, $n=2$ の場合が一般に取り扱われている. E, F が局所体で E/F cyclic, $n\geq 2$ のときには [Ka], [H-H] を参照. また base change の証明の中でも現れる ([L] §11, [A-C] Ch.3,§6).

§2. 概観

[D-N1] で見い出された結果を証明するために, 3つの方法が考え出されている. この節ではそれらを順に見ていくことにする.

Converse Theorem

土井, 長沼 [D-N2] は, $n=2$, $l=2$ の場合に Weil - Jacquet - Langlands による GL_2 の保型形式, ないしは保型表現の Converse Theorem が base change の証明に応用できることを見い出した. すなわち

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n\in S_\kappa(SL_2(\mathbf{Z}))$$

を primitive form とし, χ を実二次拡大 E/F に対応する指標として

$$L(s,f)L(s,f,\chi)=\sum_{\boldsymbol{n}} a(\boldsymbol{n})N(\boldsymbol{n})^{-s}$$

とする．簡単のため E の類数を 1 とし，δ で E の相対差積をあらわすことにすると，問題は

$$f_E(z_1,z_2)=\sum_{\boldsymbol{n}}\sum_{n\in\boldsymbol{n}\delta^{-1}>>0} a(\boldsymbol{n})e^{2\pi i\mathrm{tr}(nz)}$$

が，$SL_2(O_E)$ に関する保型形式となることを証明することである．そのためには，E の指標 ξ に対し $L(s,f_E\times\xi)$ が良い関数等式を満たすことを示せばよい．g_ξ を上で述べた ξ から決まる $GL_2(F(=\boldsymbol{Q}))$ の保型形式とすると，(1.1) により

$$L(s,f_E\times\xi)=L(s,f\times g_\xi)$$

だから，f と g_ξ の Rankin-Selberg convolution を用いて示される．これは $n=2$, $l=2$ の場合に [J] において一般的に取り扱われている．

この方法は Jacquet - Piatetski-Shapiro - Shalika (n=3, [J-P-S1]), Cogdell-Piateteski-Shapiro[C-P] の Converse Theorem を用いると次のように一般化されることが期待される．§1 で π から定義された Π が保型表現であることを示すには，$r\le n-1(r\le n-2)$ を満たす r について $GL_r(\boldsymbol{A}_E)$ の保型表現 τ に対し，$L_E(s,\Pi\times\tau)$ の関数等式を証明すればよいが，(1.1) より

$$L_E(s,\Pi\times\tau)=L_F(s,\pi\times\mathrm{Ind}_{E/F}\tau)$$

だから，$L(s,\pi\times\mathrm{Ind}_{E/F}\tau)$ の関数等式を証明すればよい．$r=1$, $l\le 3$ のときには，$\mathrm{Ind}_{E/F}\tau$ が保型表現であることが知られているので（$l=2$ は Hecke, [J-L], $l=3$ の場合は [J-P-S2] の GL_3 の理論による），$[E:F]\le 3$ の場合の base change の存在が示される ([J-P-S2], [J-P-S3])．特にこれは E/F がガロア拡大であることを要求せず，この結果は，Tunnell[T] の octahedral type の Artin 予想の証明に用いられる．

次の二つの方法は，Hirzebruch の次の結果に示唆されたものである．Serre は Hirzebruch への手紙 (Dec. 8, '71) のなかで Hirzebruch の得た Hilbert modular surface の arithmetic genus の式 ([Hir]) から次の式が得られることを注意している．すなわち q を $q\equiv 1 \bmod 4$ なる素数とし，$E=\boldsymbol{Q}(\sqrt{q})$ とする．χ_q で $\mathcal{H}\times\mathcal{H}/SL_2(O_E)$ のコンパクト化の特異点を解消して得られる曲面 Y の arithmetic genus を表し，$\hat{\chi}_q$ で Y/τ の arithmetic genus を表す．ここで τ は，$\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ の自己同型 $(z_1,z_2)\longmapsto(z_2,z_1)$ から得られる Y の自己同型である．このとき

$$\chi_q-1=\frac{1}{2}S_2(\Gamma_0(q),\left(\frac{q}{}\right))+2(\hat{\chi}_q-1)$$

が成り立つ．ここで χ_q-1 は $S_2(SL_2(O_E))$ の次元と一致することが知られている．これと関連して，長沼 [N] は，$S_2(SL_2(O_E))$ の次元と $S_2(\Gamma_0(q),\left(\frac{q}{}\right))$ の次元の比較から，base change

$$S_k(\Gamma_0(q),\left(\frac{q}{}\right))\ni f\longrightarrow f_E\in S_k(SL_2(O_E))$$

$$L(s,f_E)=L(s,f)L(s,\bar{f}),\ f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n,\ \bar{f}=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_nq^n$$

が存在することを見い出した．これは $S_2(\Gamma_0(q),\left(\frac{q}{}\right))$ の primitive form に対応するアーベル多様体が，E 上では everywhere good であることとうまく対応している．

Theta correspondence

Zagier は [Z1] において上で述べた事実に証明を与えるため次のような方法を考えた．$E=\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, $D\equiv 1 \bmod 4$ とし，$\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 上の関数

$$\omega_m(z_1,z_2)=\sum_{\substack{a,b\in\boldsymbol{Z},\lambda\in\delta^{-1}\\ N_{E/F}(\lambda)-ab=m/D}}(az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b)^{-k}$$

を考える．これは $S_k(SL_2(O_E))$ に属することが分かる．$\omega_m(z_1,z_2)$ で，和を $a=0$ となる部分に制限したものを $\omega_m^0(z_1,z_2)$ と書くことにすると

$$\begin{aligned}\Omega(z_1,z_2;\tau)&=\sum_{m=1}^{\infty}m^{k-1}\omega_m(z_1,z_2)e^{2\pi im\tau}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}m^{k-1}\omega_m^0(z_1,z_2)G_n(\tau)\end{aligned}$$

となることが示される．ここで $G_n(\tau)$, $\tau\in\mathcal{H}$ は $S_k(\Gamma_0(D),,\left(\frac{D}{}\right))$ のポアンカレ級数である．これは $\omega_m(z_1,z_2)$, $G_m(\tau)$ 等のフーリェ展開を直接比較することによりかなり面倒な計算の後に示される．これにより $\Omega(z_1,z_2;\tau)$ は (z_1,z_2) の関数としては $S_k(SL_2(O_E))$ の元であり，τ の関数としては，$S_k(\Gamma_0(D),\left(\frac{D}{}\right))$ 元であることが分かるが，Zagier はさらに写像

$$f\longmapsto\int_{\mathcal{H}/\Gamma_o(D)}\Omega(z_1,z_2;\tau)f(\tau)d\tau$$

が base change の写像を与えることを示している．Kudla[Ku2], 織田 [O1]，Rallis[R] 等の人達は，次の二次形式 (V,Q) の空間に付随するテータ対応を考えることによりこの写像が自然に得られることを示している．すなわち

$$V=\{\begin{pmatrix}a&\lambda\\\lambda'&b\end{pmatrix}\mid a,b\in F,\ \lambda\in E\ \}=\{\ x\in M_2(F)\mid {}^t\bar{x}=x\ \},\quad Q(x)=\det x.$$

$E(=\boldsymbol{Q}(\sqrt{q}))$ 上の definite な 4 元数環について同様のことを，Eichler([E1], [E2]), Waldspurger[W], Ponomarev[P] 等が考えている．この方法は

$$O(2,2)\approx SL_2(\boldsymbol{R})\times SL_2(\boldsymbol{R})$$

という特殊な事情を用いており，$n=2$, $l=2$ 以外の場合には用いられない (浅井 [As2] では，$O(1,3)\approx SL_2(\boldsymbol{C})$ を用いて虚二次体への base change を取り扱っている)．勿論，Theta correspondence はこれ以外の場合にも多くの重要な対応を与える ([PSN4] 参照)．

Zagier の関心はこれと異なり Hilbert modular surface の上の曲線

$$T_m = \{\ (z_1, z_2) \mid a z_1 a_2 + \frac{\lambda}{\sqrt{D}} z_2 + \Big(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}\Big)' z_1 + b = 0,$$
$$N(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}) - ab = -\frac{m}{D}\}/SL_2(O_E)$$

の dual を構成することにあったと思われる ([H-Z]). これは織田 [O2] の結果を経て, Harder - Langlands - Rapoport[H-L-R] の ヒルベルト曲面の Tate 予想の証明に導かれる. また $GL_2(\boldsymbol{A}_E)$ 上の central character が trivial な表現に base change される $GL_2(\boldsymbol{A}_F)$ の表現の central character は trivial であるかまたは, 二次拡大 E/F に対応する指標であることが分かる. 浅井 [As1] はこのどちらであるかが, twisted tensor L 関数の極の存在の有無により区別されることを示したが ([PSN3] も参照). これは Tate 予想の証明に重要な役割を果たす.

Twisted trace formula

もう一つの方法は twisted trace formula によるものである. 上で述べた Hirzebruch の式は次のように書き直される.

$$\dim S_2(SL_2(O_E)) = \frac{1}{2}\dim S_2(\varGamma_0(q), \Big(\frac{q}{}\Big)) + 2\dim\{f \in S_2(SL_2(O_E)) \mid I_\sigma f = -f\ \}$$

ここで

$$I_\sigma f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1)$$

である. 容易に分かるように $S_2(SL_2(O_E))$ の Hecke 作用素の固有関数からなる基底を

$$I_\sigma f_1 = f_1,\ \cdots, I_\sigma f_{d_1} = f_{d_1},\ f_{d_1+1},\ I_\sigma f_{d_1+1}, \cdots,\ f_{d_1+d_2},\ I_\sigma f_{d_1+d_2}$$

となるようにとることができる. すなわち $f_1, \cdots,\ f_{d_1}$ は I_σ で不変であり, $f_{d_1+1},\ \cdots,\ f_{d_1+d_2}$ は不変ではない. このとき容易に

$$d_1 = \frac{1}{2}\dim S_2(\varGamma_0(q), \Big(\frac{q}{}\Big)), \quad d_2 = \dim\{f \in S_2(SL_2(O_E)) \mid I_\sigma f = -f\ \}$$

であり, 長沼 [N] の結果を考えると

$$I_\sigma f = f \Longleftrightarrow f \text{ a base change from } S_2(\varGamma_0(q), \Big(\frac{q}{}\Big))$$

と推測される. ここで 1/2 は, $S_2(\varGamma_0(q), \Big(\frac{q}{}\Big))$ の二つの元 $f,\ \bar{f}$ が同じ元に base change されることから自然に説明される. また base change で得られる部分空間における Hecke 作用素 $T(\boldsymbol{n})$ の跡は, 全体の空間における $T(\boldsymbol{n})I_\sigma$ の跡として計算され, 従って, E 上の twisted trace formula($T(\boldsymbol{n})I_\sigma$ の跡公式) と, F 上の通常の trace formula を比較することにより, base change の存在とそれによる像の特徴付けが与えられると期待さる. しかもこ

れは，E/F が巡回拡大の場合にも同様に適用できる．(これはまた，E/F が巡回拡大の場合，既約表現

$$\tau\colon \mathrm{Gal}(\bar{E}/E) \longrightarrow GL_n(\boldsymbol{C})$$

が，$\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の既約表現の制限として得られるための必要十分条件が

$$^{\sigma}\tau \sim \tau \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$$

で与えられることともうまく符合していることを Serre から後に指摘された) このような考えに基づいて 齋藤 ([Sa1], [Sa2]) は古典的な $SL_2(O_E)$ 及びその合同部分群の保型形式の場合に，$E/F, F = \boldsymbol{Q}$ が tamely ramified な素数次の巡回拡大で，F の類数が 1 という条件の下で，base change の存在とその像の特徴付けを与えた．橋本 [Has] は，definite な 4 元数環の上で同様の twisted trace formula を計算している．

これを一般の保型形式あるいは，保型表現の場合に拡張するには，いくつかの重要なアイデアが必要であった．新谷 [S2] はこの結果を holomorphic な保型表現の場合に拡張することを試み，いくつかの重要なアイデアを提出した．一般の保型表現の base change を取り扱うには局所体上の許容表現の base change を考えなければならないが，L 関数と ε factor を用いた定義は converse theorem を用いる際には便利だが，trace formula を用いるには適しない．新谷は局所体上の許容表現の base change の関係を指標を用いて与えることを考えた．もう一つは，twisted trace formula と通常の trace formula を比較する際に必要となる，twisted orbital intgral と 通常の orbital integral の比較， orbital integral の tansfer である．([S1] で有限体上の GL_n の表現の base chnage を，指標の関係を用いて取り扱っている．なおこれについては，川中 ([Ka1], [Ka2]), 行者 [Gy] 参照)

一般の $GL(2)$ の保型表現を取り扱うには trace formula に現れるいくつかの計算の困難な項をうまく処理する必要がある．(geometric side の対応する各項毎の比較で twisted trace formula と通常の trace formula の間の等式が得られるのではない．二つの trace formula の差をとり，比較可能な項を消去したあとに比較の困難な項が残るが，これと spectral side の差とを比較することにより，この両者が 0 であることを示す.) この複雑な計算をやり遂げ，さらにこの等式から local 及び global な表現に関する情報を取り出す技法を開発して一般に $GL(2)$ の base change の証明を与えたのは Langlands[La] であった．さらに Langlands はそれを Artin 予想の証明に用いるという画期的な応用を見い出した．

その後 Flicker は $GL(3)$ の場合に，また Arthur と Clozel[A-C] は trace formula に関する膨大な研究に基づいて（文献は [A-C] 参照）$GL(n)$ の場合に E/F 巡回拡大という条件のもとで twisted trace formula を用いて base change の存在と，その像の特徴付けに成功した．更に Labesse[Lab] は，[A-C] で用いられた invariant trace formula の代わりに，non-invariant な trace formula を用いて同じ結果を示している．証明は [A-C] に比べいくらか簡略化されている．

応用についても述べる予定でいたがその全体を把握することは著者の能力を越えると思われたので，ここでは関係する文献をいくつかあげるにとどめる．[La], [T] の Artin 予想への応用以外に，Clozel([C2] §3), 吉田 ([Y] §6), 池田 ([I] §2), Cogdell - Piatetski-Shapiro([C-P2], [C-P3], [C-P4]) 等．

最近 Clozel[C3]，特に藤原一宏氏により Wiles の理論を用いて，$GL(2)$ の場合に一般の拡大に対し，多くの base change の例が与えられた．今後の発展が期待される．

§3. Arthur-Clozel の結果の（簡単な）紹介

$G = GL_n/F$ とする．[A-C] では一般の巡回拡大が取り扱われているが，ここでは E/F を簡単のため代数体または標数 0 の局所体の素数次の巡回拡大とし，Gal(E/F) の生成元 σ を固定する．ここで

$$E = F \oplus \cdots \oplus F, \quad {}^{\sigma}(a_1, a_2, \ldots, a_l) = (a_2, \ldots, a_l, a_1)$$

という trivial な状況 (split した素点に対応する) も考慮に入れておくと都合がよい．E, F が nonarchimedean な局所体のときの base change の存在の証明を中心に説明する.archimedean な拡大，すなわち $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}$ のときは，新谷，Repka[R] による．なお [C4] 参照.

まず twisted trace formula を用いる上で重要な事柄について述べる．

σ-conjugacy と norm map

g, $g' \in G(E)$ が σ-conjugate であるとは，$g = h^{-1}g'^{\sigma}h$, $h \in G(E)$ が存在することと定義する．ここでは $g \approx g'$ と書くことにする．これは $G(E)$ と Gal$(E/F) =< \sigma >$ の半直積 $\tilde{G}(E)$ を考えれば

$$(g, \sigma) = h^{-1}(g', \sigma)h = (h^{-1}g'^{\sigma}h, \sigma)$$

より，半直積の中では通常の conjugate である．$g \in G(E)$ に対して

$$N(g) = g\,{}^{\sigma}g \cdots {}^{\sigma^{l-1}}g$$

と定義してこれを，g のノルムと呼ぶ．σ-conjugate と通常の conjugate はノルムを通して

$$N(h^{-1}g\,{}^{\sigma}h) = h^{-1}(Ng)h$$

という関係がある．定義から${}^{\sigma}N(g) \sim N(g)$ であるから，容易に $N(g)$ は $G(F)$ の元と共役であり，その共役類は一意的に決まる.（GL_n では stable conjugacy と conjugacy が一致しているため容易になっている.）従ってノルムは写像

$$N\colon G(E)/\approx \longrightarrow G(F)/\sim$$

を導く．この写像が単射でることが，ヒルベルトの定理 90 から導かれる．split case は同型になる．更に代数体の場合は Hasse の原理から，写像

$$G(E)/\approx \longrightarrow (G(F)/\sim) \cap N(\prod_v G(E_v)/\approx)$$

が全単射であることが示される．すなわち $G(F)$ の共役類がノルムの像であるかどうかは，局所的に判定できる．これらのことと関連して部分群

$$\begin{aligned} G_{g,\sigma}(F) &= \{\ h \in G(E) \mid h^{-1}g\,{}^{\sigma}h = g\ \} \\ &= \{\ h \in G_{N(g)}(E) \mid g\,{}^{\sigma}hg^{-1} = h\ \} \end{aligned}$$

を考えることは自然である．ここで $G_{N(g)}$ は $N(g)$ の centralizer である．この式は，$N(g) \in G(F)$ のときには $G_{g,\sigma}$ は，$G_{N(g)}$ の inner form であることを示している．

base change map of Hecke ring と fundamental Lemma

E, F を nonarchimedean な局所体とする．

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}(G(F), G(O_F)),\ \mathcal{H}_E = \mathcal{H}(G(E), G(O_E))$$

をそれぞれ，$G(F)$, $G(E)$ の $G(O)$, $G(O_E)$ に関する Hecke ring とする．E/F が unramified のときこれらの間の base change map

$$b_{E/F}: \mathcal{H}_E \longrightarrow \mathcal{H}_F$$

が, unramified principal series $Q(\chi)$ に対し

$$\operatorname{tr} Q(\chi)(b_{E/F}(\phi)) = \operatorname{tr} Q(\chi \circ N_{E/F})(\phi)$$

を満たすものとして一意的に定義される．G_F, G_E の maximal torus をそれぞれ T_F, T_E とすれば，同型

$$\mathcal{H}_E \simeq \boldsymbol{C}[{}^L T_E^0/W] \simeq \boldsymbol{C}[w_1, w_1^{-1}, \cdots, w_l, w_l^{-1}]^{\mathfrak{S}_l}$$
$$\mathcal{H}_F \simeq \boldsymbol{C}[{}^L T_F^0/W] \simeq \boldsymbol{C}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_l, z_l^{-1}]^{\mathfrak{S}_l}$$

において，ϕ, f に対応する $\boldsymbol{C}[w_i, w_i^{-1}]$, $\boldsymbol{C}[z_i, z_i^{-1}]$ の元をそれぞれ $\phi^\vee$, $f^\vee$ と書くことにする．$Q(\chi)$ の Satake parameter が t_χ のとき， $Q(\chi \circ N_{E/F})$ の Satake parameter は t_χ^l であったから，上の関係式は

$$b_{E/F}(\phi)^\vee(t_\chi) = \phi^\vee(t_\chi^l)$$

となり，$b_{E/F}$ は

$$w_i \longmapsto z_i^l, \quad 1 \le i \le l$$

で与えられる．これが §1 における $a(\boldsymbol{p})$ と a_p の関係に他ならない．この写像は L-group の言葉を用いると次のように与えられる．L-group の写像

$$\begin{aligned}
{}^L G_F &= GL_n(\boldsymbol{C}) \times \mathrm{Gal}(E/F) \\
&\longrightarrow {}^L\mathrm{Res}_{E/F} G_E = (GL_n(\boldsymbol{C}) \times \cdots \times GL_n(\boldsymbol{C})) \ltimes \mathrm{Gal}(E/F) \\
(g, \sigma) &\longmapsto (g, \cdots, s, \sigma)
\end{aligned}$$

を考える．これは，写像

$$\begin{aligned}
({}^L G_F^0 \ltimes \sigma)_{ss}/\underset{{}^L G_F^0}{\sim} &\longrightarrow ({}^L\mathrm{Res}_{E/F} G_E^0 \ltimes \sigma)_{ss}/\underset{{}^L\mathrm{Res}_{E/F} G_E^0}{\sim} \\
&\xrightarrow{\sim} ({}^L G_E^0)_{ss}/\underset{{}^L G_E^0}{\sim} \\
(g, \sigma) &\longmapsto g^l
\end{aligned}$$

を導く．従って b は上の L-group の写像から得られたものと一致する．また split case の写像

$$b_{E/F}: \mathcal{H}_E = \mathcal{H}_F \times \cdots \otimes \mathcal{H}_F \longrightarrow \mathcal{H}_F$$

は convolution

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_l \longmapsto f_1 * \cdots * f_l$$

で与えられる．

$f \in C_c^\infty(G(F))$, $\gamma \in G(F)$ に対し，orbital integral

$$\Phi_f(\gamma) = \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dt}$$

が定義される．同様に $\phi \in C_c^\infty(G(E))$, $\delta \in G(E)$ に対し twisted orbital integral が

$$\Phi_{\phi,\sigma}(\delta) = \int_{G_{\delta,\sigma}(F)\backslash G(E)} \phi(g^{-1}\delta^\sigma g)\frac{dg}{dt}$$

で定義される．

Fundamental lemma. $\phi \in \mathcal{H}_E$, $f = b_{E/F}(\phi)$ とし，$\gamma \in G(F)$ を semi-simple regular な元とする．このとき

$$\Phi_f(\gamma) = \begin{cases} \Phi_{\phi,\sigma}(\delta) & \text{if } \gamma = N\delta,\ \delta \in G(E) \\ 0 & \text{if } \gamma \text{ is not a norm.} \end{cases} \tag{2.1}$$

この補題は，$n = 2$ のときは，齋藤が，土方 [H] の結果を用いて示し，Langlands が Tits building を用いた証明を与えた．Kottwitz([Ko1], [Ko2]) は Tits building を用いて，$n = 3$ のときと，ϕ が単位元のときに証明を与えた．これを用いて，Arthur と Clozel が trace formula を用いて一般の $\mathcal{H}_E$ の元に対して証明を与えた．なお [C], [Lab1] 参照.

Transfer of orbital integral と associated functions

Fundamental lemma は，$C_c^\infty(G(F))$, $C_c^\infty(G(E))$ の特別な元 $\mathcal{H}_F$, $\mathcal{H}_E$ の orbital integral, twisted orbital integral の間の関係を与えるが，trace formula を比較するためには一般の元についても次の命題が必要になる．

Proposition.
(1) $\phi \in C_c^\infty(G(E))$ に対し，(2.1) を満たす $f \in C_c^\infty(G(F))$ が存在する．
(2) $f \in C_c^\infty(G(F))$ が，regular な元 γ に対し，γ がノルムでなければ，$\Phi_f(\gamma) = 0$ という条件を満たすとすると，$\gamma = N\delta$ に対し

$$\Phi_f(\gamma) = \Phi_{\phi,\sigma}(\delta)$$

となる $\phi \in C_c^\infty(G(E))$ が存在する．

このとき f, ϕ は associated という．これは Shalika germ の考察により示される．また split case は上と同様に convolution で与えられる．

これらを用いて，局所体上の許容表現の base change の存在の証明を略述する．E, F を nonarchimedean な局所体とする．$\pi \in \mathcal{A}(n, F)$ に対し，その指標 θ_π が

$$\operatorname{tr}\pi(f) = \int_{G(F)} f(g)\theta_\pi(g)dg, \quad f \in C_c^\infty(G(F))$$

で定義される．θ_π は locally integrable な関数で与えられるが，semisimple regular な元の上では locally constant な関数となっている．$\Pi \in \mathcal{A}(n, E)$ の表現空間を V とする．Π が σ の作用で不変であるとき，すなわち，Π が

$${}^\sigma\Pi \sim \Pi, \quad {}^\sigma\Pi(g) = \Pi({}^\sigma g)$$

を満たすとすると，intertwining operator $I_\sigma({}^\sigma\Pi I_\sigma = I_\sigma\Pi)$ が存在するが，それは，$I_\sigma^l = 1$ を満たすようにとれる．I_σ はこの条件だけでは 1 の l 乗根を除いてしか決まらないが，次のようにして一意的に定める．Π が generic のときは，$\lambda\colon V \to \boldsymbol{C}$ で

$$\lambda(\Pi(n)v) = \theta(n)\lambda(v), \quad v \in V$$

が成り立つものが存在する．ここで n は Borel subgroup に含まれる unipotent element で，n の $(1,2)$, $(2,3)$, $\cdots$, $(n-1,n)$ 成分を x_1, $x_2, \cdots$, x_{n-1} とするとき

$$\theta(n) = \psi(\operatorname{tr}_{E/F}(x_1 + x_2 + \cdots x_{n-1}))$$

である．このとき更に，${}^tI_\sigma\lambda = \lambda$ という条件を加えると I_σ は一意的に定義される．一般の表現については Langlands classification を用いて，tempered な表現からの induction で定義する．このとき Π の twisted character $\Theta_{\Pi,\sigma}$ が

$$\operatorname{tr}\Pi(\phi)I_\sigma = \int_{G(E)} \phi(g)\Theta_{\Pi,\sigma}(g)dg$$

で定義される．$\Theta_{\pi,\sigma}$ も locally integrable で $N\delta$ が semisiple regular な元の上では locally constant な関数で与えられる．

これを用いて，許容表現 (tempered) の base change を次のように定義する．

Definition. $\Pi \in \mathcal{A}(n, E)$ が $\pi \in \mathcal{A}(n, F)$ base change とは

$$\Longleftrightarrow \Theta_{\Pi,\sigma}(g) = \theta_\pi(Ng), \quad Ng \text{ regular semisimple.}$$

このとき

Theorem. $\pi \in \mathcal{A}(n, F)$, $\Pi \in \mathcal{A}(n, E)$ を tempered とする．
(1) π はただ一つの $G(E)$ への base change を持つ．
(2) Π が σ 不変ならば，Π はあるπ の base change である．

一般には，π を Levi subgroup M の essentially tempered な表現 π_M を用いて

$$\pi = \text{Langlands quotient of } ind_{M(F)N(F)}^{G(F)}(\pi_M \otimes 1)$$

と表すとき π の base change を

$$\Pi = \text{Langlands quotient of } ind_{M(E)N(E)}^{G(E)}(\Pi_M \otimes 1)$$

(Π_M は上で見た π_M の base change) で定義すれば，上の定理が同じ形で一般の許容表現について成り立つ．このようにして得られた base change が §1 で見た base change と一致していることが分かる．

上の定理の (1) 証明の概略を与える．基本方針は，与えられた表現 π_0 を global な表現に埋め込んで，特別な global な表現の base change を用いることである． まず Langlands quotient を用いて π_0 が discrete のときに帰着する．次に E/F に対して，代数体の巡回拡大 k'/k を

$$k_{v_0} \simeq E, \quad k_{v_0} \simeq F, \quad \mathrm{Gal}(k'/k) \simeq \mathrm{Gal}(E/F)$$

で，k が totally imaginary であるように選ぶ．ここで v_0 は k の素点である．v_1, v_2, v_3 を k の素点で v_1, v_2 は，k' で分解するものであり，v_3 は k' で不分岐であるものとする．このとき trace formula を用いて $G(\mathbf{A}_k)$ の cuspidal な表現 $\pi = \otimes\pi_v$ で

$$\begin{aligned}
&\pi_{v_0} \simeq \pi_0\\
&\pi_{v_1} \text{ supercuspidal}\\
&\pi_{v_3} \text{ Steinberg representation}\\
&\pi_v \text{ unramified for finite } v \notin S = \{v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3\}
\end{aligned}$$

となるものが存在することを示すことができる．ここで π_0 が discrete なことから pseudo-coefficient が存在することを用いる．

Simple trace formula を用いるため 関数 $f_v \in C_c^\infty(G(F))$, $\phi_w \in C_c^\infty(G(E))$ を次のように選ぶ．f_1 は π_{v_1} の coefficient とし，$w|v_1$ なる E の素点に対しては，$\phi_w = f_v$ ととり，$f_{v_1} = f_1 * \cdots * f_1$ ととる．これで $\phi_{v_1} = (\phi_{w_1}, \ldots, \phi_{w_l})$ と f_{v_1} とは associated である．v_2 では

$$f_{v_2} = \phi_{w_1} * \cdots * \phi_{w_l}, \quad w_i|v_2$$

で $\mathrm{Supp}(\phi_1)\cdots\mathrm{Supp}(\phi_{w_l})$ が PGL_n で elliptic regular な元の集合に含まれるようにとる．これで両方の場合に simple trace formula が適用できる．

二つの trace formula を一致させるために更にそれ以外の素点では，f_v, ϕ_v が associated であるようにとる．勿論ほとんどの素点では ϕ_v は $\mathcal{H}_{E_v}$ の単位元であり，また S' を無限素点と k'/k で分岐する素点の集合とすれば，$v \notin S \cup S'$ については $\phi_v \in \mathcal{H}_{k'_v}$, $f_v = b_{k'_v/k_v}(\phi_v)$ とする．(正確には，$f(zg) = \chi^{-1}(z)f(g)$ $z \in Z_1$ となるように (ϕ_v についても同様に) 修正する必要があるがここでは詳しくは述べない．) このような条件の下で

$$L^2_{cusp}(G(k)Z_1\backslash G(\mathbf{A}_k), \chi), \quad Z_1 = N_{k'/k}(\mathbf{A}_{k'}),$$

$$L^2_{cusp}(G(k')Z(\mathbf{A}_{k'})\backslash G(\mathbf{A}_{k'}), \chi \circ N_{k'/k})$$

における $r_{cusp}(f)$, $R_{cusp}(\phi)I_\sigma(f=\otimes f_v,\ \phi=\otimes\phi_w)$ の跡は次のように簡単な形で与えられる.

$$\mathrm{tr}\, r_{cusp}(f) = \sum_{\gamma} v(G_\gamma(k)Z_1\backslash G_\gamma(\boldsymbol{A}_k))\Phi_f(\gamma),$$

$$\mathrm{tr}\, R_{cusp}(\phi)I_\sigma = \sum_{\delta} v(G_{\delta,\sigma}(k)Z(\boldsymbol{A}_k)\backslash G_{\delta,\sigma}(\boldsymbol{A}_k))\Phi_{\phi,\sigma}(\delta).$$

ここで γ は通常の elliptic regular な conjugate class を動き δ は $N\delta$ が elliptic regular であるような twisted conjugacy class を動く. このとき前に述べたことと

$$v(G_\gamma(k)Z_1\backslash G_\gamma(\boldsymbol{A}_k)) = lv(G_{\delta.\sigma}(k)Z(\boldsymbol{A}_k)\backslash G_{\delta,\sigma}(\boldsymbol{A}_k)), \quad \gamma = N\delta$$

から関係式

$$l\mathrm{tr}\, R_{cusp}(\Phi)I_\sigma = \mathrm{tr}\, r_{cusp}(f)$$

が得られる. これから spectral side の関係式

$$l\sum_{\Pi} \mathrm{tr}\,\Pi(\phi)I_\sigma = \sum_{\pi} \mathrm{tr}\,\pi(f)$$

が得られる. ここで無限素点における指標の独立性と $v \notin S \cup S'$ における不分岐な表現の指標の独立性を用いると上の式から

$$l\mathrm{tr}\,\Pi(\phi)I_\sigma = \sum_{\pi} \mathrm{tr}\,(f)$$

が得られる. ここで右辺は, $v \notin S \cup S'$ で不分岐かつ

$$B_{E_v/F_v}(\pi_{0,v}) = BC_{E_v/F_v}(\pi_v)$$

あるいは同じことだが

$$t_{\pi_{0v}}^{f_v} = t_{\pi_v}^{f_v} \quad f_v = [k'_w : k_v]\ w|v$$

を満たす cuspidal な保型表現 π を動く. 右辺は $\Pi_v = BC_{k'_v/k_v}(\pi_{0,v})$ $v \in S \cup S'$ となる Π である. このような Π が存在することは (後で見るように) 右辺が 0 でないことから分かる. ところで, GL_n の表現に関しては, Jacquet-Shalika[J-S1] より次の強い定理が成り立つ,

Theorem. π, π' を $G(\boldsymbol{A}_k)$ の cuspidal な保型表現とする. k の素点の有限集合 S'(無限素点と k'/k, π, π' が分岐する素点を含む) に関して

$$t_{\pi_v}^{f_v} = t_{\pi'_v}^{f_v}, \quad f_v = [k'_w : k_v],\ w|v,\ \forall v \notin S'$$

とすると k'/k に対応する k の指標 χ で

$$\pi' \simeq \pi \otimes \chi$$

となるものが存在する.

これにより右辺の和は，$\pi' \simeq \pi \otimes \chi$($\chi$ は k'/k に対応する指標) という形の表現の上を動くことになる．ここで π_{v_3} が Steinberg representation であることを用いると，これらがすべて異なることが分かり右辺は $l\mathrm{tr}\,\pi(f)$ となり，0 と異なる．従って表現 Π が存在して

$$\mathrm{tr}\,\pi(f) = \mathrm{tr}\,\Pi(\phi)$$

となる．これより

$$\mathrm{tr}\,\Pi_{v_0}(\phi_{v_0})I_\sigma = \mathrm{tr}\,\pi_{v_0}(f_{v_0})$$

が分かり，Weyl's integration formula を用いることにより

$$\Theta_{\Pi_{v_0},\sigma}(\delta) = \theta_{\pi_{v_0}}(N\delta)$$

が導かれる．これは Π_{v_0} が π_{v_0} の base change であることを示している．

E/F が代数体の巡回拡大の場合を考える．$G(\boldsymbol{A}_F)$, $G(\boldsymbol{A}_E)$ の保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$, $\Pi = \otimes_w \Pi_w$ について

$$(t_{\pi_v})^{f_v} = t_{\Pi_w} \forall' w|v$$

が成り立つとき，Π は π の weak lifting といい，すべての $w|v$ について Π_w が π_v の base change であるとき，Π は π の strong lifting であるという．weak lifting ならば strong lifting であることが証明できる．代数体の場合の定理は局所体の場合と同様に次のように述べられる．

Theorem. $\Pi_{disc}(G_F)$, $\Pi_{disc}(G_E)$ で，$G(\boldsymbol{A}_F)$, $G(\boldsymbol{A}_E)$ の trace formula の discrete part に寄与する ($G(\boldsymbol{A}_E)$ に関しては twisted trace formula の) 保型表現の同値類の集合とする．
(1) $\pi \in \Pi_{disc}(G_F)$ とすると π の base change $\Pi \in \Pi_{disc}(G_E)$ が存在する．
(2) ${}^\sigma\Pi \sim \Pi \in \Pi_{disc}(G_E)$ ならば Π は $\pi \in \Pi_{disc}(G_F)$ の base change である．

証明の方針は代数体の場合も基本的には同じである．すなわち，互いに associated な関数 $\phi_v \in C_c^\infty(G(E_v))$, $f_v \in C_c^\infty(G(F_v))$ を，ほとんどの素点では $f_v = b_{E_v/F_v}(\phi_v)$, $\phi_v \in \mathcal{H}_{E_v}$ であるようにとり，$L(G(F)N_{E/F}Z(\boldsymbol{A}_E)\backslash G(\boldsymbol{A}_F))$ における通常の trace formula と $L(G(E)Z(\boldsymbol{A}_E)\backslash G(\boldsymbol{A}_E))$ における twisted trace formula とを比較し，その間の等式を導く．それから spectral side の表現の関係を導く．しかしこのとき次のことが計算を複雑にする．一つは，geometric side に現れるのが orbital integral ではなく，weighted orbital integral と呼ばれるもので，Levi component M に関して $G_\gamma(F_v) \subset M(F_v)$ のときは

$$J_M(\gamma, f) = |D(\gamma)|^{1/2} \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)v_M(g)\frac{dg}{dt}$$

であたえられる (twisted case ではこれを twist したもの)．$G = M$ のときには通常の orbital integral と一致するが，一般には定義を与えることもかなり面倒である．これらは f_v への共役による作用に関して invariant でないため [A-C] では，これらの weighted orbital integral を Arthur の trace formula の理論を用いて invariant な distribution $I_M(\gamma, f)$, $I_M^{\mathcal{E}}(\gamma, f)$ を用いて書き直し，その後に比較をしている．このときも $GL(2)$ のときと同じように geometric side の比較だけで二つの trace formula の等式が示されるのではなく，spectral side と比較

しながら (spectral side も Levi component 毎に決まる distribution $I_M(\pi, f)$, $I_M^{\mathcal{E}}(\pi, f)$ を用いて表される) 示されるが，一般には多くの Levi component が現れるため，複雑な帰納法により証明される．

[Lab2] においては，二つの関数の間の strongly associated という概念を，weighted orbital integral も一致するという条件で定義して，weighted orbital integral もこめた強い fundamental lemma を示し，non-invarinat な trace formula を用いて，上の結果を証明している．この fundamental lemma の証明を除けば，[A-C] より見通しはよい．

講演の準備に当たり，池田保，高橋哲也，今野拓也の三氏には種々の御教示を受けました．ここに御礼申し上げます．

References

[A-C] J. Arthur and L. Clozel, Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula, Ann. Math. Studies 120, 1989.

[As1] T. Asai, On certain Dirichlet series associated with Hilbert modular forms and Rankin's method, Math. Ann., 226(1977), 81-94.

[As2] , On the Doi-Naganuma lifting associated with imaginary quadratic fields, Nagoya Math. J., 71(1978), 146-167.

[B-H] C. Bushnell and G. Henniart, Local tame lifting for GL(N), Publ. Math. 83, I.H.E.S., 1996.

[C1] L. Clozel, The fundamental lemma for stable base change, Duke Math., J. 61(1990), 155-302.

[C2] , Représentations galoisienne, associées aux représentation automorphes autodual de GL(n), Publ. Math. 73, 97-145, I.H.E.S., 1991.

[C3] , Sur la theorie de Wiles et le changement de base nonabélien, Inst. Math. Res. Notices, 9(1995), 437-444.

[C4] , Changement de base pour le représentation tempérees de groupes réductifs reels, Ann. Sc. E.N.S., 15(1982), 45-115.

[C-P1] J. W. Cogdell and I. I. Piatetski-Shapiro, Converse theorems for GL_n, Publ. Math., 79, 157-214, I.H.E.S., 1994.

[C-P2] , Base change of $\widetilde{SL}_2$, J.N.T., 27(1987), 285-303.

[C-P3] , Base change of the Saito-Kurokawa representation of PGSp(4), J.N.T., 30(1988), 298-320.

[C-P4] , On base change for odd orthogonal groups, J. Amer. Math. Soc., 8(1995), 975-996.

[D-N1] K. Doi and H. Naganuma, On the algebraic curves uniformized by arithmetical automorphic functions, Ann. of Math., 86(1967), 449-460.

[D-N2] , On the functional equation of certain Dirichlet series, Inv. math., 9(1969), 1-14.

[E1] M. Eichler, Theta functions over $\boldsymbol{Q}$ and over $\boldsymbol{Q}(\sqrt{q})$, Lecture Notes in Math. 627, 197-225, Springer, 1977.

[E2] ———, On symmetric and unsymmetric theta functions over a real quadratic field, Acta Arith., 37(1980), 165-179.

[G-L] P. Gérardin and J. Labesse, The solution of a base change problem for GL(2), Proc. Sym. in Pure Math. 33(1979), part 2, 115-133.

[Gy] A. Gyoja, Liftings of irreducible character of finite reductive groups, Osaka J. Math. 16(1979), 1-30.

[H-L-R] G. Harder, R. P. Langlands and M. Rapoport, Algebraische Zyklen auf Hilbert Blumenthal-Flächen, J. reine und angew. math., 336(1986), 53-120.

[Ha] M. Harris, The local Langlands conjecture for GL(n) over a p-adic field, $n < p$.

[Has] K. Hashimoto, Twisted trace formula of the Brandt matrix, Proc. Japan Acad., 53(1977), 98-102.

[He] G. Henniart, La conjecture de Langlands locale pour GL(3), Mém. S. M. F., 11-12(1984).

[H-H] G. Henniart and R. Herb, Automorphic induction for GL(n)(over local nonarchimedean fields), Duke Math. J., 78(1995), 131-192.

[Hi] H. Hijikata, Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$, J. Math. Soc. Japan, 26(1974), 56-82.

[Hir] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, L'Ens. Math. , 71(1973), 183-281.

[H-Z] F. Hirzebruch and D.Zagier, Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus, Inv. math., 36(1976), 57-113.

[I] T. Ikeda, On the location of poles of the triple L-functions, Comp. Math., 83(1992), 187-237.

[J] H. Jacquet, Automorphic forms on GL(2) II, Lectue Notes in Math., 278, Springer, 1972.

[J-L] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Math., 114, Springer, 1970.

[J-P-S1] J. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro, and J. Shalika, Automorphic forms on GL(3), I, II, Ann. of Math., 103(1981), 169-212.

[J-P-S2] ———, Rankin-Selberg convolutions, Amer. J. Math., 105(1983), 367-464.

[J-P-S3] ———, Construction de formes automorphes pour le groupe GL(3), C.R.Acad Sci.Paris, 282(19), 91-93.

[J-P-S4] ———, Relevement cubique nonnormal, C.R.Acad Sci.Paris, 292(1981), 567-571.

[J-S1] H. Jacquet and J. Shalika, On Euler product and the classification of automorphic representations, I, II, Amer. J. Math., 103(1981), 499-558, 777-815.

[J-S2] ———, Rankin-Selberg convolutions: archimedean theory, IMCP vol.2(1990), 125-207.

[Ka] D. Kazhdan, On lifting, Lecture Notes in Math., 1041, Springer, 1984.

[Kaw1] N. Kawanaka, On the irreducible character of the finite unitary groups, J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 425-450.

[Kaw2] ———, Liftings of irreducible characters of finite classical groups I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 28(1981), 851-861.

[Ko1] R. Kottwitz, Orbital integral on GL_3, Amer. J. Math., 102(1980), 327-384.

[Ko2] ———, Base change for unit elements of Hecke algebra, Comp. Math., 60(1986), 237-250.

[Ku1] S. Kudla, The local Langlands correspondence: the nonarchimedean case, Contemprary Math.

[Ku2] ———, Theta functions and Hilbert modular forms, Nagoya Math. J., 69(1978), 97-106.

[L] R. P. Langlands, Base change for GL(2), Ann. Math. Studies, 96, 1980.

[Lab1] R. Labesse, Le lemme fondamental pour le changement de base stable, Duke Math. J., 61(1990), 519-530.

[Lab2] ———, Non invariant base change identities,

[O1] T. Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann., 231(1977), 97-144.

[O2] ———, Periods of Hilbert modular surfaces, Prog. in Math., 19, Birkhäuser Verlag, 1982.

[P] P. Ponomarev, The Doi-Naganuma Lifting of quaternary theta series, Math. Ann., 255(1981), 443-452.

[PSNn] 第 n 回整数論サマースクール報告集

[R] S. Rallis, On a relation between $\widetilde{SL_2}$ cusp forms and automorphic forms on orthogonal groups, Proc. Sym. in Pure Math., 33(1979), part I, 297-313.

[Re] J. Repka, Base change for tempered irreducible representations of $GL(n, \boldsymbol{R})$, Pacific J. Math., 93(1981), 193-200.

[Sa1] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Math. Kyoto Univ., 1975.

[Sa2] ———, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields II, J. Math. Kyoto Univ., 19(1979), 105-123.

[S1] T. Shintani, Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan, 28(1976).

[S2] ———, On liftings of holomorphic cusp forms, Proc. Sym. in Pure Math. 33(1979), part 2, 97-110.

[T] J. Tunnell, Artin's conjecture for representations of octahedral type, Bull. Amer. Math. Soc., 5(1981), 173-175.

[W] J. L. Waldspurger, Formes quadratique à 4 variables et relèvement, Acta Arith., 36(1980), 376-405.

[Z] D. Zagier, Modular forms associated to real quadratic fileds, Inv. math., 30(1975), 1-46.