数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 40-54

非アルキメデス局所体上のGL_3の表現の指標公式

阪府大総合　高橋 哲也 (Tetsuya Takahashi)

Introduction

F を剰余標数 $p \neq 3$ の非アルキメデス的局所体とする。 $G = GL_3(F)$ の既約スーパーカスピダル表現の指標を elliptic regular conjugacy class 上で求めることが本稿の目的である。(スーパーカスピダル以外の表現の指標は簡単に求められる。) G の既約スーパーカスピダル表現は全て、F の3次拡大体 E の乗法群 $E^\times$ の quasi-character θ によって定まる。この表現を π_θ とする。E/F が不分岐のときは、π_θ の指標公式は既に知られている ([13]) のでここでは、E/F が完全分岐であるときを扱う。ここで$p \neq 3$ が効く。(wildly ramified は、難しすぎる。[14] 参照のこと。) $GL_2(F)$ の場合と比較して難しいのは、E/F がガロア拡大でない場合があることである。この場合には、base change lift を使うことによりガロアの場合に計算を持ち込むことにより解決している。ここが、今回の結果の一番の特徴である。なお、この部分は、Bushnell-Henniart ([3]) の結果に大きく拠っている。結果として得られた指標公式は、Weyl の character formula の類似と思えるきれいな形をしている。なお、紙面の都合により証明は殆ど概略のみを示している。詳しくは、[15] を見て下さい。

Notation

剰余標数 $p \neq 3$ の非アルキメデス的局所体 F に対して、$\mathcal{O}_F$ をその整数環、P_F を $\mathcal{O}_F$ の極大イデアル、ϖ_F を $\mathcal{O}_F$ の素元、k_F をその剰余体、v_F を $v_F(\varpi_F) = 1$ と正規化した付値とする。$q = q_F$ を k_F の位数とする。F の additive character ψ で、$\psi(\mathcal{O}_F) \neq \{1\}, \psi(P_F) = \{1\}$ となるものを一つとり固定する。F の拡大体 E に対して、tr_E, n_E で、E から F へのトレース、ノルムをそれぞれ表す。行列のトレースは、Tr と書く。E の additive character ψ_E を$\psi_E = \psi \circ \mathrm{tr}_E$ と定義する。E/F が tamely ramified (or unramified) なら、$\psi_E(\mathcal{O}_E) \neq \{1\}, \psi_E(P_E) = \{1\}$ となることに注意する。TDLC(totally disconnected, locally compact) 群 G に対して、$\widehat{G}$ で G の admissible dual をあらわす。G の閉部分群 H と、H の表現 ρ に対して$\mathrm{Ind}_H^G \rho$(resp. $\mathrm{ind}_H^G \rho$) で、ρ の G への誘導表現 (resp. コンパクト誘導表現) を表す。また、G の表現 π の H への制限を $\pi|_H$ と表す。

1　表現の構成

E/F を3次分岐拡大とする。$E^\times$ の quasi-character から、G の既約スーパーカスピダル表現の構成する方法について復習する。

Definition 1.1. θ を $E^\times$ の quasi-character とし、$f(\theta) = \min\{n | \mathrm{Ker}\, \theta \subset 1+P_E^n\}$ とおく。$f(\theta) \not\equiv 2 \mod 3$ であるとき、θ が generic であるという。$E^\times$ の generic quasi-character

θ に対して、$\gamma_\theta \in P_E^{1-f(\theta)} - P_E^{2-f(\theta)}$ が次の式で定義される。

$$\theta(1+x) = \psi(\mathrm{tr}_{E/F}(\gamma_\theta x)) \quad \text{for} \quad x \in P_E^{[(f(\theta)+1)/2]} \tag{1.1}$$

このとき $F(\gamma_\theta) = E$ となることに注意する。

generic quasi-character θ から、G の 既約スーパーカスピダル表現を作る。以下、簡単のために $\gamma = \gamma_\theta$ とおく。ϖ_E を、$\varpi_E^3 \in F$ となるようにとり、$\varpi_E^3 = \varpi_F$ とおく。$\mathrm{M}_3(F), \mathrm{GL}_3(F)$ を、E の F 上の基底 $\{\varpi_E^2, \varpi_E, 1\}$ によって、$\mathrm{End}_F E, \mathrm{Aut}_F E$ とそれぞれ同一視する。

Definition 1.2. lattice flag $\{P_E^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に対して、

$$A^i = \{f \in \mathrm{M}_3(F) | f(P_E^j) \subset P_E^{j+i} \quad \text{for all} \quad j \in \mathbb{Z}\}$$

と定義する。また $K = (A^0)^\times, B = E^\times K$ とおき、 $i \geq 1$ に対して $K^i = 1 + A^i$ とおく。

このとき、K は、G の岩堀部分群であり、B は、K の G での normalizer である。まず、$B = E^\times K$ の既約表現を構成する。

θ を $E^\times$ の generic quasi-character とすると、$\gamma \in P_E^{-n}$ で $\theta(1+x) = \psi_E(\gamma x)$ for $x \in P_E^m$ (但し、$m = [(n+2)/2]$) となる元がとれる。この γ にたいして、K^m の 1 次元表現 ψ_γ を

$$\psi_\gamma(1+x) = \psi(\mathrm{Tr}\,\gamma x) \quad \text{for} \quad x \in A^m$$

によって定義できる。(K^m/K^{n+1} がアーベル群であることから表現になる。$\psi(P_F) = \{1\}$ にも注意せよ。) $H = E^\times K^m$ とおき、H の 1 次元表現 ρ_θ を

$$\rho_\theta(h \cdot g) = \theta(h)\psi_\gamma(g) \qquad \text{for} \quad h \in E^\times, \quad g \in K^m \tag{1.2}$$

と定義する。ここから、$n+1$ (表現のコンダクター) が偶数のときと、奇数のときで状況が全く異なる。これは、スーパーカスピダル表現の構成の際にいつもつきまとう問題である。以下は、色々な論文に載っているが例えば、[12] を見よ。

$n+1$ が偶数のとき。(即ち、$n+1 = 2m$ のとき。)

このときは、ρ_θ の B における normalizer $J = \{g \in B | {}^g\rho_\theta(x) = \rho_\theta\}$ (${}^g\rho(x) = \rho(gxg^{-1})$) が、$H$ に等しいため、ρ_θ を、そのまま B へ誘導すれば、既約表現が得られる。即ち、

$$\kappa_\theta = \mathrm{Ind}_H^B \rho_\theta \tag{1.3}$$

とおけば、κ_θ は、B の既約表現である。

$n+1$ が奇数のとき。(即ち、$n+1 = 2m$ のとき。)

このときは、ρ_θ の B における normalizer $J = E^\times K^{m-1}$ となるため、ρ_θ の $E^\times K^{m-1}$ への誘導表現の既約成分をとらなければならない。(これは、1 次元ではない。) 少し記号を導入する。B の部分群の $F^\times K$ との共通部分を、上付きに ^{1} をつけて表す。即ち、$H^1 = F^\times(1+P_E)K^m, J^1 = F^\times(1+P_E)K^{m-1}, B^1 = F^\times K$ となる。まず、$\theta^1 = \theta|_{F^\times(1+P_E)}$

、$\rho_\theta^1 = \rho_\theta|_{H^1}$ とおく。このとき、ρ_θ^1 の J^1 への誘導表現の既約成分は、ただ一つでこれを η_θ^1 とおこう。即ち、

$$\mathrm{Ind}_{H^1}^{J^1} \rho_\theta^1 = q\eta_\theta^1$$

が成り立つ。(これは、J^1/H^1 上に、$[x,y] = \rho_\theta(xyx^{-1}y^{-1})$ for $x, y \in F^\times(1+P_E)K^{m-1}$ が非退化な交代形式を定義することから従う。) 指標について言えば、

$$\chi_{\eta_\theta^1}(x) = \begin{cases} q\rho_\theta^1(x) & \text{if} \quad x \in H^1 \\ 0 & \text{if} \quad x \in J^1 - H^1 \end{cases}$$

が成り立つ。この η_θ^1 は、J へ $|E^\times/F^\times(1+P_E)| = 3$ 通りに、延長できる。これらのうちの一つが、求める既約成分であるがそれを特定するには、$\mathrm{Ind}_H^J \rho_{\theta\otimes\chi}$ $(\chi \in (E^\times/F^\times(1+P_E))\hat{})$ をその3つの既約成分の1次結合としてあらわすことにより行う。この1次結合を逆に解いて

$$(1.4) \qquad \kappa_\theta = \begin{cases} \dfrac{1-q}{3q} \displaystyle\sum_{\chi \in (E^\times/F^\times(1+P_E))\hat{}} \mathrm{Ind}_H^B \rho_{\theta\otimes\chi} + \mathrm{Ind}_H^B \rho_\theta & q \equiv 1 \mod 3 \\ \dfrac{1+q}{3q} \displaystyle\sum_{\chi \in (E^\times/F^\times(1+P_E))\hat{}} \mathrm{Ind}_H^B \rho_{\theta\otimes\chi} - \mathrm{Ind}_H^B \rho_\theta & q \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

が、得られる。こう書いて置くことにより、指標の計算にはコンダクターの奇数・偶数の違いをあまり意識しないで良くなる。次の結果はよく知られている。([12])

Theorem 1.3. 上記の記号のもとで κ_θ は、$B = E^\times K$ の既約表現である。$\pi_\theta = \mathrm{ind}_B^G \kappa_\theta$ とおく。このとき π_θ はG の既約スーパーカスピダル表現である。逆に、G の既約スーパーカスピダル表現でコンダクターが 3 と互いに素なものは全て適当な F の3次分岐拡大 E と E の *generic quasi-character* θ によって π_θ の形にかける。

Remark . G の既約スーパーカスピダル表現でコンダクターが 3 の倍数であるものは、F の3次不分岐拡大の regular quasi-character から構成される。その表現の指標公式は、[13] により既に計算されている。

この節の最後に、π_θ の指標の計算を κ_θ の指標の計算に帰着させる Kutzko(Proposition 5.5 in [11]) の結果を本稿に必要な形で紹介しておく。

Theorem 1.4. x を G の *elliptic regular element* とする。

1. $F(x)/F$ が 分岐拡大で、$x \notin F^\times(1+P_{F(x)}^{n+1})$ となるとき、

$$\chi_{\pi_\theta}(x) = \chi_{\kappa_\theta}(x)$$

2. $F(x)/F$ が 不分岐拡大で、$x \notin F^\times(1+P_{F(x)}^{[(n+3)/3]})$ となるとき、

$$\chi_{\pi_\theta}(x) = 0$$

2 指標公式(E/F がガロア拡大の場合)

この節では、F が 1 の 3 乗根 ζ を持つ場合、即ち E/F がガロア拡大である場合にπ_θ の指標公式を求める。まず、$M_3(F)$ を $\mathrm{End}_F(E)$ と E の F-basis $\{\varpi_E^2, \varpi_E, 1\}$ によって同一視した際の、具体的な行列表示を見ておこう。

$$\varpi_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c\varpi_F & a & b \\ b\varpi_F & c\varpi_F & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in F \right\}, \tag{2.2}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} a_{ij} \in \mathcal{O}_F & \text{if } i < j \\ a_{ii} \in \mathcal{O}_F^\times & \\ a_{ij} \in P_F & \text{if } i > j \end{matrix} \right\}, \tag{2.3}$$

$$A^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} a_{ij} \in \mathcal{O}_F & \text{if } i \le j \\ a_{ij} \in P_F & \text{if } i > j \end{matrix} \right\}, \tag{2.4}$$

$$A^1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} a_{ij} \in \mathcal{O}_F & \text{if } i < j \\ a_{ij} \in P_F & \text{if } i \ge j \end{matrix} \right\}. \tag{2.5}$$

σ を ${}^\sigma\varpi_E = \varpi_E\zeta$ によって定まる、$\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元とする。
上記の具体的な行列表示より次の Lemma は明らかである。

Lemma 2.1. $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$ とおくと、ξ は、$\xi^3 = 1$,

$$\xi x \xi^{-1} = {}^\sigma x \quad \textit{for any} \quad x \in E,$$

$$\begin{array}{llllll} M_3(F) & = E & \oplus & E\xi & \oplus & E\xi^2 \\ A^0 & = \mathcal{O}_E & \oplus & \mathcal{O}_E\xi & \oplus & \mathcal{O}_E\xi^2 \\ A^1 & = P_E & \oplus & P_E\xi & \oplus & P_E\xi^2 \\ A^2 & = P_E^2 & \oplus & P_E^2\xi & \oplus & P_E^2\xi^2 \end{array} \tag{2.6}$$

を満たす。

θ を $E^\times$ の generic quasi-character で、$f(\theta) = n+1$ となるものとする。前節で定義した κ_θ に対して、Mackey 分解より、κ_θ の $E^\times$ 加群としての分解を得る。$n+1 = 2m$ の

とき、

$$\kappa_\theta|_{E^\times} = \bigoplus_{a \in H\backslash B/E^\times} \mathrm{Ind}_{a^{-1}Ha\cap E^\times}^{E^\times} {}^a\rho_\theta, \tag{2.7}$$

但し、${}^a\rho_\theta(x) = \rho_\theta(axa^{-1})$ for $x \in a^{-1}Ha \cap E^\times$ となる。また、$n+1 = 2m-1$ のとき、

$$\begin{aligned} \kappa_\theta|_{E^\times} = &-\frac{q-1}{3q} \sum_{\chi \in (E^\times/F^\times(1+P_E))^\wedge} \sum_{a \in H\backslash B/E^\times} \mathrm{Ind}_{a^{-1}Ha\cap E^\times}^{E^\times} {}^a\rho_{\theta\otimes\chi} \\ &+ \sum_{a \in H\backslash B/E^\times} \mathrm{Ind}_{a^{-1}Ha\cap E^\times}^{E^\times} {}^a\rho_\theta \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。($q \equiv 1 \mod 3$ であることに注意する。)

以下、上の分解に現れる各項を計算する。まず、$H\backslash B/E^\times$ について調べる。

Lemma 2.2. 1. $a = 1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}_E)$ に対して、

$$a \in K \Longleftrightarrow 1 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 - 3\alpha_1\alpha_2 \notin P_E$$

2. $a = 1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2, b = 1 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 \in K$ に対して、

$$Ha = Hb \Longleftrightarrow \alpha_i - \beta_i \in P_E^m (i = 1, 2)$$

Proof. (2.6) を使って、$\{1, \xi, \xi^2\}$ の各成分ごとに見ればよい。 □

$H\backslash B/E^\times$ を記述するためにいくつか記号を導入する。$\mathcal{O}_E^{(1)} = \mathrm{Ker}\, n_E$ とし、

$$M = \{{}^\sigma\alpha\alpha^{-1}, {}^{\sigma^2}\alpha\alpha^{-1}\} \subset \mathcal{O}_E^{(1)} \times \mathcal{O}_E^{(1)}$$

とおく。$0 < \mu < m$ に対して、

$$\begin{aligned} I_{\mu,1} &= (1 + P_E^{m-\mu}) \times P_E^m \backslash \varpi_E^\mu \mathcal{O}_E^\times \times P_E^\mu / M \\ I_{\mu,2} &= P_E^m \times (1 + P_E^{m-\mu}) \backslash P_E^{\mu+1} \times \varpi_E^\mu \mathcal{O}_E^\times / M \\ J_{\mu,1} &= \left(\varpi_F^\mu n_E(\mathcal{O}_E^\times)/1 + P_F^{[(m-\mu+2)/3]}\right) \times \left(P_E^{2\mu}/P_E^{m+\mu}\right) \\ J_{\mu,2} &= \left(P_E^{2\mu+1}/P_E^{m+\mu}\right) \times \left(\varpi_F^\mu n_E(\mathcal{O}_E^\times)/1 + P_F^{[(m-\mu+2)/3]}\right) \end{aligned}$$

と定義する。$\mu = 0$ に対しては、

$$\begin{aligned} I_{0,1} &= (1 + P_E^m) \times P_E^m \backslash \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathcal{O}_E^\times \times \mathcal{O}_E | 1 + \beta_1^3 + \beta_2^3 - 3\beta_1\beta_2 \notin P_E\}/M \\ I_{0,2} &= P_E^m \times (1 + P_E^m) \backslash \{(\beta_1, \beta_2) \in P_E \times \mathcal{O}_E^\times | 1 + \beta_2^3 \notin P_E\}/M \\ J_{0,1} &= \left\{(\beta_1, \beta_2) \in (n_E(\mathcal{O}_E^\times)/1 + P_F^{[(m+2)/3]}) \times (\mathcal{O}_E/P_E^m) \;\middle|\; 1 + \beta_1^3 + \beta_1^{-1}\beta_2^3 - 3\beta_2 \notin P_E\right\} \\ J_{0,2} &= \left\{(\beta_1, \beta_2) \in (\mathcal{O}_E/P_E^m) \times (n_E(\mathcal{O}_E^\times)/1 + P_F^{[(m+2)/3]}) \;\middle|\; 1 + \beta_2 \notin P_E\right\} \end{aligned}$$

と定義する。最後に、$0 \leq \mu < m$ に対して、

$$\tilde{I}_{\mu,i} = \{1 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 | (\beta_1, \beta_2) \in I_{\mu,i}\}$$

と定義する。

Lemma 2.3. 1. $H\backslash B/E^\times$ の完全代表系として

$$\{1,\xi,\xi^2\}\cup\bigcup_{\mu=0}^{m-1}(\tilde{I}_{\mu,1}\cup\tilde{I}_{\mu,2})\cup\bigcup_{\mu=1}^{m-1}(\tilde{I}_{\mu,1}\xi\cup\tilde{I}_{\mu,2}\xi)$$
$$\cup\bigcup_{\mu=1}^{m-1}\tilde{I}_{\mu,1}\xi^2\cup\bigcup_{\mu=0}^{m-1}\tilde{I}_{\mu,2}\xi^2 \tag{2.9}$$

がとれる。

2. $(\beta_1,\beta_2)\in\varpi_E^\mu\mathcal{O}_E^\times\times P_E^\mu$ に対して、$\varphi_1(\beta_1,\beta_2)=(n_E(\beta_1),\beta_2{}^{\sigma^2}\beta_1)$、$(\beta_1,\beta_2)\in P_E^{\mu+1}\times\varpi_E^\mu\mathcal{O}_E^\times$ に対して、$\varphi_2(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1{}^\sigma\beta_2,n_E(\beta_2))$ と定義する。このとき、φ_i は、$I_{\mu,i}$ から $J_{\mu,i}$ への全単射を引き起こす。

Proof. 前半は、$H(1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2)\alpha=H(1+\beta_1{}^\sigma\alpha\alpha^{-1}\xi+\beta_2{}^{\sigma^2}\alpha\alpha^{-1}\xi^2)$ と Lemma 2.2 より従う。後半は、まず写像の well-defined をチェックして、そのあと $\mathcal{O}_E^{(1)}\backslash\mathcal{O}_E^\times/1+P_E^j\xrightarrow{n_E}n_E(\mathcal{O}_E^\times)/1+P_F^{[(j+2)/3]}$ が全単射であることより、全単射を示せばよい。 □

次に、$a^{-1}Ha\cap E^\times$ を求める。

Lemma 2.4. $a\in\tilde{I}_{\mu,i}$ とすると、$a^{-1}Ha\cap E^\times=F^\times(1+P_E^{m-\mu})$ となる。

Proof. 前の Lemma とほぼ同様に証明できる。 □

残りは、${}^a\rho_\theta$ であるが、上の Lemma より $a\in\tilde{I}_{\mu,i}$ ならば、${}^a\rho_\theta\in(F^\times(1+P_E^{m-\mu}))^\wedge$ である。また、$a'=a\xi^j$ の形の元に対しては、$a'^{-1}Ha'\cap E^\times=a^{-1}Ha\cap E^\times$、${}^{a'}\rho_\theta={}^a\rho_\theta\circ\sigma^j$ となる。したがって、${}^a\rho_\theta$ を $a\in\tilde{I}_{\mu,i}$ に対して求めれば良い。

Lemma 2.5. $c\in F^\times,y\in P_E^{m-\mu}$ $a=1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2\in\tilde{I}_{\mu,i}$ に対して、

$$\begin{aligned}{}^a\rho_\theta\rho_\theta^{-1}(c(1+y))&=\psi_E(R_{\mu,1}(\varphi_1(\beta_1,\beta_2))({}^\sigma y-y))\\&=\psi_E(R_{\mu,2}(\varphi_2(\beta_1,\beta_2))({}^{\sigma^2}y-y))\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$R_{\mu,1}(u,v)=\frac{(({}^{\sigma^2}\gamma-\gamma)u+\gamma v-{}^{\sigma^2}\gamma v^{-1}n_E(u))}{1+v+v^{-1}n_E(u)-\mathrm{tr}_E(u)} \tag{2.10}$$

$$R_{\mu,2}(u,v)=\frac{(({}^{\sigma}\gamma-\gamma)u+\gamma v-{}^{\sigma}\gamma v^{-1}n_E(u))}{1+v+v^{-1}n_E(u)-\mathrm{tr}_E(u)} \tag{2.11}$$

(φ_i については、Lemma 2.3 2. を見よ。)

Proof. $a=1+\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2$ $(\alpha_1,\alpha_2\in E)$ とすると、

$$a^{-1}=\frac{1}{\det(a)}(1-{}^\sigma\alpha_1{}^{\sigma^2}\alpha_2)+(\alpha_2{}^{\sigma^2}\alpha_2-\alpha_1)\xi+(\alpha_1{}^\sigma\alpha_1-\alpha_2)\xi^2)$$

但し、

$$\det(a) = 1 + n_E(\alpha_1) + n_E(\alpha_2) - \mathrm{tr}_E(\alpha_1{}^{\sigma}\alpha_2)$$

が成り立つ。また、$g = 1 + y$ に対して、${}^{\sigma^j}gg^{-1} - 1 \equiv {}^{\sigma^j}y - y \mod P_E^{2(m-\mu)}$ となる。更に、$\rho_\theta = \psi_\gamma$ on K^m と $\mathrm{tr}_E(x\xi^i) = 0$ for $i = 1, 2$ and $x \in E$ とが成り立つこと等より証明できる。 □

次の Lemma は、κ_θ の指標の計算にとって本質的であるので証明もきちんとつける。

Lemma 2.6. $\alpha \in \varpi_F^\mu n_E(\mathcal{O}_E^\times)$ を固定し、$x \in P_E^{2\mu+i-1}$ に対して、$\tilde{R}_{\mu,i}(x) = R_{\mu,i}(x, \alpha)$ とおく。$\mu = 0$ のときは、$1 + \alpha + \alpha^{-1}x^3 - 3x \notin P_E$ と仮定する。

1. $\mu \geq 1$ なら、$\tilde{R}_{\mu,i}$ は、$P_E^{2\mu+i-1}/P_E^{m+\mu}$ から $P_E^{2\mu+i-1-n}/P_E^{m+\mu-n}$ への全単射を引き起こす。

2. $\tilde{R}_{0,2}$ は、P_E/P_E^m から

$$\left\{ x \in P_E^{-n}/P_E^{m-n} \,\middle|\, x \equiv \frac{\gamma\alpha}{1+\alpha} \mod P_E^{1-n} \right\}$$

への全単射を引き起こす。

3. $x_0 \in \mathcal{O}_E$ で、$1 + \alpha + \alpha^{-1}x_0 - 3x_0 \notin P_E$ を満たすものに対して、$\tilde{R}_{0,1}$ は、$\{x \in \mathcal{O}_E/P_E^m | x \equiv x_0 \mod P_E\}$ から

$$\left\{ x \in P_E^{-n}/P_E^{m-n} \,\middle|\, x \equiv \frac{({}^{\sigma^2}\gamma - \gamma)x_0 + \gamma\alpha - {}^{\sigma^2}\gamma\alpha^{-1}x_0^3}{1 + \alpha + \alpha^{-1}x_0^3} \mod P_E^{1-n} \right\}$$

への全単射を引き起こす。

Proof. まず、$\mu > 0$ とする。$x \in P_E^{2\mu+i-1}$ に対して、

$$\tilde{R}_{\mu,i}(x) \equiv ({}^{\sigma^{-i}}\gamma - \gamma)x \mod P_E^{v_E(x)-n+1} \tag{2.12}$$

が成り立つ。(2.12) より $2\mu + i - 1 \leq v_E(x_1) \leq v_E(x_2)$ ならば、

$$\tilde{R}_{\mu,i}(x_1) \equiv \tilde{R}_{\mu,i}(x_2) + ({}^{\sigma^{-i}}\gamma - \gamma)(x_1 - x_2) \mod P_E^{v_E(x_1)+v_E(x_2-x_1)+i-n} \tag{2.13}$$

これは、$\tilde{R}_{\mu,i}(x_1) - \tilde{R}_{\mu,i}(x_2) \in P_E^{m-n}$ ならば $x_1 - x_2 \in P_E^m$ を意味する。従って、$P_E^{2\mu+i-1}/P_E^{m+\mu}$ から $P_E^{2\mu+i-1-n}/P_E^{m+\mu-n}$ へ引き起こされる写像は単射である。元の数を比較して全射がわかる。

次に$\mu = 0$の時を扱う。$x \in P_E$ に対して、

$$\tilde{R}_{0,2}(x) \equiv \frac{\gamma\alpha + ({}^{\sigma}\gamma - \gamma)x}{1 + \alpha} \mod P_E^{v_E(x)+1-n}$$

が成り立つ。この式より、$\mu > 0$ の時と同じ議論で証明できる。

$x_0 \in \mathcal{O}_E^\times, x_1 \in P_E$ に対しても、

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{0,1}(x_0+x_1) &= \frac{({}^{\sigma^2}\gamma-\gamma)(x_0+x_1)+\gamma\alpha-{}^{\sigma^2}\gamma\alpha^{-1}n_E(x_0)n_E(1+x_0^{-1}x_1)}{1+\alpha+\alpha^{-1}n_E(x_0)n_E(1+x_0^{-1}x_1)-\mathrm{tr}_E(x_0+x_1)} \\
&\equiv \frac{({}^{\sigma^2}\gamma-\gamma)x_0+\gamma\alpha-{}^{\sigma^2}\gamma\alpha^{-1}n_E(x_0)+({}^{\sigma^2}\gamma-\gamma)x_1}{1+\alpha+\alpha^{-1}n_E(x_0)-\mathrm{tr}_E(x_0)} \mod P_E^{2-n} \\
&\equiv \tilde{R}_{0,1}(x_0)+\frac{({}^{\sigma^2}\gamma-\gamma)x_1}{1+\alpha+\alpha^{-1}n_E(x_0)-\mathrm{tr}_E(x_0)} \mod P_E^{2-n}
\end{aligned}$$

が成り立つので同様に証明できる。 □

以上より、次の Lemma が示せる。

Lemma 2.7. $U_i = F^\times(1+P_E^i)$ $(i>0)$, $U_0 = F^\times\mathcal{O}_E^\times$ とおく。

1. $\mu > 0$ に対して、

$$\bigoplus_{a\in\tilde{I}_{\mu,i}} {}^a\rho_\theta\rho_\theta^{-1} = \frac{q-1}{3}q^{[(m-\mu-1)/3]+[(m+\mu-n+2)/3]-[(2\mu+i-1-n+2)/3]}$$

$$|P_E^{\mu-m+1}\cap F/P_E^{m+\mu-n}\cap F| \bigoplus_{\chi\in(U(m-\mu)/U(n+1-2\mu+1-i))^\wedge} \chi$$

が成り立つ。

2. $\alpha \in n_E(\mathcal{O}_E^\times)$ に対して、

(2.14)
$$\Lambda(\alpha) = \left\{\chi \in (U_m/U_{n+1})^\wedge \,\middle|\, \chi(1+y) = \psi_E\left(\frac{\gamma\alpha}{1+\alpha}({}^{\sigma^2}y-y)\right) \quad \textit{for} \quad y \in P_E^n\right\}$$

とおくと、

$$\bigoplus_{a\in\tilde{I}_{0,2}} {}^a\rho_\theta\rho_\theta^{-1} = q^{n-2m-1+[(m-1)/3]+[(m-n+2)/3]-[(3-n)/3]} \bigoplus_{\alpha\in n_E(\mathcal{O}_E^\times)/1+P_F}\ \bigoplus_{\chi\in\Lambda(\alpha)} \chi$$

が成り立つ。

3. $\alpha \in n_E(\mathcal{O}_E^\times), x_0 \in \mathcal{O}_E$ を $1+\alpha+\alpha^{-1}x_0^3-3x_0 \notin P_E$ を満たすものとする。$\Omega(\alpha,x_0)$ を $(U_m/U_{n+1})^\wedge$ の部分集合で 以下を満たすχ からなる集合とする。

$$\chi(1+y) = \psi_E\left(\frac{({}^{\sigma^2}\gamma-\gamma)x_0+\gamma\alpha-{}^{\sigma^2}\gamma\alpha^{-1}x_0^3}{1+\alpha+\alpha^{-1}x_0^3}({}^{\sigma}y-y)\right) \quad \textit{for} \quad y\in P_E^n \tag{2.15}$$

このとき、

$$\bigoplus_{a\in\tilde{I}_{0,1}} {}^a\rho_\theta\rho_\theta^{-1} = q^{n-2m-1+[(m-1)/3]+[(m-n+2)/3]-[(3-n)/3]} \bigoplus_{\alpha\in n_E(\mathcal{O}_E^\times)/1+P_F}\ \bigoplus_{x_0\in\mathcal{O}_E/P_E}\ \bigoplus_{\chi\in\Omega(\alpha,x_0)} \chi$$

が成り立つ。

以上より、κ_θ の 指標 χ_{κ_θ} の $E^\times$ 上での値が求まる。

Proposition 2.8. $U_j^* = U_j - U_{j+1}$ とおく。

$$\chi_{\kappa_\theta}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{2} \theta({}^{\sigma^i}x) & \textit{if} \quad x \in E^\times - U_0 \\ q^j \sum_{i=0}^{2} \theta({}^{\sigma^i}x) & \textit{if} \quad x \in U_j^* \quad (1 \le j \le n-1) \\ q^{n-1}\theta(c) \sum_{\substack{y_1,y_2,y_3 \in k_F^\times \\ y_1y_2y_3=1}} \psi\left(\gamma \varpi_E^n x_0(y_1+y_2+y_3)\right) & \textit{if} \quad x = c(1+\varpi_E^n x_0) \\ & \quad \textit{for} \quad c \in F^\times, x_0 \in \mathcal{O}_F^\times \\ q^{n-1}(q-1)^3\theta(x) & \textit{if} \quad x \in U_{n+1} \end{cases}$$

$E^\times$ 上以外での、χ_{κ_θ} は簡単に計算できるので結果のみ示す。

Proposition 2.9. x を B の *elliptic regular element* で、$F(x) \not\simeq E$ となるものとする。

1. $F(x)/F$ が不分岐とすると

$$\chi_{\kappa_\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad x \notin F^\times(K^{n+1} \cap F(x)) \\ q^{n-1}(q-1)^3\theta(c) & \textit{if} \quad x = cy \quad \textit{for} \quad c \in F^\times, y \in K^{n+1} \cap F(x) \end{cases}$$

2. If $F(x)/F$ が分岐拡大とすると $b \in \mathcal{O}_F^\times$ で $b \bmod P_F \notin k_F^3 = \{x^3 | x \in k_F\}$ かつ $\varpi_E diag(b,1,1)$ が $\mathcal{O}_{F(x)}$ の素元となるものがあるとしてよい。(必要なら共役をとる) $\varpi_{F(x)} = \varpi_E diag(b,1,1)$ とおく。このとき、

$$\chi_{\kappa_\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad x \notin F^\times(1+P_{F(x)}^n) \\ q^{n-1}\theta(c) \sum_{\substack{y_1,y_2,y_3 \in k_F^\times \\ y_1y_2y_3=k_1k_2k_3}} f(y_1,y_2,y_3) & \textit{if} \quad x = c(1+\varpi_{F(x)}^n diag(k_1,k_2,k_3)+z) \\ & \quad \textit{for} \quad c \in F^\times, k_i \in k_F^\times, z \in P_{F(x)}^{n+1} \\ q^{n-1}(q-1)^3\theta(c) & \textit{if} \quad x = c(1+y) \quad \textit{for} \\ & \quad c \in F^\times, y \in P_{F(x)}^{n+1} \end{cases}$$

但し、

$$f(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} \psi\left(\gamma \varpi_E^n b^{[n/3]+1}(y_1+y_2+y_3)\right) & \textit{if}\, n \equiv 1 \mod 3 \\ \psi\left(\gamma \varpi_E^n b^{[n/3]+2}(y_1+y_2+y_3)\right) & \textit{if}\, n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Proposition 2.8,Proposition 2.9 と Theorem 1.4 よりπ_θ の指標公式が得られる。(本当は、K^{n+1} 上の値は、F 上の 3 次の division algebra D の乗法群 $D^\times$ の表現と比較するとかいう必要があるが $\cdots$)

Theorem 2.10. 記号は上記の通りとして、

1. $F(x)/F$ が不分岐なら

$$\chi_{\pi_\theta}(x)=\begin{cases}0 & x\notin F^\times(1+P_{F(x)}^{[(n+3)/3]})\\ (q^2+q+1)q^{n-1}\theta(c) & x=c(1+y)\quad for\ c\in F^\times, y\in P_{F(x)}^{[(n+3)/3]}\end{cases}$$

となる。

2. $x\in E$ なら

$$\chi_{\pi_\theta}(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{2}\theta({}^{\sigma^i}x) & if\quad x\in E^\times-U_0\\ q^j\sum_{i=0}^{2}\theta({}^{\sigma^i}x) & if\quad x\in U_j^*\quad (1\le j\le n-1)\\ q^{n-1}\theta(c)\sum_{\substack{y_1,y_2,y_3\in k_F^\times\\ y_1y_2y_3=1}}\psi\left(\gamma\varpi_E^n x_0(y_1+y_2+y_3)\right) & if\quad x=c(1+\varpi_E^n x_0)\\ & \qquad for\quad c\in F^\times, x_0\in\mathcal{O}_F^\times\\ q^{n-1}(q^2+q+1)\theta(x) & if\quad x\in U_{n+1}\end{cases}$$

となる。

3. $F(x)/F$ が分岐拡大で $F(x)\not\simeq E$ なら、

$$\chi_{\pi_\theta}(x)=\begin{cases}0 & if\quad x\notin F^\times(1+P_{F(x)}^n)\\ q^{n-1}\theta(c)\sum_{\substack{y_1,y_2,y_3\in k_F^\times\\ y_1y_2y_3=k_1k_2k_3}}f(y_1,y_2,y_3) & if\quad x=c(1+\varpi_{F(x)}^n diag(k_1,k_2,k_3)+z)\\ & \qquad for\quad c\in F^\times, k_i\in k_F^\times, z\in P_{F(x)}^{n+1}\\ q^{n-1}(q^2+q+1)\theta(c) & if\quad x=c(1+y)\quad for\\ & \qquad c\in F^\times, y\in P_{F(x)}^{n+1}\end{cases}$$

がなりたつ。

3　指標公式 (E/F がガロア拡大でない場合)

この節では、F が1の原始3乗根 ζ を含まない場合、即ち、E/F がガロア拡大でない場合を扱う。前節では、$M_3(F)$ を E-加群とみてよい基底 $\{1,\xi,\xi^2\}$ がとれたことで具体的な計算ができたのであった。この方法を用いるために base change lift を使う。L/F を2次不分岐拡大とする。このとき、$L=F(\zeta)$ であることに注意する。$\mathrm{Gal}(L/F)=<\tau>$ とおく。F から L へ base change した対象 (群、表現等) を L を下付きにつけて表すことにする。 このとき、$E_L=E\otimes_F L\simeq EL$ となり、E_L は、L 上3次分岐ガロア拡大で E 上2次不分岐拡大で、そのガロア群は $\mathrm{Gal}(E_L/E)=\mathrm{Gal}(L/F)=<\tau>$ となる。また、E_L/F は $\mathfrak{S}_3$ 拡大である。(E は、E_L に写像 $x\mapsto x\otimes 1$ で埋めこんで考える。) 前節同

様、$M_3(L)$ を $\mathrm{End}_L E_L$、$G_L = \mathrm{GL}_3(L)$ を $\mathrm{Aut}_L E_L$ と E_L の L-basis $\{\varpi_E^2, \varpi_E, 1\}$ によって同一視する。また、lattice flag $\{P_{E_L}^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ によって,

$$A_L^i = \{f \in M_3(L) | f(P_{E_L}^j) \subset P_{E_L}^{j+i} \quad \text{for all} \quad j \in \mathbb{Z}\}$$

$K_L = (A_L^0)^\times, B_L = E_L^\times K_L$, $K_L^i = 1 + A_L^i$ $(i \geq 1)$ とそれぞれの L 上への base change が自然に定義される。

Theorem 1.4 から、π_θ でなく κ_θ の base change を考えれば充分である。このことから、Arthur-Clozel の base change lift ([1]) を用いる必要がなく、標数 0 を仮定しなくともよい。さらに、κ_θ 自体の base change でなく、$\kappa_\theta|_{B^1}$ の base change だけで指標の計算ができることがポイントである。なお、この部分については、Bushnell-Henniart の最近の結果 ([3]) の非常に簡単な場合への応用として得られる。

必要な表現の base change lift を定義しよう。

Definition 3.1. $E^\times$ の generic quasi-character θ をとり、$f(\theta) = n+1$ とおき $\theta(1+x) = \psi(\mathrm{tr}_E(\gamma x))$ for $x \in P_E^m$ となる $\gamma \in P_E^{-n}$ をとる。$\theta^1 = \theta|_{F^\times(1+P_E)}$ とおいたことを思い出そう。θ の $E_L^\times$ への base change lift θ_L を $\theta_L = \theta \circ n_{E_L/E}$ と定義する。このとき、$\theta_L(1+x) = \psi_L(\mathrm{tr}_{E_L/L}\gamma x)$ for $x \in P_{E_L}^m$ $(m = [(n+2)/2])$ が成り立つ。F 上の時と同様に、B_L の部分群の $L^\times K_L$ との共通部分を上付きに、^{1} をつけて表す。即ち、$H_L^1 = L^\times(1+P_{E_L})K_L^m, J_L^1 = L^\times(1+P_{E_L})K_L^{m-1}, B_L^1 = L^\times K_L$ となる。$\rho_\theta^1 = \rho_\theta|_{H^1}$ の H_L^1 への base change lift $\rho_{\theta_L}^1$ を

$$\rho_{\theta_L}^1(h \cdot g) = \theta_L(h)\psi_L(\mathrm{Tr}\,\gamma(g-1)) \qquad \text{for} \quad h \in L^\times(1+P_{E_L}), \quad g \in K_L^m$$

と定義する。$n+1 = 2m$ のとき、κ_θ^1 の B_L^1 への base change を

$$\mathrm{Ind}_{H_L^1}^{B_L^1} \rho_{\theta_L}^1$$

と定義する。

$n+1 = 2m-1$ のときは、η_θ^1 の J_L^1 への base chabge lift $\eta_{\theta_L}^1$ は、F 上の時と同様、$\mathrm{Ind}_{H_L^1}^{J_L^1} \rho_{\theta_L}^1$ の唯一の既約成分として定義される。κ_θ^1 の B_L^1 への base change lift $\kappa_{\theta_L}^1$ は、

$$\mathrm{Ind}_{J_L^1}^{B_L^1} \eta_{\theta_L}^1$$

と定義される。

$\theta_L \circ \tau = \theta_L$ より、$\rho_{\theta_L} \circ \tau = \rho_{\theta_L}$ 従って、$\rho_{\theta_L}^1$ の、$H_L^1 \rtimes < \tau >$ への延長 $\widetilde{\rho_{\theta_L}^1}$ を $\widetilde{\rho_{\theta_L}^1}(x \rtimes \tau) = \rho_{\theta_L}^1(x)$ と定義できる。また、$\eta_{\theta_L}^1$ の uniqueness より、$\eta_{\theta_L}^1 \circ \tau \simeq \eta_{\theta_L}^1$ となるので、$\eta_{\theta_L}^1$ も、$J_L^1 \rtimes < \tau >$ へ延長できる。([3]) の (12.8) Proposition と (14.21) Corollary の下の Remark より、次の Lemma が従う。

Lemma 3.2. $\eta_{\theta_L}^1$ の $J_L^1 \rtimes < \tau >$ への延長 $\widetilde{\eta_{\theta_L}^1}$ で、

$$\chi_{\widetilde{\eta_{\theta_L}^1}}(x \rtimes \tau) = \chi_{\eta_\theta^1}(n_{E_L/E}(x)) \quad \textit{for} \quad x \in E_L^\times$$

となるものがとれる。

更に、(12.19) Corollary ([3]) より、

Proposition 3.3. 1. $n+1=2m$ のとき、$x \in E_L^\times(1+P_{E_L})$ に対して、

$$\chi_{\kappa_\theta}(n_{E_L/E}(x)) = \sum_{\substack{a\in H_L^1\backslash B_L^1 \\ ax^\tau a^{-1}\in H_L}} \rho_{\theta_L}(ax^\tau a^{-1})$$

が、成り立つ。
2. $n+1=2m-1$ のとき、$x \in E_L^\times(1+P_{E_L})$ に対して、

$$\begin{aligned}\chi_{\kappa_\theta}(n_{E_L/E}(x)) &= \sum_{\substack{a\in J_L^1\backslash B_L^1 \\ ax^\tau a^{-1}\in J_L^1}} \chi_{\eta_\theta^1}(ax^\tau a^{-1} \rtimes \tau) \\ &= q \sum_{\substack{a\in J_L^1\backslash B_L^1 \\ ax^\tau a^{-1}\in H_L^1}} \rho_{\theta_L}(ax^\tau a^{-1})\end{aligned}$$

が、成り立つ。*($\chi_{\eta_\theta^1}(\tau)=q$ に注意しよう。)*

以下、紙面の節約の為 $n+1=2m$ と仮定する。実際は、$n+1=2m-1$ の時も、全く同様に証明できる。($n+1$ の偶数・奇数の違いが効くのは、上の Lemma である。)
前節と同様、$\xi = diag(1,\zeta^2,\zeta)$ とおく。ξ は、$\xi^3=1$, ${}^\tau\xi=\xi^2$,

$$\xi x \xi^{-1} = {}^\sigma x \quad \text{for any} \quad x \in E_L$$

$$\begin{array}{llllll} M_3(L) & = E_L & \oplus & E_L\xi & \oplus & E_L\xi^2 \\ A_L^0 & = \mathcal{O}_{E_L} & \oplus & \mathcal{O}_{E_L}\xi & \oplus & \mathcal{O}_{E_L}\xi^2 \\ A_L^1 & = P_{E_L} & \oplus & P_{E_L}\xi & \oplus & P_{E_L}\xi^2 \\ A_L^2 & = P_{E_L}^2 & \oplus & P_{E_L}^2\xi & \oplus & P_{E_L}^2\xi^2. \end{array} \tag{3.1}$$

を満たす。Lemma 2.2 より、

$$\begin{aligned} &\{1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2 | \beta_i \in \mathcal{O}_{E_L}/P_{E_L}^m, \det(1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2)\in \mathcal{O}_{E_L}^\times\} \\ &\cup\{(1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2)\xi | \beta_1 \in P_{E_L}/P_{E_L}^m, \beta_2 \in P_{E_L}/P_{E_L}^m\} \\ &\cup\{(1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2)\xi^2 | \beta_1 \in P_{E_L}/P_{E_L}^m, \beta_2 \in \mathcal{O}_{E_L}/P_{E_L}^m, \det(1+\beta_2\xi^2)\in \mathcal{O}_{E_L}^\times\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$H_L^1\backslash B_L^1$の完全代表系となる。
次の Lemma は、Lemma 2.2 と同様に証明できる。

Lemma 3.4. $x \in \mathcal{O}_{E_L}^\times$ が $n_{E_L/E}(x) \in U_i - U_{i+1}$ となるとする。

1. $a = 1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2$ *($\beta_1,\beta_2 \in \mathcal{O}_{E_L}$)* のとき、$ax^\tau a^{-1} \in H_L$ は、$\beta_1,\beta_2 \in P_{E_L}^{m-i}$ かつ $\beta_2 = \beta_1^\tau \mod P_{E_L}^m$ と同値。

2. $a=(1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2)\xi^2$ $(\beta_1\in P_{E_L},\beta_2\in\mathcal{O}_{E_L})$ のとき、$ax^\tau a^{-1}\in H_L$ は、$i\geq m$ かつ $n_{E_L/E}(\beta_2)=1 \mod 1+P_E^m$ かつ$\beta_1=(\beta_2^\tau)^{-1}\beta_1^\tau \mod P_{E_L}^m$ と同値。
3. $a=(1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2)\xi$ $(\beta_1,\beta_2\in P_{E_L})$ のとき、$ax^\tau a^{-1}\notin H_L$

$n_{E_L/E}(x)\in E^\times-\mathcal{O}_F^\times(1+P_E)$ のとき、, $ax^\tau a^{-1}\in H_L$ ならば、$a\in H_L$ いずれの場合も、$ax^\tau a^{-1}\in H_L$ は、$H_L{}^\tau a=H_La$ かつ $H_La=H_Lax$ と同値。

次の Lemma は、Lemma 2.5 に対応している。

Lemma 3.5. 1. $a=1+\beta\xi+{}^\tau\beta\xi^2$ $(v_{E_L}(\beta)\geq\max\{0,m-i\})$ とする。$n_{E_L/E}(x)\in U_i^*$ に対して、

$$\rho_{\theta_L}(ax^\tau a^{-1}x^{-1})=\psi_E(S(\beta)\operatorname{tr}_{E_L/E}(y))$$

が成り立つ。但し、

$$S(\beta)=\frac{\operatorname{tr}_{E_L/E}((\gamma-{}^\sigma\gamma)(n_{E_L/\sigma^2E}(\beta)-n_{E_L/L}({}^\tau\beta)))}{1+\operatorname{tr}_{L/F}(n_{E_L/L}(\beta))-\operatorname{tr}_{\sigma^2E/F}(n_{E_L/\sigma^2E}(\beta))} \tag{3.3}$$

2. $\beta_1\in P_{E_L},\beta_2\in\mathcal{O}_{E_L}$ は、$n_{E_L/E}(\beta_2)=1$ かつ $\beta_1=({}^\tau\beta_2)^{-1}{}^\tau\beta_1$ を満たすとする。$a=(1+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2)\xi^2$ とおく。$n_{E_L/E}(x)\in U_m$ に対して、

$$\rho_{\theta_L}(ax^\tau a^{-1}x^{-1})=\psi_E(T(\beta_1,\beta_2)\operatorname{tr}_{E_L/E}(y))$$

が成り立つ。但し、

$$T(\beta_1,\beta_2)=\frac{({}^\sigma\gamma-\gamma)(1-{}^{\sigma^2}\beta_1\beta_2)+({}^{\sigma^2}\gamma-\gamma)(n_{E_L/L}(\beta_2)-{}^\sigma\beta_1{}^{\sigma^2}\beta_2)}{1+n_{E_L/L}(\beta_2)+n_{E_L/L}(\beta_1)-\operatorname{tr}_{E_L/L}(\beta_1{}^\sigma\beta_2)}. \tag{3.4}$$

次の Lemma も Lemma 2.6 と同様に証明できる。

Lemma 3.6. $x\in\mathcal{O}_{E_L}$ は、$1+\operatorname{tr}_{L/F}(n_{E_L/L}(x))-\operatorname{tr}_{\sigma^2E/F}(n_{E_L/\sigma^2E}(x))\notin P_F$ を満たすとし、$E^0=\operatorname{Ker}\operatorname{tr}_E$ とおく。

1. $\mu>0$ かつ $n\not\equiv 2\mu \mod 3$ (*resp.* $n\equiv 2\mu \mod 3$) のとき、, 写像 $x\mapsto S(x)$ は、$\varpi_E^\mu\mathcal{O}_{E_L}^\times/1+P_{E_L}^{m-\mu}$ から $(P_E^{2\mu-n}-P_E^{2\mu-n+1})\cap E^0/P_E^{1-m+\mu}\cap E^0$ (*resp.* $P_E^{2\mu-n+1}\cap E^0/P_E^{1-m+\mu}\cap E^0$) への全射を誘導し、各ファイバーは$(q+1)q^{m-\mu-1+[(1-m+\mu)/3]-[(2\mu-n+1)/3]}$ (*resp.* $(q^2-1)q^{m-\mu-1+[(1-m+\mu)/3]-[(2\mu-n+1)/3]}$) 個の元を持つ。
2. $1+\operatorname{tr}_{L/F}(n_{E_L/L}(x_0))-\operatorname{tr}_{\sigma^2E/F}(n_{E_L/\sigma^2E}(x_0))\notin P_F$ を満たす任意の $x_0\in\mathcal{O}_{E_L}^\times$ に対して、写像 $x\mapsto S(x)$ は、$\{x\in\mathcal{O}_{E_L}^\times/1+P_{E_L}^m|x\equiv x_0 \mod P_{E_L}\}$ から

$$\left\{x\in P_E^{-n}\cap E^0/P_E^{1-m}\cap E^0 \;\middle|\; x\equiv S(x_0) \mod P_E^{1-n}\right\}$$

への全射を誘導し、各ファイバーは$q^{m-1+[(1-m)/3]-[(1-n)/3]}$個の元を持つ。

3. $n_{E_L/E}(\beta_2) = 1$ を満たす$\beta_2 \in \mathcal{O}_{E_L}$を固定する。このとき、写像 $x \mapsto T(x,\beta_2)$ は、$\{x \in P_{E_L} | {}^\tau x = {}^\tau\beta_2 x\}$ から

$$\left\{x \in P_E^{1-n} \cap E^0 / P_E^{1-m} \cap E^0 \;\middle|\; x \equiv \frac{{}^\sigma\gamma - \gamma + ({}^{\sigma^2}\gamma - \gamma) n_{E_L/L}(\beta_2)}{1 + n_{E_L/L}(\beta_2)} \mod P_E^{2-n}\right\}$$

への全射を誘導し各ファイバーは、$q^{[(1-m)/3]-[(1-n)/3]}$ 個の元を持つ。

以上より、χ_{κ_θ} の $F^\times(1+P_E) - F^\times(1+P_E^n)$ 上での値が計算できる。$E^\times - F^\times(1+P_E)$ 上では、第1節での、κ_θ の定義に戻って計算すれば簡単に計算できる。また、$F^\times(1+P_E^n)$ 上では、第2節の結果がそのまま使える。従って、κ_θ の $E^\times$ 上での指標公式が得られ、それから直ちに π_θ の $E^\times$ 上での指標公式が得られる。また、$E^\times$ 以外の共役類上では指標を計算するのは容易である。ここでは、π_θ の指標公式のみを示す。この公式は$n+1 = 2m-1$ の時も含めて成り立つ。

Theorem 3.7. x を $\mathrm{GL}_3(F)$ の *elliptic regular element* とする。

1. $F(x)/F$ が不分岐ならば、

$$\chi_{\pi_\theta}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin F^\times(1 + P_{F(x)}^{[(n+3)/3]}) \\ (q^2+q+1)q^{n-1}\theta(c) & x = c(1+y) \quad \textit{for } c \in F^\times, y \in P_{F(x)}^{[(n+3)/3]} \end{cases}$$

2. $x \in E$ ならば、

$$\chi_{\pi_\theta}(x) = \begin{cases} \theta(x) & \textit{if} \quad x \in E^\times - U_0 \\ (-q)^j\theta(x) & \textit{if} \quad x \in U_j^* \quad (1 \le j \le n-1) \\ q^{n-1}\theta(c) \displaystyle\sum_{y,z \in k_F^\times} \psi\left(\gamma\varpi_E^n x_0 (y + z + \frac{1}{yz})\right) & \textit{if} \quad x = c(1+\varpi_E^n x_0) \\ & \qquad \textit{for} \quad c \in F^\times, x_0 \in \mathcal{O}_F^\times \\ q^{n-1}(q^2+q+1)\theta(x) & \textit{if} \quad x \in U_{n+1} \end{cases}$$

Remark . $p \equiv 2 \mod 3$ のときは、F の3次分岐拡大は、同型を除いて一つしかない。

参考文献

[1] J. Arthur and L. Clozel, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula, Annals of Math. Studies **120**, Princeton Univ. Press, 1989.

[2] C. J. Bushnell and A. Fröhlich, Gauss Sums and p-adic Division Algebras, Lecture Notes in Math. **987**, Springer, Berlin, 1983.

[3] C. J. Bushnell and G. Henniart *Local tame lifting for $GL(N)$. I. Simple characters.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 83 (1996), 105–233.

[4] H. Carayol, *Représentaion cuspidales du groupe linéaire* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **17** (1984), 191–226.

[5] L. Corwin and R. Howe, *Computing characters of tamely ramified division algebras,* Pac. J. Math. **73** (1977), 461–477.

[6] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vinéras, *Représentaions des algébres centales simples p- adiques*, in: Représentation des Groupes Réductifs sur un Corps Local, Herman, Paris, 1984, pp. 33–117.

[7] R. Godement and H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Lecture Notes in Math. **260**, Springer, Berlin, 1972.

[8] R. Howe, *Kirillov theory for compact p-adic groups*, Pac. J. Math. **73**, (1977), 365–381.

[9] ———, *Tamely ramified supercuspidal representations of* $\mathrm{GL}_n(F)$, Pac. J. Math. **73** (1977), 437–460.

[10] H. Hijikata, H. Saito, and M. Yamauchi, *Representations of Quaternion Algebras over Local Fields and Trace Formula of Hecke Operators*, J. Number Theory **43** (1993), 123–167.

[11] P. Kutzko, *Character formulas for supercuspidal representations of* GL_l*, l a prime*, Amer. J. Math. **109** (1987), 201–222.

[12] A. Moy, *Local constant and the tame Langlands correspondence*, Amer. J. Math. **108** (1986), 863–930.

[13] T. Takahashi, *Characters of cuspidal unramified series for central simple algebras of prime degree*, J. Math. Kyoto Univ. **32-4** (1992), 873–888.

[14] ———, *Character formula for representations of local quaternion algebras (Wildly ramified case)*, J. Math. Kyoto Univ. **36-1** (1996), 151–197.

[15] ———, *Character formula for the representations of* GL_3 *over non-archimedean local field*, preprint.

[16] J. -P. Serre, Linear Representations of Finite Groups, Springer Verlag, New-York, 1977.